

代数曲線族の局所符号数について

東北学院大・工 足利 正 (Tadashi ASHIKAGA)

§0. 序 S を非特異コンパクト複素曲面, B を閉リーマン面
 とし, $f: S \rightarrow B$ を連結ファイバーを持つ固有全射正則写像
 とする。この時, f の臨界値集合 Σ は B の有限集合で
 あって $B \setminus \Sigma$ 上 f は smooth 射であるが, $t \in B \setminus \Sigma$ につ
 いてファイバー $f^{-1}(t)$ は種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面であ
 るとする。このような f を種数 g の代数曲線族と呼ぶ。

さて, $\text{Sign}(S)$ を $H^2(S; \mathbb{R})$ 上のカップ積の誘導する
 交叉型式の符号数とする。本稿で考察するテーマは, この
 符号数の“局所集中性の問題”と呼ばれているものである。
 則ち, もしも f に関するある条件の下で, 各ファイバー束
 (f, F) ($F = f^{-1}(p), p \in B$) に対し “局所符号数” $\sigma(f, F)$
 が well-defined で”

- (i) $\sigma(f, F) \neq 0$ となる F は有限個のみである,
- (ii) (i) を満たすファイバーの集合を $\{F_1, \dots, F_\ell\}$ とすれば”

$$\text{Sign } S = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(f, F_i)$$

なる二つの条件が満たされている時, 不変量 $\text{Sign}(S)$ は
 ファイバー束 $(f, F_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ に局所集中していると呼ぶ。
 考えるべき問題群は,

- (a) f に関するいかなる条件下で, $\sigma(f, F)$ をどう定義

すなわち, π の符号数の局所集積性が起こるか?

(b) の (f, F) が $\pi = 0$ となる冪の特徴付けは?

(c) の (f, F) を具体的にどのように計算すべしよいか?

等である。

これについての現状を述べると, まず最も良くわかって
いるのが, f が超楕円的曲線族の場合である。この
場合, Meyer 関数を用いる位相幾何学的アプローチ (松本
[Ma], 遠藤 [E]) と, 特異点を用いる代数幾何学的アプ
ローチ (堀川 [Ho], 荒川-A. [AA]) の 2 つの方法があり,
これらの同等性も石塚がめられている。(寺杉 [Te]) f が
非超楕円的な場合は, 一般型曲面論の立場からの今野
一宏氏 [Ko], 位相幾何学的な古田幹雄氏 [Fu], 保型
形式な立場での (土野健爾氏 [U] の方法を拡張した) 吉川
謙一氏 [Y] による, これこれ見かけ上全く異なる立場
でのアプローチが開始されているが, これらのお互いの関
係は明確ではなく, この方面の詳細な研究は今後
に話されている。(詳しくは今野-A. [AK], 遠藤-A. [AE] 参照)

さて, 本稿ではこの方向にもう一步を進めようとする
ものである。我々の主張を大雑把にまとめると次の
ようになる。

(i) 吉川氏 [Y] の研究した局所符号数は, ある広い意味

での古田氏 [Fu1,2] の定式化 (た 局所符号数の範疇) が
 解釈できる。

(ii) 古田氏の定式化 (た 局所符号数) については、曲線族
 の半安定環元に伴うこの不変量の変化を、局所位相モ
 ドロフィーを用いて具体的に書き下すことが出来る。

(i) (iii) の主張の意義や、これに到る動機等について
 は本文中に記すことにしたい。なおこの結果について、
 本論文はまだ執筆していないが、現在その準備を進
 んでいる。

§1. 符号不足数を用いる Furuta の定式化

本節は古田 [Fu1] [Fu2] の議論の (細部に立ち入らな
 い) 大きな外枠のみを抽出したものである。記号は [Fu1] [Fu2]
 とは少しだけ異なる部分もある。

まず S 上の Hermitian metric h を一つ固定する。 $V = V_h$
 を h から誘導される接束 T_S の Levi-Civita 接続とする。 V の
 曲率形式から誘導される第 1 Pontryagin 類を $P_1(S, V)$
 とする。これは S 上の (2,2) 型微分形式である。

$L_1(S, V)$ を Hirzebruch の第 1 L-多項式とする。衆知の如く、

$$L_1(S, V) = \frac{1}{3} P_1(S, V) = \frac{1}{3} \{ c_1^2(S, V) - 2c_2(S, V) \}$$

である。ここに $c_i(S, V)$ は i 次 Chern 類を示す。古典的な

Hirzebruch の符号数定理 [H] より,

$$\text{Sign } S = \int_S L_1(S, \nabla) \quad (1.1)$$

となる。これは結局計量や接続のとり方に依存しない量なので、 ∇ 等は省略してもよいと思われるかもしれないが、(大域不変量としてはさうであっても) 我々はこの不変量の“局在化”の問題を議論するのであり、 ∇ を省略できないディテールな部分を有する。

さて積分 (1.1) について、もしも以下のような状況が生じたとしよう。則ち B 上の有限個の点 P_1, \dots, P_p があって、 U_i を P_i 中心の十分小さな閉円板とし、 $B_\infty = B \setminus \bigsqcup_{1 \leq i \leq p} U_i$, $S_\infty = f^{-1}(B_\infty)$ と置く時、条件

$$\int_{S_\infty} L_1(S, \nabla) = 0 \quad (1.2)$$

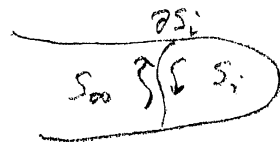
が満たされたとする。この時、 $S_i = f^{-1}(U_i)$ とおけば

$$\text{Sign } S = \sum_{i=1}^p \int_{S_i} L_1(S, \nabla) \quad (1.3)$$

であるが、一方

$$\int_{S_i} L_1(S, \nabla) = \text{Sign}(S_i) - \eta(\partial S_i, \nabla_{\partial S_i}) \quad (1.4)$$

が成り立つ。こゝに $\text{Sign}(S_i)$ は境界付多様体 $(S_i, \partial S_i)$ の符号数、つまり $H^2(S_i, \partial S_i; \mathbb{R})$ 上のカップ積と de Rham 双対から誘導される一般には退化な二次形式の符号数である。また $\eta(\partial S_i, \nabla_{\partial S_i})$ は、 ∇ が ∂S_i に誘導する自然な接続 $\nabla_{\partial S_i}$ に関する符号不足数を表わす。ただし ∂S_i の向き付けは S_i 側から付けられているとする(下図)。



符号不足数は実3次元多様体とその上の線形接続のみ依存する不変量であり、それを bound する4次元多様体とその上への接続の拡張には依存しない。(cf. 古田 [Fu3] 第15章.) 今の場合はもともと S_i なる本体があるわけであるが、これを別のものに取り換えてもよいわけである。(こゝでは実際 S_3 で使われる.)

$$\text{そこで } F_i = f'(P_i) \text{ とし,}$$

$$\sigma(f, F_i) := \text{Sign}(S_i) - \eta(\partial S_i, \nabla_{\partial S_i}) \quad (1.5)$$

とおけば、(1.3), (1.4) より

$$\text{Sign } S = \sum_{i=1}^g \sigma(f, F_i) \quad (1.6)$$

なる“局所集中式”が得られる。(注) ただし (1.5) 式が、

(注) [Fu] では C^∞ -マニフォールド $S_\infty \rightarrow B_0$ を考え、 $\text{Sign } S_\infty$ が (1.2) の下で S_∞ の側から向き付け ($\Gamma = \partial S_\infty = \coprod_{1 \leq i \leq l} \partial S_i$) の符号不足数に一致することから、Novikov 加法性より (1.6) 式を与えている。向き付けのこゝは、これが正統な定義のほうかと、古田さんおめでとう。

ファイバー束の不変量として well-defined であること, つまりは (1.2) 式がいったん U_i を定めれば, それをさらに任意のさらに小さな同様に縮めるとも良いことは石野認っておかぬばならない。

(1.5) の (f, F_i) を, ファイバー束 (f, F_i) の古田の意味の局所符号数, もしくは単に局所符号数という。(本稿ではこれ以外のものを局所符号数と呼ぶことはない。)

[Fu1] [Fu2] では (1.2) が満たされるいくつかの幾何的な十分条件が考察されている。そのうち, 例えは \mathbb{P}^1 の一般被覆次数を持つ分岐曲線束族に関する考察等は, 筆者にとって興味深いものである。([Fu1] [Fu2] は研究集会の解説記事であり正式な論文が待たれるところである。) なお筆者にとっては, 1999年のある時期に, 直接古田氏自身から上の考えをお教えいただいた。氏に感謝を捧げた。

ただ, これから考察しようとするのは, [Fu1] [Fu2] 中にある一つの十分条件ではなくて, それとは少し別の文脈から吉川謙一氏 [Yo1] が提示したものである。次節がそれを述べてゆく。

§2. Yoshikawa-generic な曲線族

本節では吉川謙一氏 [Y1] が提示・考察した f に
 関する条件を扱う。この条件の下では前節(1.2)式が
 満たされ、従って Furuta の意味の局所符号数が
 well-defined となることを示す。この証明には Bismut-Gillet
 -Soule の公式 [BGS] が用いられる。また [Y1] で定義
 された局所符号数が、より広い概念の範疇で解釈で
 きることを注意する。

2.1 まず [Y1] の状況を再現しよう。 A_g を g 次元
 主偏極 Abel 多様体の moduli 空間とする。 \mathbb{C}_g を
 Siegel 上半平面とすると A_g は Siegel 空間 $\mathbb{C}_g / \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$
 に同型である。今、 $\pi: \mathcal{C} \rightarrow A_g$ を主偏極
 Abel 多様体の普遍族とする。(ただしここでは \mathcal{C} の \mathbb{C} -field
 sense で考えている。) $\omega_{\mathcal{C}/A_g}$ を π の相対双対化層とし

$$\lambda = \bigwedge^{\max} \pi_* \omega_{\mathcal{C}/A_g}$$

と置く。我々は直線束 λ もしくはその適当な tensor
 積 $\lambda^{\otimes R}$ の“具体的”切断が欲しいのであるが、
 以下に述べる井草保型形式がこれに答えにくれる。
 まず、縦ベクトル表示された変数 $(z, \tau) \in \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}_g$,

$\delta, \varepsilon \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ に対して, テータ関数

$$\theta_{\delta, \varepsilon}(z, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left\{ t(m + \frac{\delta}{2}) \tau(m + \frac{\delta}{2}) + 2t(m + \frac{\delta}{2})(z + \frac{\varepsilon}{2}) \right\}$$

を考える。さらに,

$$\theta_{\delta, \varepsilon}(\tau) := \theta_{\delta, \varepsilon}(0, \tau)$$

とおいて テータ定数と呼ぶ。これは \mathbb{C}_g 上の正則関数である。さて 偶テータ定数の積

$$\chi_g(\tau) := \prod_{\delta \varepsilon \equiv 0 \pmod{2}} \theta_{\delta, \varepsilon}(\tau)$$

は 重さ $2^{g-2}(2^g+1)$ の Siegel 保型形式となり,

$H^0(A_g, \lambda^{\otimes 2^{g-2}(2^g+1)})$ の元を与える。 χ_g の zero locus が
与える A_g 上の因子を

$$\Theta_{\text{null}} := (\chi_g) \subset A_g$$

と書いておく。

さて, 与えられた 種数 g の 曲線族 $f: S \rightarrow B$ に対して, f の 臨界値集合の補集合を $B^0 = B \setminus \Sigma$ とし, 固有 smooth 射 $f^0 := f|_{S^0}: S^0 = f^{-1}(B^0) \rightarrow B^0$ を考える。 f^0 の 誘導する 相対 Jacobi 写像を,

$$J_{f^0}: \begin{array}{ccc} B^0 & \longrightarrow & A_g \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & (\text{Jac } S_t, W^{g-1}(S_t)) \end{array}$$

と定める。==に $\text{Jac } S_t$ は ファイバー $S_t = f^{-1}(t)$ の Jacobi 多様体, $W^{g-1}(S_t)$ は S_t の $(g-1)$ 次対称積 $\text{Sym}^{g-1}(S_t)$ からの $(g-1)$ 次 Abel-Jacobi 写像の像であり, (Riemann 定数を法として) $\text{Jac } S_t$ のテータ因子に一致している。
(なおここでは, Θ と Abel 多様体の主偏極構造は, Θ 因子で入れていると思, ている, 例えは "Mumford [Mu] 参照.)

定義 2.2 $f: S \rightarrow B$ が "Yoshikawa-generic" な 曲線族 (γ -generic と略す) であるとは,

$$J_{f_0}(B^0) \not\subset \Theta_{\text{null}}$$

であることと定義する。

一般には $J_{f_0}(B^0)$ は A_g 上の曲線なので 因子 Θ_{null} とは有限個の点で交わるが, 非常に特別な場合として $J_{f_0}(B^0)$ が Θ_{null} の locus にすっぽり含まれることが起りうる。これを排除 (たのが " γ -generic" という条件である。なお [Y1] では, この条件の他に幾何的な言い換えがなされている。

2.3 以下 f を Y -generic と仮定する。 B の有限集合 $\tilde{\Sigma}$ を

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{f_0}^{-1} (J_{f_0}(B_0) \cap \Theta_{\text{null}}) \quad (2.3.1)$$

により定義する。 $\tilde{\Sigma}$ の各点 p の十分小さな開円板近傍を U_p とし, $B' = B \setminus \bigsqcup_{p \in \tilde{\Sigma}} U_p$ とおいて, 固有 smooth 射 $f' := f|_{S'} : S' = f^{-1}(B') \rightarrow B'$ を考える。 S' の計量として, S' の接束の相対接束と底空間の接束の引きもどしへの分解 $T_{S'} = T_{S'/B'} \oplus f'^* T_{B'}$ に対応する Kähler 計量 h (cf. [BGST]) を一つ入れ, 二れを固定する。(このとり方は一意的ではない。) h の誘導する Levi-Civita 接続を ∇ とする。この時:

命題 2.4 $\int_{S'} L_1(S', \nabla) = 0$.

これにより (1.2) の条件が満たされたので, Y -generic な f について, ファイバーに対する局所符号数が well-defined であり, $\text{Sign } S = \sum_{p \in \tilde{\Sigma}} \sigma(f, F_p)$ が満たされる。 $\sigma(f, F_p) \neq 0$ とする可能性を持つ ファイバー $F = f^{-1}(p)$ は, 特異ファイバーがあるか, h (または $[\text{Jac}(S_p)] \in A_g$) が因子 Θ_{null} に属するかの, いずれかになるわけである。

2.5 命題 2.4 の証明のための Key Lemma を与えよう。今の
 場合、 f' が固有射であることから、代数幾何出身の者な
 ら、とりあえず「まず Grothendieck - Riemann - Roch (つまり R.R.
 の相対版) が使えないか、と思うであろう。しかし S' は
 (代数多様体 S の古典トポロジーによる「一部分」ではあるが)
 これ自身代数多様体ではないので、これではできないなあ
 ---- と悲観視はしかなかったのは約 15 年以上前の時代であ
 り、局所指数定理が発達した現代では可能であ
 る。今の場合 f' が smooth 射なので Bismut - Gillet -
 Soulé [BGS] の範疇である。

f' に対して [BGS] を適用するための用語を準備する。
 一般に ξ を S' 上の直線束とする。そこから決まる Groth-
 endieck - Knudsen - Mumford [KM] の determinant line bundle

$$\lambda(\xi) = \left(\bigwedge^{\max} \pi'_* \mathcal{O}(\xi) \right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} R' \pi'_* \mathcal{O}(\xi) \right)$$

を考える。 $\lambda(\xi)$ の Quillen 計量を $\|\cdot\|_Q$ とする。(注)

(注) 念のため Quillen 計量とは、 $\lambda(\xi)$ の各ファイバー $(\bigwedge^{\max} H^0(S_t, \xi))^{-1} \otimes (\bigwedge^{\max} H^1(S_t, \xi))$
 ($t \in B$) を通常の仕方で調和微分形式の空間と見た時に入る L_2 計量
 $\|\cdot\|$ を、Ray - Singer [RS] の analytic torsion で twist (歪) したものである。
 正確な定義は原論文 [Q] か又は吉川氏の解説記事 [Y2] 参照。
 なお determinant line bundle の本来の定義は一般に Dirac 作用素の向きに
 対になされるもの (cf. Freed [F])、上の書き方は簡易的である。例えば
 代数幾何的状況で [KM] のそれと一致することは [BGS] 中の定理である。

この時, Bismut-Gillet-Soulé の公式は

$$c_1(\lambda(\xi), \|\cdot\|_Q) = - \int_f [Ch(\xi, \|\cdot\|) \cdot Todd(K_{S/B}^{-1}, \|\cdot\|^{-1})]^{(4)} \quad (2.5.1)$$

の形となる。ここに左辺は $\lambda(\xi)$ を Quillen 計量で測った第 1 Chern 類である。(つまり $\lambda(\xi)$ の C^∞ 切断のに対して, $\frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \log \|\cdot\|_Q$ としたものである。) また右辺は, 通常の L_2 ノルムで測った ξ の Chern 指標と双対相対標準束の Todd 類の積の 4-型式部分を, fiber 積分して B' 上の 2-型式に落としたものである。ここでは, $Ch = 1 + c_1 + \frac{c_1^2}{2!} + \dots$, $Todd = 1 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{12} c_1^2 + \dots$ であるので右辺の積分の中身は

$$\frac{1}{2} c_1(\xi) (c_1(\xi) + c_1(K_{S/B}^{-1})) + \frac{1}{12} c_1(K_{S/B}^{-1})^2$$

となる。特に $\xi = K_{S/B}$ と置くと $R^1 f_* \mathcal{O}(\xi) \simeq \mathcal{O}_{B'}$ であるので, (2.5.1) は

$$c_1(\bigwedge^2 f_* K_{S/B}, \|\cdot\|_Q) = \frac{1}{12} \int_f c_1(K_{S/B}, \|\cdot\|)^2 \quad (2.5.2)$$

となる。(以下通常の L^2 ノルム $\|\cdot\|$ はこれを省略し, Quillen ノルムの時のみ略さず $\|\cdot\|_Q$ とする。) これを用いて次の補題を得る。

補題 2.6

$$\int_{S'} L_1(S', \nabla) = 4 \int_{B'} c_1(\bigwedge^2 f_* K_{S/B}, \|\cdot\|_Q)$$

(証) 境界 S' の近傍では積計量が入っているの2"
 こゝでの測地的曲率は消えている。よつて境界付 Gauss-
 Bonnet の公式より

$$\int_{S'} c_2(S') = \chi_{\text{top}}(S') = (2-2g) \chi_{\text{top}}(B')$$

となる。(χ_{top} は位相的オイラー数) 同様に Gauss-Bonnet

より $\int_{B'} c_1(K_{B'}) = -\chi_{\text{top}}(B')$ であるの2"

$$\begin{aligned} \int_{S^g} c_1(K_{S/B'})^2 &= \int_{S^g} \{ c_1(K_{S'})^2 - 2c_1(K_{S'})c_1(f^*K_{B'}) \} \\ &= \int_{S^g} c_1(K_{S'})^2 + 2(2g-2)\chi_{\text{top}}(B') \end{aligned}$$

となり, =れと (2.5, 2) をあわせ?

$$\int_{S'} L_1 = \frac{1}{3} \int_{S'} c_1(K_{S/B'})^2 = 4 \int_{B'} c_1(\wedge^g f_x'^* K_{S/B'}^* \otimes \mathbb{1}_R)$$

を得る。 Q.E.D.

よつて $(\wedge^g f_x'^* K_{S/B'})^{\otimes 2^{g-2}(2^g+1)}$ の次数を井草保型形式
 の相対 Jacobi 写像による引きもと(が現れていることを
 鑑みれば, 補題 2.6 より 命題 2.4 が得られる。

2.7 γ -generic な $f: S \rightarrow B$ に対する局所符号数の (F_p, f) の具体的計算については, F_p が Lefschetz fiber (つまり node がただ1個の半安定曲線もしくは非特異サイバ) の場合には [Y1] で研究されている。その骨子は次のとおりである。

$\overline{A}_g^{(1)}$ を Mumford [Mu2] による階数1の A_g の部分コンパクト化とする。 $\overline{A}_g^{(1)}$ は A_g の佐武コンパクト化 $A_g^* = A_g \amalg A_{g-1} \amalg \cdots \amalg A_0$ における境界の最大ストラタ A_{g-1} に沿って $A_g \amalg A_{g-1}$ を blow up したものに同型であり, Lefschetz fiber に対応する一般化 Jacobi 多様体を parameterize している。 $\mathcal{O}_{\text{null}}$ の A_g^* での閉包の, 上の blow up による固有像を $\tilde{\mathcal{O}}_{\text{null}}$ とし, $\overline{A}_g^{(1)}$ の境界因子を $\delta = \overline{A}_g^{(1)} \setminus A_g$ とおく。 $\overline{A}_g^{(1)}$ の因子 $(\overline{\chi}_g)$ を

$$(\overline{\chi}_g) := \tilde{\mathcal{O}}_{\text{null}} + 2^{2g-5} \delta$$

によって定義する。(こう置く理由は [Mu2, Theorem 2.10]

参照。) F_p は Lefschetz fiber での, U_p を P の B での小円板近傍とする時, 相対 Jacobi 写像

$$J_{\text{loc}}: U_p \setminus \{P\} \rightarrow A_g \text{ は拡張 } \overline{J}_{\text{loc}}: U_p \rightarrow \overline{A}_g^{(1)}$$

を持つ。この時：

命題 2.8 (compare [Y1]) 上の状況で

$$\sigma(f, F_p) = \frac{1}{2^g - 4(2^g + 1)} \left(\overline{J_{loc}(U_p)} \cdot \overline{(\chi_g)} \right)_p - \# \text{Sing } F_p$$

となる。ここに $(\overline{J_{loc}(U_p)} \cdot \overline{(\chi_g)})_p$ は 曲線 $\overline{J_{loc}(U_p)}$ と 因子 $\overline{(\chi_g)}$ の p での局所交点数を表わす。

ただし [Y1] では上の命題は局所符号数の定義として採用されているものであるが、実は ± 1 で定義した局所符号数に一致している。その証明は命題 2.4 の流れと類似的であるが、今の場合は Bismut-Gillet-Soulé の公式の代わりに、nodes のみを許す退化族の場合にそれを拡張した Bismut-Bost [BB] の公式を用いる。

上の $\sigma(f, F_p)$ の式をもう少し具体的に状況に適応するには [Y1] 中の定理 9.1, 定理 9.3, 系 9.4 などを参照されたい。

なお筆者は、吉川謙一氏とは 1999 年に我が群馬古屋におられた頃、大沢健夫氏を介して知り合った。

以来、氏が東京に移られた後も、折にふれて貴重なお教えを受けている。氏に多大な感謝を捧げたい。

2.9 Lefschetz 族だけでなく、 Y -generic な半安定族に対しても是非とも同様の議論を行ないたいのであるが、それはまだなされていないように思う。

当然考えられるアプローチは、先程の古典的な部分コンパクト化 $Ag^{(1)}$ の代わりに、現代のものとして発達した種々の(部分)コンパクト化を用いることであろう。(その最たるものは [KU].) ただし自然な保型形式から生ずる Θ_{null} 等の境界挙動を知る事が今後には託された課題であろう。

もう一つ、この族を分裂変形させることにより Lefschetz 族の場合に帰着させることが考えられる。この方法では不変量の変形行動を正確にとらえられるかが、焦点となる。

筆者もこれらについて、ほんの少しだけ思うことはあるのであるが、現時点では不明な所である。

さて読者は、もしも半安定族について考察が可能になっても、一般の退化を許す曲線族について

ではまだ話が遠い, と思うかも知れない。これについては
 いやそんな事はない, 大丈夫です と思えることが出来る。
 一般の退化族を, 底変換により半安定環元させた
 場合, この操作に伴う局所符号数の変動を正確
 に記述できるからである。このことは γ -generic な族
 に限らず, いったん Furuta の意味の局所符号数と
 して定式化されたものについては, すべて可能である。
 この formalism が, “群作用を許容する指数定理”
 という大きな道具の適用範囲内にあるからである。
 これを次節で述べてよう。

§3. 半安定環元に伴う局所符号数の変化量

3.1 本節では ファイバーの複素近傍に限定した話
 をする。今までは若干記号の乱用になるが,

$$f: S \rightarrow \Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq \varepsilon\}$$

を種数 g の退化族, つまり S は非特異, f は
 $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ 上 smooth 正則写像で, 一般ファイバーは種数
 g のリーマン面とする。 f は normally minimal つまり F の

被約スキーム F_{red} は正規交叉しており, (-1) 曲線は他成分と3点以上で交わりと仮定する。ここでもし F が半安定ファイバー, ρ より (今の状況では) $F_{red} = F$ であるならば何もしない。そうではなく F が非半安定ファイバーである状況を考える。今,

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\tilde{\rho}} & \tilde{S} \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ \Delta & \xleftarrow{\rho} & \tilde{\Delta} \end{array} \quad (3.1.1)$$

を f の半安定環元とする。([DM], [BPV]) ρ は原点のみで *totally ramify* する次数 n の円板間の巡回被覆, \tilde{S} は $S \times_{\Delta} \tilde{\Delta}$ の正規化の持つ巡回高特異点の解消空間である。 \tilde{f} の中心ファイバー $\tilde{F} = \tilde{f}^{-1}(0)$ は半安定である。被覆次数 n は二の様な条件を満たす最小値にとらわれていると仮定する。 ∇ を S 上の1つの線形接続として固定する。この時, σ の局所符号数

$$\sigma(f, F) = \text{sign } S^{-1}(\partial S, \nabla_{\partial S}), \quad \sigma(\tilde{f}, \tilde{F}) = \text{sign } \tilde{S}^{-1}(\partial \tilde{S}, \nabla_{\partial \tilde{S}})$$

が考えられる。(= $\nabla_{\partial \tilde{S}}$ は ∇ と ρ から自然に誘導される接続とする。) この時,

$$\text{def}(f, F) := \sigma(f, F) - \frac{1}{n} \sigma(\tilde{f}, \tilde{F})$$

と置いて, これを半安定不足数 (semi-stable defect) とでも呼んでおこう。本節では $\text{def}(f, F)$ を f の持つ位相モドロー情報 (Nielsen-松本-Montesinos' data [MM]) を用いて具体的に記述する。

このことを考える動機は 2.9 節でも少し触れたが, もう少し概括的に述べると次のとおりである。一般に局所符号数の問題の困難性は,

- (i) ファイバー (f, F) の位相構造から来る複雑さ,
- (ii) (f, F) の代数幾何的“神妙さ”

が複合して生じていると考えられる。(i) は f の持つ位相モドローの複雑さと言い換えることもできるが, この部分の“寄与”を取り除いて, 今後の研究の比重を (ii) の部分に集約させたいと思うわけである。少なくとも本節の結果より, 以後半安定族についてのみ考察すればよいことになる。

ちなみに (ii) の困難性の発見は, 歴史的には今野-宏氏 [K01] による, 非超楕円の種数 3 の族に混在する非特異超楕円のファイバーが与える代数曲面の大域不変量への“交効果”の観察がその

出発点になっている。(このことは [AK] [AE] でも解説されている。) また, Y -generic な族については, 一般化 Jacobi 多様体のモジュライ空間 λ のモジュライ多像と θ_{null} の閉包の切り合い具合の問題と語るであろう。

3.2 目的のために 境界付同変符号数定理 ([AS], [HZ], [APS]) を用いるので, この方面の用語を準備しつつ, アイデアのあらすじを述べる。

図式 (3.1.1) を考える。この時, \tilde{S} には巡回群 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が正則に作用し, 商空間 \tilde{S}/G の特異点解消を行ない, その normally minimal model をとったものが S である。今,

$$\hat{H}^2 := \text{Im} \{ H^2(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}(\mathbb{R})) \rightarrow H^2(\tilde{S}; \mathbb{R}) \}$$
と置くと, カップ積から誘導される交叉型式は \hat{H}^2 上 perfect pairing であるが, これの正及び負の固有空間への直和分解を $\hat{H}^2 = H_+ \oplus H_-$ とする。

各 $g \in G$ に対して,

$$\text{sign}(g, \tilde{S}) = \text{Tr}(g|_{H_+}) - \text{Tr}(g|_{H_-})$$

と置く。Atiyah - Singer [AS] で定義された g の

固定点集合への作用により規定される特性類
 $L(g, \tilde{S})$ は, \tilde{S} が 4次元故,

$$L(g, \tilde{S}) = - \sum_x \cot\left(\frac{1}{2} \alpha_{x,g}\right) \cot\left(\frac{1}{2} \beta_{x,g}\right) \\ + \sum_Y \operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2} \theta_{Y,g}\right) \cdot Y^2 \quad (3.2.1)$$

の形をしている。二に x は g 作用に関する孤立固定点集合を動き, 接空間 $T_{x, \tilde{S}}$ への g 作用の固有値を $e^{i\alpha_{x,g}}$, $e^{i\beta_{x,g}}$ としている。また Y は g 作用による固定複素曲線 (必然的に S^2) を動き, 法束 $N_{Y, \tilde{S}}$ への g 作用の固有値を $e^{i\theta_{Y,g}}$ としている。今, g 作用付の符号不足数 (HZ) [APS] を $\eta(g, \partial\tilde{S}, \nabla_{\partial\tilde{S}})$ とすれば,

$$\operatorname{sign}(g, \tilde{S}) = L(g, \tilde{S}) + \eta(g, \partial\tilde{S}, \nabla_{\partial\tilde{S}})$$

である。一方, Hirzebruch-Zagier [HZ] pp. 72~75 にあるように Conner-Floyd [CF] の trace cobordism theorem を用いて^(注)

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \eta(g, \partial\tilde{S}, \nabla_{\partial\tilde{S}}) = \eta(\partial S, \nabla_{\partial S}) \quad (3.2.2)$$

(注) 境界の近傍に積計量が入っており, その計量に関する Levi-Civita 接続を考慮してすれば, 符号不足数は Atiyah-Palodi-Singer [APS, I] のエータ不変量に一致しており, (3.2.2) は [APS, II] にある同変公式から従う。(Atiyah [OS] に二の議論がある。) 二はエータ不変量を表に出すことは避け, 元来の符号不足数の範疇で議論している。

を得る。一方 \tilde{S}/G を有理ホモジ-多様体としての交叉型式の符号数を $\text{sign}(\tilde{S}/G)$ とすると,

$$\text{sign}(\tilde{S}/G) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{sign}(g, \tilde{S})$$

となる。(4. [HZ] p.31) より

$$o(f, F) = (\text{sign} S - \text{sign} \tilde{S}/G) + \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \{ \text{sign}(g, \tilde{S}) - \eta(g, \partial \tilde{S}, \mathbb{R} \tilde{S}) \}$$

となる。(3.2.1)

$$\text{def}(f, F) = (\text{sign} S - \text{sign} \tilde{S}/G) + \frac{1}{n} \sum_{g \in \text{id}} L(g, \tilde{S}) \quad \text{--- (3.2.3)}$$

を得る。(3.2.3)式の第1項は解析空間 \tilde{S}/G の特異点解消データに依存して決まる。また同式の第2項は、(3.2.1)より G の各元の固定点集合の近傍への作用の仕方に依存して決まる。

実はこれから第1, 第2項とも, 退化 f の位相トポロジ-情報を用いて具体的に書き下すことができるのである。これが可能な理由は, 高村茂氏 [Ta2] によつて, G の \tilde{S} への作用の仕方, \tilde{S}/G の持つ商特異点の分類及びその解消データと, Nielsen-松本-Montesinos' data 及び松本-Montesinos の一般商空間の構成アルゴリズム [MM] との対応関係が明確になった事による。

3.3 モノドロミーの用語を準備する。 f の位相モノドロミーの代表元となっているリーマン面 Σ_g の位相的自己同型写像を $\mu = M_f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ とする。 μ は負型擬周期写像という、写像類群の中の特別な元になっている。ここで、Nielsen [N], 松本-Montesinos [MM] による、この元の数値的特徴付りを思い出す。(解説記事 [Ma] も参照。)

Isotopy を法として、 μ は次のように記述される。 μ の認容単純閉曲線系 C 及びその補空間である body 部 $B = \Sigma_g \setminus C$ の連結成分への分解をそれぞれ

$$C = \coprod_{1 \leq i \leq s} C_i, \quad B = \coprod_{1 \leq j \leq l} B_j$$

とする。 n を μ の周期とする。つまり n は $\mu|_B^n = \text{id}_B$ となる最小の自然数である。(3.1 節で述べた ρ の写像度 n に一致しているためこの記号を用いている。)

各 B_j に対し自然数 $n(B_j)$ を、集合として

$$\mu^{n(B_j)}(B_j) = B_j$$

が満たされる最小数として定義する。

また B_j の境界になっている C の成分の中で、 B_j と異なる他の連結成分の境界にもなっているような単純閉曲線の個数を $c(B_j)$ と書く。

B 内の重複点 (つまり $\langle \mu \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の作用に関する)

る非自明な isotropy 群を持つ点) の集合を $\mathcal{P}(B)$ とする。各 $p \in \mathcal{P}(B)$ に対して $(m(p), \lambda(p), \sigma(p))$ を p の valency とする。整数 $\delta(p)$ を $0 < \delta(p) < \lambda(p)$, $\delta(p)\sigma(p) \equiv 1 \pmod{\lambda(p)}$ によって定める。 $\mu^{m(p)}$ は、点 p を固定し、その円板近傍を適当な parametrization に関して角度 $2\pi \delta(p)/\lambda(p)$ だけ回転させる。

次に cut curve C_i の annulus 近傍 $A(C_i)$ を考える。 $A(C_i)$ は 2つの境界 $C_i^{(1)}$ と $C_i^{(2)}$ を持っている。 μ の C_i の valency をそれぞれ $(m(C_i), \lambda(C_i^{(k)}), \sigma(C_i^{(k)}))$ ($k=1, 2$) とする。整数 $\delta(C_i^{(k)})$ を $0 < \delta(C_i^{(k)}) < \lambda(C_i^{(k)})$, $\delta(C_i^{(k)})\sigma(C_i^{(k)}) \equiv 1 \pmod{\lambda(C_i^{(k)})}$ によって定める。 $\mu^{m(C_i)}$ は $C_i^{(k)}$ を集合として固定し、annulus の外側からの向き付けによる適当な parametrization に関して、 $C_i^{(k)}$ を角度 $2\pi \delta(C_i^{(k)})/\lambda(C_i^{(k)})$ だけ回転させる。 $s(C_i)$ を C_i における screw number とし、

$$K(C_i) = -s(C_i) - \frac{\delta(C_i^{(1)})}{\lambda(C_i^{(1)})} - \frac{\delta(C_i^{(2)})}{\lambda(C_i^{(2)})}$$

とおく。 $K(C_i)$ は -1 以上の整数である。また、

$$c(C_i) = \text{g.c.d.}(\lambda(C_i^{(1)}), \lambda(C_i^{(2)})), \quad \tilde{\lambda}(C_i^{(k)}) = \lambda(C_i^{(k)})/c(C_i) \quad (k=1, 2),$$

$$\beta(C_i) = \text{l.c.m.}(\lambda(C_i^{(1)}), \lambda(C_i^{(2)})) = \tilde{\lambda}(C_i^{(1)}) \tilde{\lambda}(C_i^{(2)}) c(C_i)$$

と置く。写像 $\mu^{m(C_i)\beta(C_i)}$ の $A(C_i)$ の両側の 2つの

body 成分への制限は小恒等写像となる。また $m(C_i)\beta(C_i)$ はこのような性質を満たす最小の自然数である。

C の成分のうち, non-amphidrome curves の集合を N_{amp} と書く。また amphidrome curves の集合を A_{mp} と書く。

もしも C_i が amphidrome curve であれば, $m(C_i)$ は偶数であって $\mu^{\frac{m(C_i)}{2}}(C_i^{(1)}) = C_i^{(2)}$ となる。さらに $\lambda(C_i^{(1)}) = \lambda(C_i^{(2)}) = \beta(C_i)$, $\delta(C_i^{(1)}) = \delta(C_i^{(2)})$ であるので, これらそれぞれ $\lambda(C_i)$, $\delta(C_i)$ と書く。また, この時は $k(C_i) \geq 0$ である。

写像 μ による, 木谷本-Montesinos の一般化商空間を $\Sigma_g/\langle \mu \rangle$ と書く。 $p \in \mathbb{P}(B)$ での valency から定まる $\Sigma_g/\langle \mu \rangle$ 上の対応する \mathbb{P}^1 -tree の長さを $T\left(\frac{\sigma(p)}{\tau(p)}\right)$ と書く。また $A(C_i)$ での両側の valency と screw number から定まる $\Sigma_g/\langle \mu \rangle$ 上の対応する \mathbb{P}^1 -tree の長さを $T(C_i) := T\left(\frac{\sigma(C_i^{(1)})}{\lambda(C_i^{(1)})}, \frac{\sigma(C_i^{(2)})}{\lambda(C_i^{(2)})}, k(C_i)\right)$ と書く。ここで body 部の高にあたる $\Sigma_g/\langle \mu \rangle$ の成分はこの長さにカウントされないことを注意しておく。例えば,

$$T\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{7}, k\right) = \begin{cases} 5 & \dots \text{ if } k = -1 \\ k+7 & \dots \text{ if } k \geq 0 \end{cases}$$

であるとは、下の一般商空間の部分グラフから明らかである。(=は円は円板, 半円は円板, その中の数字は重複度を示す.)

$$\overline{6} \textcircled{5} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \quad (K=-1 \text{ のとき})$$

$$\overline{6} \textcircled{5} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \cdots \underbrace{\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}}_{K+1 \text{ 本}} \textcircled{4} \quad (K \geq 0 \text{ のとき})$$

さて、半安定環元の図式 (3.1.1) を与える写像 ρ の被覆次数の最小値 m が、正に位相トポロジー写像 μ_f の周期に一致していることはすでに示した。半安定族 $\tilde{f}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Delta}$ の位相トポロジー μ_f は $(\mu_f)^n$ に等しく、また擬周期写像としての μ_f の認容単純閉曲線系は C に一致する。さらに μ_f は body 部 $\Sigma_g \setminus C$ 上恒等写像に isotopic であり、annulus $A(C_i)$ 上右手整数 Dehn twist を与えるが、その回数を $d(C_i)$ とおく。この時、もし C_i が non-amphidrome ならば

$$d(C_i) = \delta(C_i^{(1)}) \tilde{\lambda}(C_i^{(2)}) + \delta(C_i^{(2)}) \tilde{\lambda}(C_i^{(1)}) + K(C_i) \beta(C_i)$$

となり、また C_i が amphidrome ならば

$$d(C_i) = 2\delta(C_i) + 2K(C_i)\lambda(C_i)$$

となる。

以上で「モドロニー」の用語の準備は整ったが、
 もう一つ、Dirzebruch-Zagier [HZ] にあるように、
 同変符号数定理を応用する際には（少しだけ
 一般化された）Dedekind 和の記号を用意してお
 くことが有効である。一般に自然数 $N, a_1,$
 a_2 に対して、 $c_b = \gcd(N, a_b)$, $a'_b = a_b / c_b$,
 $N_b = N / c_b$ ($b=1, 2$) とし、 $c = \gcd(N_1, N_2)$ とおく。
 c と a'_b ($b=1, 2$) は互いに素である。
 この時、

$$S(N; a_1, a_2) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{c-1} \left(\left(\frac{a'_1 j}{c} \right) \right) \left(\left(\frac{a'_2 j}{c} \right) \right) & \text{if } c \geq 2 \\ 0 & \text{if } c = 1 \end{cases}$$

と定義する。もしも N と a_b ($b=1, 2$) が互いに素ならば $S(N; a_1, a_2)$ は通常の Dedekind 和である。（cf. [RG]）

さて、本節の主張は次の定理である：

定理 3.4

$$\begin{aligned}
\text{def}(f, F) &= -\frac{1}{3n} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \left\{ \left(\frac{n}{n(B_j)} \right)^2 - 1 \right\} c(B_j) \\
&- \sum_{P \in \mathbb{P}(B)} \left\{ \frac{4\lambda(P) \mathcal{S}(\lambda(P) : \delta(P), 1)}{n} + T\left(\frac{\sigma(P)}{\lambda(P)}\right) \right\} \\
&- \frac{2}{3n} \sum_{1 \leq i \leq s} \sum_{k=1}^{d(C_i)-1} \left\{ \gcd(\beta(C_i), \delta(C_i^{(1)}) \tilde{\lambda}(C_i^{(2)}) - k)^2 - 1 \right\} \\
&- \frac{4}{n} \sum_{1 \leq i \leq s} \sum_{k=0}^{d(C_i)-1} \beta(C_i) \mathcal{S}(\beta(C_i) : \delta(C_i^{(1)}) \tilde{\lambda}(C_i^{(2)}) - k, -\delta(C_i^{(1)}) \tilde{\lambda}(C_i^{(2)}) + k + 1) \\
&- \sum_{C_i \in \text{Nump}} \left\{ T(C_i) - d(C_i) + 1 \right\} - \sum_{C_i \in \text{Amp}} \left\{ T(C_i) - \frac{d(C_i)}{2} + 3 \right\}
\end{aligned}$$

証明は、まず (3.2.3) 式の右辺は、[HZ] pp.176~181 の議論にあるように Rademacher の公式 [RG] 等を用いて Dedekind-和等を用いる形に変形される。それを先に解いた高村 [Ta2] の結果を用いるから、丹念に位相エントロピー情報によって書き下していくことにより得られる。

なお、この定理の種数 3 の曲線族への応用については石坂 [I] を参照されたい。

ここでは本定理の証明についてこれ以上の説明をすることは避け、いささか私事になって恐縮であるが、

これを考えるに到った経緯を有体に述べて、その換わりとしたい。

曲系族 $f: S \rightarrow B$ を持つ一般型代数曲面 S の基本不変量 $(K_S^2, \chi(\mathcal{O}_S))$ の存在域は、 f の一般ファイバーの持つ代数幾何的“特殊性”に強く影響される。また、これらの不変量がどのファイバー身に“局在化”し、且つその地理的下限からのズレを測る Horikawa 指数をどう計算するかは、現在の代数曲面論が抱える基本的問題の一つのように筆者には感じられる。

これに対する有力なアプローチの一つとして、大雑把に言って

Step 1 f が (半)安定族の時に、何かの moduli 理論を経由して、何かを成す。

Step 2 (半)安定環元における不変量の変化を正石確に測って、Step 1 と合わせて何かを言う。

という手段が考えられる。Step 1 については、Cornalba-Harris [CH] や 森脇三孝氏 [Mo] のお仕事、Step 2 については Sheng-Li Tan 氏 [Tan] のお仕事等がその典型例と言えよう。^(注) しかし不変量の局在化の詳細な研究という観点からすれば、今は始動期の段階で多くの問題が将来に託されていると感ぜられる。本稿も本質的にこの

(注) 勿論この路線以外にも有力なものもあり、その最たるものは現時点でのこの方面の代表的成果と云える、今野一宏氏 [Ko2] による相対 Koszul 複体を用いる方法であろうけれど。

路線上に ありるのであるが、ただし k_s^2 や $\chi(O_s)$ についてではなく、 $\text{Sign } S$ についてそれを試みようというわけである。その理由は、*dirigebrauch* の公式等を通じて後者と前者が直接繋がっているのみならず、この不変量だと位相幾何の結果を直接取り入れられるという利点もある。しかしそのような気持ちになるまでには、筆者にとっても多大な時間を要した。

元来、 $\text{Sign } S$ の局在化を扱うという発想自体、代数幾何出身の我々には浮かばない事と思う。筆者にとって局所符号数の概念を初めて知ったのは、1994年北大での「第1回リーマン面と関連する位相幾何学」研究集会における、種数2の *Lefschetz* 族を扱った松本幸夫氏の講演においてである。氏の与えた局所符号数とその値 $\sigma(\odot) = -\frac{1}{5}$, $\sigma(\ominus) = -\frac{3}{5}$ は、これが分数不変量であった事とあって、当時の筆者には誠に不思議というか、異様に思われた。

その不思議さをなんとか我々の言葉で解釈しようとしたのが $[AA, I, \text{号数}]$ の動機で、(考えたのは) 1997年頃と思う。 $[AA]$ は超楕円的な場合のみであるが、一般の場合でも *Hirakawa* 指数の定式化と局所符号数の定式化には一定の関係 ($[AK, (2.1.3)$ 式] 等) があり、これを通じて局所符号数の概念の重要性を認識していったのである。

1994年の北大の集会に話をもちますが、ここでのもう一つの大きな収穫は3.3節でも登場した松本-Montesinos理論 [MM] の存在を、松本氏自身より教わった事である。[MM] を、これも自分の立場で解釈しようと躰いた。1999年に、ハケ岳の研究集会の報告 [A1] を書いた七頁に、安定曲線族への巡回群作用による商空間の解消空間と、松本-Montesinos の一般商空間の対応付けが、何人の少(だけわかりろくに感じてきた。しかしその矢先(数カ月後くらい?)に高村茂氏よりプレプリント [Ta1] ([Ta2] の前身になったもので約2510-20くらいの [Ta2] よりは格段に短い論文である) が送られてきて、そこにそれが書かれてあった。

このような場合、数学者にとって研究方向をすぐに転換するのは難かしい事かも知れない。筆者の場合も例外ではなく、むしろ [Ta1] の応用を探ること、特に当明うららと問題意識にあった、先の Step 2 を (f, F) に対して成すことに向けようとした。しかし、一体どんな方法が可能なのか？

その七頁、古田幹雄氏を中心として主催されている指数定理に関連する第2回の城崎での研究集会の案内が送られてきた。その中に上正明氏による群作用を許容する指数定理に関する連続講演があった。当時、筆者のこの方面の知識は皆無であったのであるが、「群作用」という言葉に引かれ、

出掛けてみることにした。上氏の講演は淡々と進み、むしろ朴言内ささえ感じさせるものであったが、筆者の心には染み入るものがあった。探していたものがここにあったのだ！ 域崎からの帰路は幸せな気持ちであった。こうして、3節で述べたおぼろの道具立てが、自分の手の中に揃ったのだ。

同変符号数定理は筆者にとって始めて使う道具であり、不安であったのだが次のように計算を進めた。種数2の退化とその半安定環元の例を沢山作り、Horikawa 指数を経由して局所符号数を求め、この場合の $\text{def}(X, F)$ の値を先に求めておいた。そしてそれに“合う”ように、使い方を習得していったのである。ちょうど受験生が問題の答を見ながら、解き方を学ぶ体である――。

こんな具合にして定理にたどり着いた。

参考文献

- [AA] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of hyperelliptic pencils I, *Tohoku Math. J.* **53** (2001), 369–394; II, to appear in *Nagoya Math. J.*
- [As1] T. Ashikaga, 代数曲線の退化の性質, *Hodge 理論・Log 幾何・退化研究集会報告集* (朝倉・荒川・白井編), pp. 104–136, 1999.
- [As2] T. Ashikaga, Local signature of generic pencils of curves (tentative), in preparation.

- [AE] T. Ashikaga and H. Endo, リーマン面の退化族の諸相, 数学 (掲載予定).
- [AK] T. Ashikaga and K. Konno, Global and local properties of pencils of algebraic curves, in *Algebraic Geometry 2000 Azumino*, ed. by S. Usui et al., Adv. St. in Pure Math. **36** (2002), 1–49.
- [At] M. Atiyah, The logarithm of Dedekind η -function, Math. Ann. **278** (1987), 335–380.
- [APS] M. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69: II, *ibid.* **78** (1975), 405–432: III, *ibid.* **79** (1976), 71–99.
- [AS] M. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators III, Ann. of Math. **87** (1968), 546–604.
- [BPF] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag 1984.
- [BB] J. M. Bismut and J. B. Bost, Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes, Acta. Math. **165** (1990), 1–103.
- [BGS] J. M. Bismut, H. Gillet and C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, Comm. Math. Phys. **115** (1988), 49–78: II, *ibid.* **115** (1988), 79–126: III, *ibid.* **115** (1988), 301–351.
- [CF] P. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Springer, 1964.
- [CH] M. Cornalba and J. Harris, Divisor classes associated to families of stable varieties with application to the moduli space of curves, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **21** (1988), 455–475
- [DM] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 75–110.
- [E] H. Endo, Meyer’s signature cocycle and hyperelliptic fibrations (with Appendix written by T. Terasoma), Math. Ann. **316** (2000), 237–257.
- [Fr] D. S. Freed, Determinant line bundles, *Mathematical Aspects of String Theory*, pp. 189–238, ed. by S. T. Yau, World Scientific, 1987.
- [Fu1] M. Furuta, 曲面束と局所符号数, リーマン面に関連する位相幾何学研究集会報告集 (河澄編), pp. 47–53, 1999.
- [Fu2] M. Furuta, 曲面束と局所符号数, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集, pp. 94–103, 2000.
- [Fu3] M. Furuta, 指数定理 1, 2, 岩波書店, 2002.
- [Hi] F. Hirzebruch, *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, Springer, 1956.

- [HZ] F. Hirzebruch and D. B. Zagier, *The Atiyah-Singer index theorem and elementary number theory*, Publish or Perish, 1974.
- [Ho] E. Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, In: *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, a volume dedicated to K. Kodaira, pp. 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press, 1977
- [I] M. Ishizaka, On Horikawa index of families of genus three curves with periodic monodromy, Preprint.
- [KU] K. Kato and S. Usui, Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Preprint.
- [KM] F. F. Knudsen and D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves I, *Math. Scand.* **39** (1976), 19–55.
- [Ko1] K. Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 6$, *Math. Ann.* **290** (1991), 77–107
- [Ko2] K. Konno, Clifford index and the slope of fibered surfaces, *J. Alg. Geom.* **8** (1999), 207–220
- [Ma1] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach -, in: *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on "Topology and Teichmüller Spaces"*, pp. 123–148, World Scientific, Singapore, 1996.
- [Ma2] Y. Matsumoto, A topological classification of singular fibers of genus ≥ 2 , 退化, 被覆, 特異点の代数幾何とトポロジー研究集会報告集 (足利-尾形編), pp. 86–104, 1996.
- [MM] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, Pseudo-periodic maps and degenerations of Riemann surfaces I, II, Preprints, 1991/1992.
- [Mo] A. Moriwaki, *A sharp slope inequality for general stable fibrations of curves*, *J. reine. angew. math.* **480** (1996), 177–195
- [Mu1] D. Mumford, *Curves and Their Jacobians*, Univ. of Michigan Press, 1975.
- [Mu2] D. Mumford, On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety, *Lect. Notes in Math* **997** (1983), 348–375.
- [N] J. Nielsen, Surface transformation classes of algebraically finite type, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **21** (1944), pp.3–89. English translation: in *Collected Papers 2*, Birkhäuser, 1986.
- [RS] D. B. Ray and I. M. Singer, Analytic torsion for complex manifolds, *Ann. of Math.* **98** (1973), 154–177.
- [OS] S. Ogata and Ma. Saito, Signature defect and eta functions of degenerations of abelian varieties, *Japan J. Math.* **23** (1997), 319–364.

- [Q] D. Quillen, Determinants of Cauchy-Riemann operators on a Riemann surface, *Funct. Anal. Appl.* **19** (1985), 31–34.
- [RG] H. Rademacher and E. Grossward, *Dedekind Sums*, Carus Mathematical Monograph No. 16, MAA, 1972.
- [Tak1] S. Takamura, Cyclic quotient constructions of degenerations of complex curves, Preprint, 1999.
- [Tak2] S. Takamura, Towards the classification of atoms of degenerations II, (Linearization of degenerations of complex curves), RIMS Preprint 1344 (2001).
- [Tan] S. L. Tan, On the invariants of base changes of pencils of curves I, *Manuscripta Math.* **84** (1994), 225–244; II, *Math. Z.* **222** (1996), 655–676.
- [Te1] T. Terasoma, Degenerations of curves and analytic deformations, Preprint 1998.
- [Te2] T. Terasoma, An appendix to Endo’s paper, *Math. Ann.* **316** (2000), 355–357.
- [U] K. Ueno, Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata* (1987), pp. 749–770, Kinokuniya.
- [Y1] K. Yoshikawa, A local signature for generic 1-parameter deformation germs of a complex curve, 退化, 被覆, 特異点の代数幾何とトポロジー研究集会報告集 (足利-尾形-今野編), pp. 188–200, 2000.
- [Y2] K. Yoshikawa, 解析的トーシオンとモジュライ空間上の保型形式, *数学* **52** (2000), 142–158.