

On Mordell-Weil lattices of bielliptic fibrations on rational surfaces

大阪大学大学院理学研究科 北川 真也 (Shinya Kitagawa)
(Graduate School of Science, Osaka University)

0 はじめに

この稿は講演に基づき, 同じ題目で投稿中の論文を紹介している. 随所で証明を省いている一方で, 主結果の証明のアイデアと密接に関わる例 (cf. 例 2.4, 2.9) を紹介している.

基礎体は複素数体 \mathbb{C} とする. X は非特異有理曲面とする. $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバー F の種数が $g \geq 1$ で, section をもつ相対極小な fibration とする. K を \mathbb{P}^1 の有理関数体, J_F を F の Jacobi 多様体とする. J_F の K -有理点のなす群 $J_F(K)$ を φ の Mordell-Weil 群とよぶ. $J_F(K)$ は有限生成で, $r := \text{rank} J_F(K)$ を φ の Mordell-Weil 階数とよぶ. 文献 [7] と [8], [9] で, 塩田氏は (より一般の設定のもとで) $J_F(K)$ に対して Mordell-Weil 格子の理論を導入・展開した. 特に有理楕円曲面の Mordell-Weil 格子の理論において, 最大階数をとる (E_8 と同型な) Mordell-Weil 格子は重要な役割を演じる.

文献 [6] で $g \geq 2$ の fibration の場合が考察されている. このとき $r \leq 4g + 4$ であり, その等号が成立する時は超楕円曲線の fibration となる. $g \geq 3$ の非超楕円曲線の fibration の場合は文献 [5] にある. このとき $r \leq 3g + 6$ であり, 等号が成立する時は平面 5 次曲線か trigonal 曲線 (したがって Clifford 指数 1) の fibration となる. 以上の文献では対応する Mordell-Weil 格子の構造も完全に決定されている.

楕円曲線に 2 重被覆がとれる曲線を bielliptic 曲線とよぶ. F が bielliptic 曲線のときの φ を bielliptic fibration とよぶ. この稿では φ が種数 $g \geq 6$ の bielliptic fibration の場合を考察する. まず初めに次の結果を得る:

主定理 1 (cf. 定理 1.4). X は非特異有理曲面で, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバーの種数 $g \geq 6$ で, section をもつ相対極小な bielliptic fibration とする. このとき

$$r \leq 2g + 10.$$

g が偶数のとき $n = 1$, 奇数のときは $n = 0$ とおく. n 次 Hirzebruch 曲面 Σ_n 上で, 種数 $g - 4$ ($g \geq 6$) の超楕円曲線に沿って分岐する有限 2 重被覆によって得られる非特異有理曲面を V_{16} とする. Σ_n の標準因子の被覆による引き戻しのマイナスで作られる完備線型系の, 十分一般の部分ペンシルを \mathcal{L}_{16} とする. \mathcal{L}_{16} は 16 個の固定点を持つ. この 16 個の固定点での V_{16} の blow-up により得る fibration を $\theta : V \rightarrow \mathbb{P}^1$ とする. このとき V は非特異有理曲面で, $\theta : V \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバーの種数が g で, section をもつ相対極小な bielliptic fibration である. θ の Mordell-Weil 階数は $2g + 10$ (最大) である. 以上の構成による fibration θ を $(16; g; n)$ 型とよぶ. もう一つ別の例を与える. \mathbb{P}^2 の一般位置にある 7 点による blow-up で得られる曲面を W_{18} とする. W_{18} の標準因子の (-3) 倍で作られる完備線型系の, 十分一般の部分ペンシルを \mathcal{L}_{18} とする. \mathcal{L}_{18} は 18 個の固定点を持つ. $(16; g; n)$ 型の時と同様にして, この固定点での W_{18} の blow-up により $\vartheta : W \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得る. このとき ϑ は一般ファイバーが種数 7 の bielliptic 曲線であり, Mordell-Weil 階数は最大をとる. 以上の構成による fibration ϑ を $(18; 7)$ 型とよぶ (cf. 命題 2.11).

主定理 2 (cf. 定理 2.3, 3.1). X は非特異有理曲面で, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバーの種数 $g \geq 6$ で, section をもつ相対極小な bielliptic fibration とする. φ の Mordell-Weil 階数は最大, つまり $2g + 10$ とする. このとき φ は $(16; g; n)$ 型または $(18; 7)$ 型である.

最後に, 最大階数の Mordell-Weil 格子の構造は次のように決定できる:

主定理 3 (cf. 命題 4.2, 4.5). $(16; g; n)$ 型の fibration の Mordell-Weil 格子は $2g + 10$ 次元の正定値 unimodular 奇格子であり, g の偶奇に応じて図 4.2 または図 4.3 の Dynkin 図形を与える. $(18; 7)$ 型の fibration の Mordell-Weil 格子は, Niemeier による格子の分類で “ ζ ” と名づけられた, 24 次元の正定値 unimodular 偶格子である (cf. [2, Ch.XVI, §1]).

主定理の証明のアイデアを説明する. 主定理 1 は, 塩田氏の Mordell-Weil 格子に対する基本的な結果と, Barja 氏の bielliptic fibration に対する slope 不等式 (cf. [1]) から分かる. 我々の設定で slope 不等式をさらに考察すると, 等号 $r = 2g + 10$ が成立するときは相対極小な有理楕円曲面への有限 2 重被覆がとれる. 主定理 2 はこの有限 2 重被覆の解析からしたがう. より精確には, 分岐因子の平面曲線モデルを決定し

(cf. 定理 2.3), 各型の fibration の具体的構成を与える (cf. 定理 3.1). 主定理 3 を示すために, V_{16} と W_{18} から, それぞれ Hirzebruch 曲面と \mathbb{P}^2 への自然な双有理射をとり, Néron-Severi 群 $\text{NS}(V)$ 及び $\text{NS}(W)$ の明白な記述を与える. このとき V 及び W の因子の交点形式の計算から, 最大階数をとる Mordell-Weil 格子の構造を決定できる.

1 Mordell-Weil 格子と bielliptic fibration

本稿で必要な Mordell-Weil 格子の基本的記号と結果を [7] と [8], [9] に基づいて簡潔に復習する. この稿で X は非特異有理曲面で, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバー F の種数が $g \geq 1$ で, 相対極小な fibration とする. φ は少なくとも一つの section をもち, これを零切断 (O) とする. K を \mathbb{P}^1 の有理関数体, J_F を F の Jacobi 多様体とする. その K -有理点のなす群 $J_F(K)$ を Mordell-Weil 群とよぶ. ここで X が有理曲面なので $J_F(K)$ は有限生成 Abel 群である. $r := \text{rank} J_F(K)$ を Mordell-Weil 階数とよぶ. (O) と φ のファイバーのすべての既約成分によって生成される $\text{NS}(X)$ の部分群を T とする. F の K -有理点のなす群と φ の section の自然な対応から次を得る:

$$J_F(K) \simeq \text{NS}(X)/T. \quad (1.1)$$

$\text{NS}(X)$ の階数を $\rho(X)$ で表す. (1.1) より直ちに次の定理がしたがう:

定理 1.1.

$$r \leq \rho(X) - 2.$$

等号成立は φ のすべてのファイバーが既約のとき, かつそのときに限る.

$\text{NS}(X)$ を交点形式の (-1) 倍によって格子 $\text{NS}(X)^-$ とみなす. 同様に T を $\text{NS}(X)^-$ の部分格子 T^- とみなして自明格子とよび, T^- の直交補格子 L^- を本質的部分格子とよぶ. (1.1) によって $J_F(K)/J_F(K)_{\text{tor}}$ にも対称双線型形式 \langle, \rangle が自然に定義される. この $(J_F(K)/J_F(K)_{\text{tor}}, \langle, \rangle)$ を φ の Mordell-Weil 格子とよぶ. 次の結果が成立する:

定理 1.2. φ のすべてのファイバーは既約とする. このとき φ の Mordell-Weil 格子は L^- に同型, 特に $r = \rho(X) - 2$ の正定値 unimodular 格子である.

非特異曲線 C が楕円曲線への 2 重被覆をもつとき, C を bielliptic 曲線とよぶ. 一般ファイバー F が bielliptic 曲線するとき, φ を bielliptic fibration とよぶ. 文献 [1] の Barja 氏による (より一般の設定の) bielliptic fibration に対する slope 不等式の結果を, 今回の (X が有理曲面である) 場合に適用すると次の結果を得る:

補題 1.3. X は非特異有理曲面で, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバーの種数 $g \geq 6$ の, section をもつ相対極小な bielliptic fibration とする. このとき

$$K_X^2 \geq -2g - 2.$$

さらに $K_X^2 = -2g - 2$ かつ φ のすべてのファイバーが既約ならば, 非特異有理極小楕円曲面 $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ と有限 2 重被覆 $\varpi : X \rightarrow S$ が存在して $\varphi = \phi \circ \varpi$ をみたく (cf. 図 1.1).

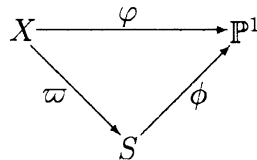


図 1.1.

X は有理曲面なので, その Picard 数 $\rho(X)$ は第 2 Betti 数 $b_2(X)$ に等しい. さらに $b_1(X) = 2q(X) = 0$ かつ $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$. だから Noether の公式から $\rho(X) = 10 - K_X^2$. したがって定理 1.1 と補題 1.3 を合わせて次を得る:

定理 1.4. 補題 1.3 と同じ設定とする. φ の Mordell-Weil 階数を r とおく. このとき

$$r \leq 2g + 10.$$

等号成立は $K_X^2 = -2g - 2$ かつ φ のすべてのファイバーが既約であるとき, かつそのときに限る.

2 最大 Mordell-Weil 階数の fibration

X は非特異有理曲面で, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバー F の種数が $g \geq 6$ で, section をもつ相対極小な bielliptic fibration とする. この章では φ の Mordell-Weil

階数 r は最大, i.e., $r = 2g + 10$, と仮定して φ の構造を解析する. 以降の稿で次の記号を用いる:

$$n = n(g) = \begin{cases} 1 & g \text{ が偶数のとき,} \\ 0 & g \text{ が奇数のとき,} \end{cases}$$

として, $pr : \Sigma_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \rightarrow \mathbb{P}^1$ を次数 n の Hirzebruch 曲面とおき, さらに C_n を無限遠切断曲線, f_n を pr のファイバーとする.

補題 2.1. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は種数 $g \geq 6$ の bielliptic fibration で, その Mordell-Weil 階数が最大をとるとする. $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を 補題 1.3 の非特異有理極小楕円曲面, 同じく $\varpi : X \rightarrow S$ を有限 2 重被覆とする. このとき $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は section をもち, 次の条件をみたす:

- (a) S は \mathbb{P}^2 の 9 点の blowing up より得られる.
- (b) 楕円 fibration ϕ は S の anti-canonical map であり, 可約ファイバーをもたない.
- (c) ϕ の section は S 上の (-1) -曲線となり, また逆も然り.

さらに S 上の任意の有理曲線 C に対して $C^2 \geq -1$ が成り立つ. 結果的に (a) における \mathbb{P}^2 の 9 点は一般位置にある, つまり, どの 3 点も同一直線上になく, どの 6 点も同一 conic 上にない.

証明. 因子としての φ の section の ϖ による順像は射影公式より ϕ の section となる. もし ϕ が可約ファイバーをもつなら, φ もそうなる. だから ϕ は可約ファイバーをもたない. このとき [4] より (a) と (b) が分かる. C を S 上の非特異有理曲線とする. 種数公式から $C^2 = -2 - C.K_S$ を得る. ϕ は可約ファイバーをもたないので, C は ϕ に関して水平的である. よって (b) から C は ϕ のファイバーと交わる. したがって $C.(-K_S) \geq 1$ で $C^2 \geq -1$ を得る. ここで $C^2 = -1$ と $C.(-K_S) = 1$ が同値である事に注意する. これより (c) が分かる. 残りの部分は明らかである. \square

B を有限 2 重被覆 $\varpi : X \rightarrow S$ の分岐因子とする. S は非特異有理曲面なので, $\text{Pic}(S)$ にねじれは無い. よって $B \sim 2\delta$ をみたす $\delta \in \text{Pic}(S)$ は一意的に定まる. 補題 2.1 より S は \mathbb{P}^2 の 9 点 blow-up であるから, 対 (S, B) を双有理射で (\mathbb{P}^2, C) に変換できる. S 上の互いに交わらない 9 本の (-1) -曲線の組の取り方は無数にあるので,

B の平面曲線モデルも無数に存在する. そこで 9 本の (-1) -曲線の組をうまく選んで, B の平面曲線モデルを標準化することを考える. 次の補題を準備する:

補題 2.2. (S, B) を上記の対とする. このとき互いに交わらない 9 本の (-1) -曲線 e_1, \dots, e_9 の blow-down $\epsilon : (S, B) \rightarrow (\mathbb{P}^2, C)$ が存在して

$$\deg C \geq m_9 + m_8 + m_7, \quad (2.1)$$

$$m_9 \geq m_8 \geq m_7 \geq \dots \geq m_1 \geq 0, \quad (2.2)$$

ここで m_i ($i = 1, \dots, 9$) は C の $P_i = \epsilon(e_i)$ における重複度を表す.

証明. e_1, \dots, e_9 は S 上の互いに交わらない 9 本の (-1) -曲線とし, $\mu : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ を e_i すべてを縮約する blow-down, そして $P_i = \mu(e_i) \in \mathbb{P}^2$ とおく. 特に $i \neq j$ ならば $P_i \neq P_j$ である. d を μ_*B の次数, m_i ($i = 1, \dots, 9$) を μ_*B の P_i での重複度とする. (2.2) は成り立つとしてよい.

B は有限 2 重被覆の分岐因子であるから, (-1) -曲線を含まない. よって μ_*B は任意の $i \neq j$ に対して 2 点 P_i, P_j を通る直線 $l_{i,j}$ を含まない. また補題 2.1 より P_1, \dots, P_9 のどの 3 点も同一直線上に無い. 3 点 P_9 と P_8, P_7 を中心とする μ_*B の Cremona 変換で, 次数 $2d - m_9 - m_8 - m_7$ の平面曲線を得る. このとき μ とこの Cremona 変換の合成は, $l_{9,8}$ と $l_{8,7}, l_{7,9}$ の μ による固有像が e_9 と e_8, e_7 の代わりを担い, 新しい blow-down $\mu' : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ をなす. 以上の Cremona 変換を有限回施すことで平面曲線モデルの次数を下げていくと, 条件 (2.1) をみたす blow-down ϵ を得る. \square

平面曲線 C の特異点 P が単純特異点であるとは, P での blowing up による C の固有像が P の上で非特異のときにいう.

定理 2.3. X は非特異有理曲面で, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバーの種数 $g \geq 6$ で, section をもつ相対極小な bielliptic fibration とする. さらに φ の Mordell-Weil 階数は最大, つまり, $r = 2g + 10$ とする. $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は補題 1.3 の非特異有理極小楕円曲面で, 同じく $\varpi : X \rightarrow S$ は有限 2 重被覆とする. B を ϖ の分岐因子とおく. このときある blow-down $\epsilon : (S, B) \rightarrow (S_9, B_9)$ が存在して, $S_9 \simeq \mathbb{P}^2$ で B_9 が次のいずれかとなる:

(16; g ; 1) 型: 単純 $(g - 4)$ -重点を一つもつ $(g - 2)$ 次曲線 (g は偶数).

(16; g ; 0) 型: 単純 $(g - 3)$ -重点を一つと, node または cusp をもつ
 $(g - 1)$ 次曲線 (g は奇数).

(18; 7) 型: 非特異平面 4 次曲線 ($g = 7$).

特に B は種数 $g - 4$ の非特異既約曲線である.

定理 2.3 の証明の前に, 分岐因子のモデルの標準化によって, S 上の 9 本の (-1) -曲線が全て入れかわる例を挙げる:

例 2.4. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は一般ファイバーの種数が 6 で, Mordell-Weil 階数が最大の bielliptic fibration とする. $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は補題 1.3 の有理楕円曲面で, 同じく $\varpi : X \rightarrow S$ は有限 2 重被覆とする. B を ϖ の分岐因子とおく. S 上の 9 本の (-1) -曲線 e_1, \dots, e_9 の blow-down $\mu : (S, B) \rightarrow (\mathbb{P}^2, C)$, $P_i = \mu(e_i) \in \mathbb{P}^2$ は $\deg C = 12$ で, $\text{mult}_{P_9} C = 10$, $\text{mult}_{P_i} C = 2$ ($i = 1, \dots, 8$) とする. このとき平面曲線モデル (\mathbb{P}^2, C) は次の 4 回の Cremona 変換の合成で, 定理 2.3 の (16; 6; 1) 型に標準化できる.

2 点 P_9, P_i を通る直線を l_i とする. l_i の μ による固有像を l_i とおく. $l^{(1)}$ は P_8, P_7 を通る直線, $l^{(2)}$ は P_9, \dots, P_5 を通る conic, $l^{(3)}$ は P_9 で 2 重点をもち, P_8, \dots, P_3 を通る 3 次曲線, $l^{(4)}$ は P_9 で単純 3 重点をもち, P_8, \dots, P_1 を通る 4 次曲線とする. $l^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を μ による $l^{(i)}$ の固有像とおく.

$\mu_1 : (\mathbb{P}^2, C) \rightarrow (\mathbb{P}^2_1, C_1)$ を 3 点 P_9, P_8, P_7 を中心とする Cremona 変換とする. このとき C_1 は点 $\mu_1(l^{(1)})$ で単純 8 重点をもち, $\mu_1(P_6), \dots, \mu_1(P_1)$ で 2 重点をもつ 10 ($= \deg C - 2$) 次曲線となる. また $l^{(2)}$ の μ_1 による固有像は 2 点 $\mu_1(P_6), \mu_1(P_5)$ を通る直線となる事に注意する. $\mu_2 : (\mathbb{P}^2_1, C_1) \rightarrow (\mathbb{P}^2_2, C_2)$ を 3 点 $\mu_1(l^{(1)}), \mu_1(P_6), \mu_1(P_5)$ を中心とする Cremona 変換とする. このとき C_2 は点 $\mu_2 \circ \mu_1(l^{(2)})$ で単純 6 重点をもち, $\mu_2 \circ \mu_1(P_4), \dots, \mu_2 \circ \mu_1(P_1)$ で 2 重点をもつ 8 ($= \deg C_1 - 2$) 次曲線となる. また $l^{(3)}$ の $\mu_2 \circ \mu_1$ による固有像は 2 点 $\mu_2 \circ \mu_1(P_4), \mu_2 \circ \mu_1(P_3)$ を通る直線となる. 同様にして $\mu_3 : (\mathbb{P}^2_2, C_2) \rightarrow (\mathbb{P}^2_3, C_3)$ を 3 点 $\mu_2 \circ \mu_1(l^{(2)}), \mu_2 \circ \mu_1(P_4), \mu_2 \circ \mu_1(P_3)$ を中心とする Cremona 変換とし, $\mu_4 : (\mathbb{P}^2_3, C_3) \rightarrow (\mathbb{P}^2_4, C_4)$ を 3 点 $\mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1(l^{(3)}), \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1(P_2), \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1(P_1)$ を中心とする Cremona 変換とする. このとき C_4 は点 $\mu_4 \circ \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1(l^{(3)})$ でのみ 2 重点をもつ 4 次曲線となり, 定理 2.3 の平面曲線モデルの分類の (16; 6; 1) 型に一致する. $\mu_4 \circ \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1 \circ \mu : (S, B) \rightarrow (\mathbb{P}^2_4, C_4)$ は

$l_8, \dots, l_1, \ell^{(4)}$ を縮約する blow-down であり, blow-down μ で縮約される (-1) -曲線とは全て入れかわる (cf. 図 2.1, 図 2.2).

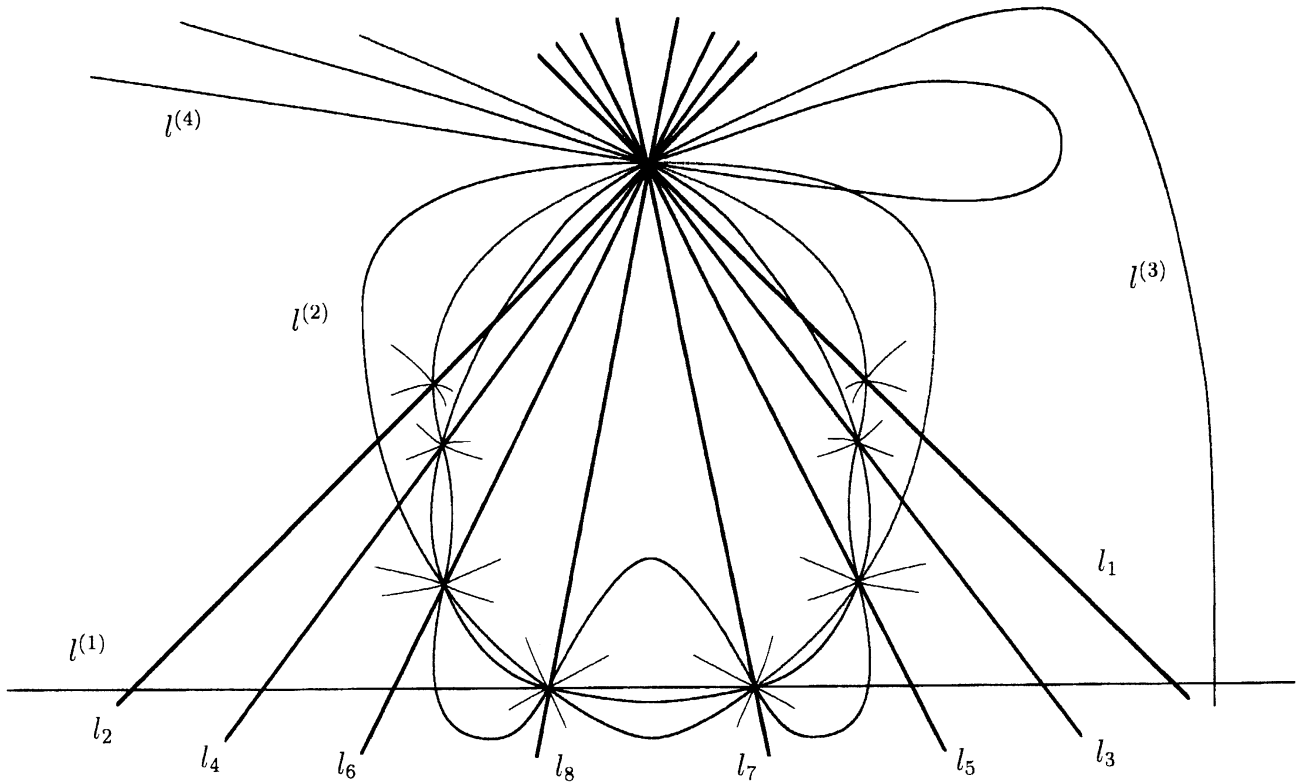


図 2.1.

定理 2.3 の標準化された平面曲線の分類は補題 2.2 の変換, つまり有限回の Cremona 変換の合成により得られる事が次のように示される.

定理 2.3 の証明. $\epsilon : (S, B) \rightarrow (S_9, B_9)$ は補題 2.2 の blow-down とする. $P_i \in \mathbb{P}^2$ ($i = 1, \dots, 9$) は ϵ で縮約された点, e_i を P_i に対応する S 上の (-1) -曲線とする. d を B_9 の次数とし, m_i を B_9 の P_i における重複度とする. このとき補題 2.1 から

$$\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}\epsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \bigoplus_{i=1}^9 (\mathbb{Z}e_i),$$

$$\epsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).e_i = e_j.e_k = 0 \quad (1 \leq i, j, k \leq 9, j \neq k). \tag{2.3}$$

δ は $2\delta \sim B$ をみたす因子とする. $B.\epsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = 2\delta.\epsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ かつ $B.e_i = 2\delta.e_i$, $B \in |\epsilon^*B_9 - \sum_{i=1}^9 m_i e_i|$ なので, d と m_i はすべて偶数である. そこで $b = d/2$,

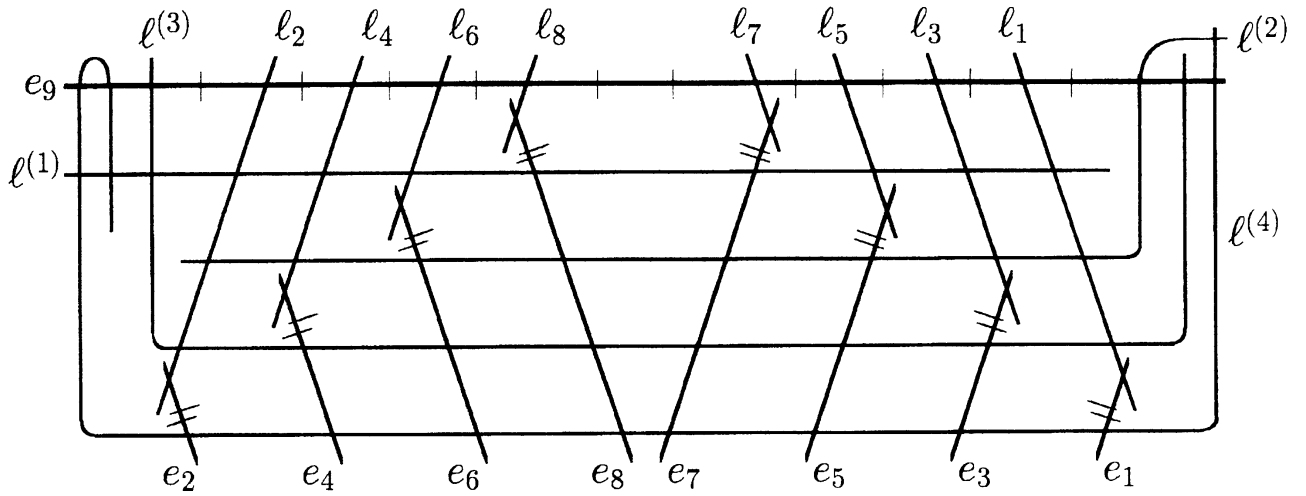


図 2.2.

$n_i = m_i/2$ ($1 \leq i \leq 9$) とおく. 補題 2.2 から

$$n_9 \geq n_8 \geq n_7 \geq \cdots \geq n_1 \geq 0, \quad (2.4)$$

$$b \geq n_9 + n_8 + n_7. \quad (2.5)$$

有限 2 重被覆 $\varpi : X \rightarrow S$ を $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーに制限する事で, 楕円曲線の 2 重被覆を得る. Hurwitz の公式から

$$B.K_S = 2 - 2g. \quad (2.6)$$

$K_S \sim \epsilon^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) + \sum_{i=1}^9 e_i$ だから

$$-3b + \sum_{i=1}^9 n_i = 1 - g. \quad (2.7)$$

一方 $\varpi : X \rightarrow S$ が B に沿って分岐する S の有限 2 重被覆だから, $-2g - 2 = K_X^2 = \varpi^*(K_S + \delta)^2 = 2(K_S + \delta)^2 = 2K_S^2 + 2B.K_S + 2\delta^2$. 等式 (2.6) と $K_S^2 = 0$ から $\delta^2 = g - 3$, つまり,

$$b^2 - \sum_{i=1}^9 n_i^2 = g - 3. \quad (2.8)$$

よって (2.7) と (2.8) より

$$b(3-b) + \sum_{i=1}^9 n_i(n_i-1) = 2. \quad (2.9)$$

さらに, (2.7) と $g \geq 6$ から

$$3b - \sum_{i=1}^9 n_i \geq 5. \quad (2.10)$$

ここで補題 2.1 より B_9 は高々単純特異点しかもたないので, 次の主張から定理 2.3 の分類を得る:

主張 2.5. (2.4), (2.5), (2.9) 並びに (2.10) の連立不等式の整数解は

$$(b, n_9, n_8, n_7, \dots, n_1) = (2, 0, \dots, 0), (2, 1, 0, \dots, 0), \\ (k, k-1, 0, \dots, 0), (k, k-1, 1, 0, \dots, 0), (k \geq 3, k \in \mathbb{Z})$$

主張 2.5 の証明. $b = 1$ のとき, 連立不等式は解をもたない. $b = 2$ のとき, $n_i = 0$ ($i=1, \dots, 9$) または $n_9=1, n_i = 0$ ($i = 1, \dots, 8$). よって以下 $b \geq 3$ とする. このとき (2.5) より

$$b(b-3) \geq (n_9 + n_8 + n_7)(n_9 + n_8 + n_7 - 3) \\ \geq n_9(n_9-1) + n_9(n_8-1) + n_9(n_7-1) \\ + n_8(n_9-1) + n_8(n_8-1) + n_8(n_7-1) \\ + n_7(n_9-1) + n_7(n_8-1) + n_7(n_7-1). \quad (2.11)$$

ここで $n_7 \geq 1$ を仮定する. このとき (2.4) から $n_9 - 1 \geq n_8 - 1 \geq n_7 - 1 \geq 0$ ゆえ

$$b(b-3) \geq \sum_{i=1}^9 n_i(n_i-1)$$

を得るが, これは (2.9) に矛盾する.

よって以下 $n_i = 0$ ($i = 1, \dots, 7$) とする. このとき (2.11) は

$$b(b-3) \geq n_9(n_9-1) + n_8(n_8-1) + n_9(n_8-2) + n_8(n_9-2)$$

となる. $n_8 \geq 2$ とすると先と同様にして矛盾する. $n_8 = 0$ または 1 のとき (2.9) から $(n_9 - b + 1)(n_9 + b - 2) = 0$. したがって $n_9 = b - 1$ であり, 主張 2.5 は示された. \square

B の既約性を示す. (18; 7) の場合は明らかである. 他の場合には次のように議論する.

B_9 は P_9 で単純 $g-4$ 重点をもつ $g-2$ 次曲線とする. $\sigma_1 : (S_{8,1}, B_{8,1}) \rightarrow (S_9, B_9)$, $S_{8,1} \simeq \Sigma_1$ を S_9 の P_9 での blow-up とする. このとき $B_{8,1}$ は $2C_1 + (g-2)f_1$ に線型同値な非特異曲線である.

B_9 は P_9 で単純 $(g-3)$ 重点をもち, P_8 で node か cusp をもつ $g-1$ 次曲線とする. $\sigma_2 : (S_7, B_7) \rightarrow (S_9, B_9)$ を P_9, P_8 での blow-up とし, $l_{9,8}$ を P_9, P_8 を通る直線の σ_2 による固有像とする. このとき $l_{9,8}$ は B_7 と交わりのない (-1) -曲線である. $\varsigma : (S_7, B_7) \rightarrow (S_{8,0}, B_{8,0})$, $S_{8,0} \simeq \Sigma_0$ を $l_{9,8}$ の縮約による blow-down とする. このとき $B_{8,0}$ は $2C_0 + (g-3)f_0$ に線型同値な非特異曲線である.

主張 2.6. $g \geq 6$ とする. $B_{8,n}$ を Σ_n の $2C_n + (g-3+n)f_n$ に線型同値な非特異曲線とする. このとき $B_{8,n}$ は既約である.

証明. $B_{8,n}$ がファイバー f を既約成分として含むと仮定する. $B_{8,n}$ は被約だから $B_{8,n} - f$ は f を含まない. しかし $(B_{8,n} - f) \cdot f = 2$ ゆえ, $B_{8,n}$ が特異点をもつ. よって $B_{8,n}$ は水平成分から成る. $B_{8,n} \cdot f_n = 2$ から, $B_{8,n}$ は高々二つの水平既約成分しかもたない. そこで $B_{8,n} = G_1 + G_2$ とすると $G_1 \cdot G_2 = g-3 \geq 3$ ゆえ, これも非特異性に矛盾する. \square

これで定理 2.3 の証明は完結した. \square

B_9 が (16; g ; 1) 型するとき, $\epsilon_1 = \sigma_1^{-1} \circ \epsilon : (S, B) \rightarrow (S_{8,1}, B_{8,1})$, $S_{8,1} \simeq \Sigma_1$ は e_i ($i = 1, \dots, 8$) を縮約する blow-down である. B_9 が (16; g ; 0) 型するとき $\epsilon_0 = \varsigma \circ \sigma_2^{-1} \circ \epsilon : (S, B) \rightarrow (S_{8,0}, B_{8,0})$, $S_{8,0} \simeq \Sigma_0$ は $l_{9,8}$ と e_i ($i = 1, \dots, 7$) を縮約する blow-down である.

補題 2.7. 上記の ϵ_n をとる. ϵ_n で縮約される任意の (-1) -曲線は B と交わらない. 特にモデル $(S_{8,n}, B_{8,n})$ は一意的に決まる.

証明. e を ϵ_n で縮約される (-1) -曲線とする. $B \cdot e$ は非負偶数なので, $B \cdot e \neq 0$ とすると $B_{8,n}$ が非特異であることに矛盾する.

e_1, \dots, e_8 は ϵ_n で縮約される (-1) -曲線とする. 別のモデル $\epsilon_n' : (S, B) \rightarrow (S_{8,n}', B_{8,n}')$ が存在すると仮定する. e_1 は ϵ_n' で縮約されないとして良い. このとき $\epsilon_n'(e_1)$ は既約

曲線で, $B_{8,n}'$ の豊富性から $\epsilon_n'(e_1) \cdot B_{8,n}' > 0$. ところが blow-up ϵ_n' の中心は $B_{8,n}'$ と交わらない. よって $e_1 \cdot B \neq 0$ であるから $B_{8,n}$ が非特異に矛盾. \square

定義 2.8. 上述の双有理射 $\epsilon_n : (S, B) \rightarrow (S_{8,n}, B_{8,n})$ を $(16; g; n)$ 型の標準非特異極小モデルとよぶ.

次に挙げる例が示す通り, 定理 2.3 の標準化された平面曲線モデルは一意的に定まるとは限らない:

例 2.9. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $(16; 7; 0)$ 型の fibration とする. $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は補題 1.3 の非特異有理極小楕円曲面で, 同じく $\varpi : X \rightarrow S$ は有限 2 重被覆とする. B を ϖ の分岐因子とおく. ここで定理 2.3 の平面曲線モデルをとる. つまり S 上の 9 本の (-1) -曲線 e_1, \dots, e_9 の blow-down $\mu : (S, B) \rightarrow (S_9, B_9)$, $P_i = \mu(e_i) \in \mathbb{P}^2$ は $\deg B_9 = 4$ で, $\text{mult}_{P_9} B_9 = 4$, $\text{mult}_{P_8} B_9 = 2$, $\text{mult}_{P_i} B_9 = 0$ ($i = 1, \dots, 7$) とする. 2 点 P_i, P_j ($i \geq j$) を通る直線を $l_{i,j}$ とする. $l_{i,j}$ の μ による固有像を $l_{i,j}$ とおく.

$\xi : (S_9, B_9) \rightarrow (S_9', B_9')$ を 3 点 P_9, P_8, P_7 を中心とする Cremona 変換とする. このとき B_9' は点 $\xi(l_{8,7})$ で単純 4 重点をもち, 点 $\xi(l_{9,7})$ で 2 重点をもつ 6 次曲線である. つまり (S_9', B_9') は定理 2.3 の $(16; 7; 0)$ 型の平面曲線モデルに一致する. しかし $\xi \circ \mu : (S, B) \rightarrow (S_9', B_9')$ で縮約される 9 本の (-1) -曲線は $l_{8,7}, l_{9,7}, l_{9,8}, e_6, \dots, e_1$ であって, μ のそれとは異なる.

次に (X, F) の極小対に着目する. φ は相対極小なので, 自己交点数が -1 である φ の section のみに注目すればよい. そのような section を φ の (-1) -section とよぶ.

補題 2.10. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は最大 Mordell-Weil 階数をもつ種数 $g \geq 6$ の bielliptic fibration とする. $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は補題 2.1 の有理楕円曲面で, 同じく $\varpi : X \rightarrow S$ は有限 2 重被覆, B を ϖ の分岐因子とする. このとき φ の (-1) -section の ϖ による順像は B と交わらない S 上の (-1) -曲線である. 逆に B と交わらない S 上の (-1) -曲線の引き戻しは二つの交わらない φ の (-1) -section となる.

証明. δ は $2\delta \sim B$ をみたす因子とする. ϕ は anti-canonical map で $K_X \sim \varpi^*(K_S + \delta)$ ゆえ,

$$F \sim -\varpi^* K_S \sim -K_X + \varpi^* \delta. \quad (2.12)$$

\mathcal{E} を φ の (-1) -section とする. $\mathcal{E}.F = 1$ かつ $\mathcal{E}.K_X = -1$ ゆえ, (2.12) より $\mathcal{E}.\varpi^*\delta = 0$. したがって射影公式から $\varpi_*\mathcal{E}$ は B と交わらない S 上の (-1) -曲線である.

逆に B と交わらない S 上の (-1) -曲線 e をとる. ϖ は e 上で不分岐なので, 二つの互いに交わらない非特異有理曲線 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ を用いて $\varpi^*e = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ と書ける. このとき $e.K_S = -1$ と (2.12) から $F.(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = F.\varpi^*e = 2$. よって $F.\mathcal{E}_i = 1$. □

詳細は省くが補題 2.7, 2.10 から, 各型の fibration を特徴付ける次の命題を得る:

命題 2.11. 最大 Mordell-Weil 階数をとる bielliptic fibration に対して, 互いに交わらない (-1) -曲線の極大な集合が唯一存在する. $(16; g; n)$ 型の場合, これは 16 本の互いに交わらない (-1) -曲線から成り, $(18; 7)$ 型の場合は 18 本から成る. 特にこの極大集合は標準非特異極小モデルを誘導する.

系 2.12. $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $(16; g; n)$ 型または $(18; 7)$ 型の fibration とする. $\phi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ と $\varpi: X \rightarrow S$ は補題 2.1 の楕円曲面と有限 2 重被覆で, B を ϖ の分岐因子とする. $\epsilon_n: (S, B) \rightarrow (S_{8,n}, B_{8,n}), \epsilon: (S, B) \rightarrow (S_9, B_9)$ をそれぞれ, 定義 2.8, 定理 2.3 における $(16; g; n), (18; 7)$ 型の標準非特異極小モデルを表す. 各型の fibration に対して $\epsilon_n: X \rightarrow X_{16}, \epsilon: X \rightarrow X_{18}$ を命題 2.11 の互いに交わらない (-1) -section の極大集合の縮約による blow-down とする. このとき図 2.3 の自然な可換図式が成立して, $\pi: X_{16} \rightarrow S_{8,n}$ と $\pi_n: X_{18} \rightarrow S_9$ はそれぞれ $B_{8,n}$ と B_9 に沿って分岐する有限 2 重被覆となる.

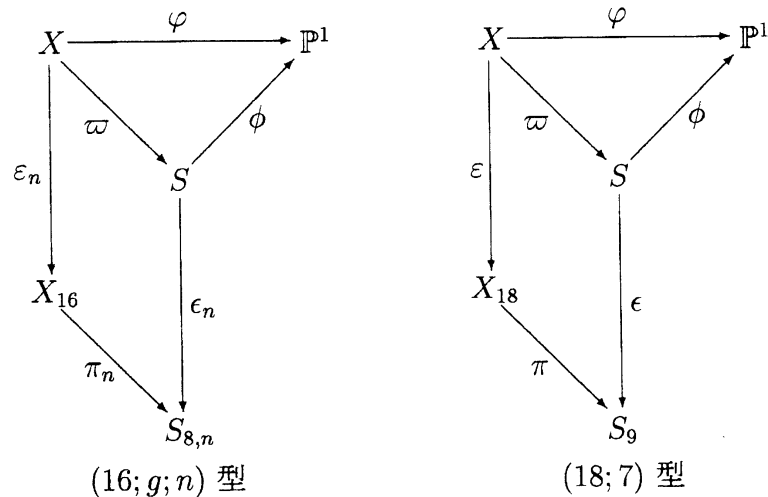


図 2.3.

3 最大階数をとる bielliptic fibration の具体的構成

この章では, Mordell-Weil 階数が最大となる種数 $g \geq 6$ の bielliptic fibration の構造をもつ非特異有理曲面の具体的構成を与える.

$S_9 = \mathbb{P}^2$ として, B_9 を定理 2.3 の分類における既約曲線とする. B_9 は高々二つの単純特異点しかもたないので, 一般位置にある 6 点の blow-up $\sigma : (S_3, B_3) \rightarrow (S_9, B_9)$ で B_3 が非特異となる. $\varsigma : (S_2, B_2) \rightarrow (S_3, B_3)$ を S_3 の一般の点 P_3 での blow-up とする. S_2 の anti-canonical map $\psi : (S_2, B_2) \rightarrow (Z, D)$ は $Z \simeq \mathbb{P}^2$ なる有限 2 重被覆である. 十分一般的な Z の直線によるペンシル \mathcal{L} をとる. このとき図 3.1 の可換図式を得る. ここで $\epsilon_2 : (S, B) \rightarrow (S_2, B_2)$ は $\psi^*\mathcal{L}$ の固定点の blow-up を表し, $\Phi_{\mathcal{L}}$ と $\Phi_{\psi^*\mathcal{L}}$

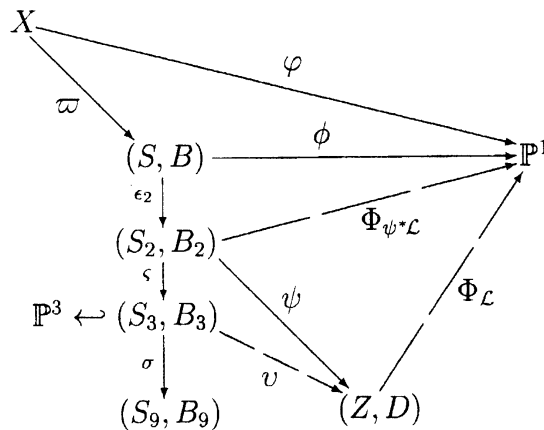


図 3.1.

はそれぞれ \mathcal{L} と $\psi^*\mathcal{L}$ に対応する有理写像とする. $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は S の anti-canonical map, $\omega : X \rightarrow S$ を B に沿って分岐する有限 2 重被覆とする. このとき fibration $\varphi = \phi \circ \omega : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得る.

定理 3.1. 上記のようにして \mathcal{L} から得られる fibration $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は種数 g の bielliptic fibration で, その Mordell-Weil 階数は最大となる. 特に $(16; g; n)$ 型及び $(18; 7)$ 型の fibration が存在する.

証明の概略. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は楕円曲面 S の有限 2 重被覆であるから, φ は種数 g の bielliptic fibration であり, $K_X^2 = -2g - 2$ も確かめられる. X が有理曲面である事は Castelnuovo の有理性判定法を用いれば良い. ここで φ のすべてのファイバーが既約

と仮定すると, φ は相対極小で (-1) -section をもつ事も分かる. よって定理 1.4 から φ は最大階数をとる. 以下, ファイバーの既約性を確認する.

ψ の分岐因子を A とする. \mathcal{L} は A に対して十分一般なので, A の双対曲線の議論から, \mathcal{L} の任意の直線は A と少なくとも 1 点で横断的に交わる. よって有限 2 重被覆の性質から $\psi^*\mathcal{L}$ のすべての元は既約であり, したがって ϕ のすべてのファイバーは既約である.

\mathcal{L} は D に対して十分一般なので, \mathcal{L} の任意の直線は D と少なくとも 1 点で横断的に交わる. ここで S_3 は 3 次 del Pezzo 曲面, つまり \mathbb{P}^3 の 3 次超曲面とみなせる. P_3 からの点射影 $v: (S_3, B_3) \dashrightarrow (Z, D)$ は $\psi = v \circ \varsigma$ である事に注意すると, ϕ のすべてのファイバーは B と少なくとも 1 点で横断的に交わる事が確かめられる. したがって ϕ のすべてのファイバーは既約である. \square

4 最大階数の Mordell-Weil 格子

この章では最大階数の $((18; 7)$ 型, $(16; g; n)$ 型) bielliptic fibration の Mordell-Weil 格子の構造を決定する. 系 2.12 の設定に戻って考える.

$\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $(18; 7)$ 型の fibration とする. 系 2.12 の $\pi: X_{18} \rightarrow S_9$ は非特異 4 次曲線に沿って分岐する有限 2 重被覆であるので, X_{18} は \mathbb{P}^2 の 7 点の blow-up により得られ, π は X_{18} の anti-canonical map である. この blow-up を $\eta: X_{18} \rightarrow X_{25}$, $X_{25} \simeq \mathbb{P}^2$ として, $E_i, 1 \leq i \leq 7$ を η で縮約される (-1) -曲線の ϵ による全像とする. このとき ϕ, π はそれぞれ S, X_{18} の anti-canonical map である事に注意すると, 次の補題を得る.

補題 4.1. $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $(18; 7)$ 型の fibration とする. このとき上記の記号を用いて次のように書き下せる:

$$\begin{aligned} \text{NS}(X) &\simeq \mathbb{Z}(\eta \circ \epsilon)^* \mathcal{O}_{X_{25}}(1) \oplus \bigoplus_{i=1}^7 (\mathbb{Z}E_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{18} (\mathbb{Z}\mathcal{E}_i), \\ F &= 9(\eta \circ \epsilon)^* \mathcal{O}_{X_{25}}(1) - 3 \sum_{i=1}^7 E_i - \sum_{i=1}^{18} \mathcal{E}_i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

$F \cdot \mathcal{E}_i = 1$ ($i = 1, \dots, 18$) なので, 有理曲線 \mathcal{E}_i は φ の section である. そこで \mathcal{E}_{18} を零切断 (O) としてとれる. 定義より自明格子 $T_{18,7}^- \subset \text{NS}(X)$ は \mathcal{E}_{18} と F から生成さ

れる. 定理 1.2 から, Mordell-Weil 格子 $(J_F(K), \langle, \rangle)$ は $T_{18,7}^-$ の直交補格子 $L_{18,7}^-$ に同型である. 格子 $L_{18,7}^-$ の構造は次のように決定できる.

命題 4.2. (18; 7) 型の fibration の Mordell-Weil 格子 $L_{18,7}^-$ は, 図 4.1 の Dynkin 図形を与える 24 次元正定値 unimodular 偶格子である.

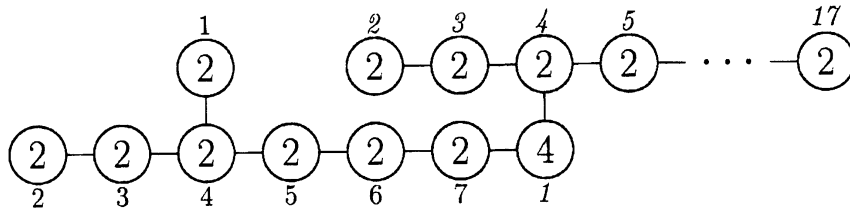


図 4.1.

ここで円内の数字は交点数の (-1) 倍を表し, 二つの円を結ぶ直線は, 対応する二つの元の交点数が -1 である事を意味する.

証明. 記号は補題 4.1 と同じとする. 特に F は (4.1) で与えられ, $(O) = \mathcal{E}_{18}$ とする. 図 4.1 の番号に対応して次の元が $T_{18,7}^\perp$ の基底となる:

$$\begin{aligned} H_1 &= (\eta \circ \varepsilon)^* \mathcal{O}_{X_{25}}(1) - E_1 - E_2 - E_3, \\ H_k &= E_{k-1} - E_k \quad (k = 2, \dots, 7), \\ \mathcal{H}_1 &= E_7 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, \quad \mathcal{H}_k = \mathcal{E}_{k-1} - \mathcal{E}_k \quad (k = 2, \dots, 17). \end{aligned} \tag{4.2}$$

この基底を用いて計算すると, 残りの命題の主張もしたがう. □

注釈 4.3. 部分格子 $\langle H_1, \dots, H_7, F + (O) - \mathcal{E}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_{17} \rangle \subset L_{18,7}^-$ はルート格子 $E_7 + A_{17}$ である. この事実は 24 次元正定値 unimodular 格子の中で $L_{18,7}^-$ の特徴付けとなる (cf. [2] or [3]).

$\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $(16; g; n)$ 型の fibration とする. 系 2.12 の $B_{8,n}$ で分岐する有限 2 重被覆 $\pi_n: X_{16} \rightarrow S_{8,n}$ と自然な射影 $pr: S_{8,n} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の合成による conic 束の構造に着目し, 次の補題を得る:

補題 4.4. 系 2.12 と同じ設定で, 同じ記号を用いる. このとき次数 d の Hirzebruch 曲面への双有理射 $\eta: X_{16} \rightarrow X_{2g+10}$, $X_{2g+10} \simeq \Sigma_d$ で, X_{2g+10} のファイバー Γ に対して $\pi^* f_n \sim \eta^* \Gamma$ をみたすものが存在する.

- [3] W. Ebeling, *Lattices and codes, A course partially based on lectures by F. Hirzebruch*, Advanced Lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1994.
- [4] Y. Fujimoto, On rational elliptic surfaces with multiple fibers, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26**, no. 1 (1990), 1–13.
- [5] K. V. Nguen, and M.-H. Saito, On Mordell-Weil lattices for non-hyperelliptic fibrations of surfaces with zero geometric genus and irregularity. (Russian) *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **66** no. 4 (2002), 137–154.
- [6] M.-H. Saito and K.-I. Sakakibara, On Mordell-Weil lattices of higher genus fibrations on rational surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, **34**, no. 4 (1994), 859–871.
- [7] T. Shioda, On the Mordell-Weil lattices, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **39** (1990), 211–240.
- [8] T. Shioda, Mordell-Weil lattices for higher genus fibration, *Proc. Japan Acad.*, **68A** (1992), 247–250.
- [9] T. Shioda, Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve. *New trends in algebraic geometry* (Warwick, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **264**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 359–373.