

## GALOIS TRISECANT LINE FOR A COMPLETE INTERSECTION CURVE OF TWO CUBIC SURFACES

新潟大学大学院自然科学研究科 高橋 剛 (Takeshi Takahashi)  
 Graduate School of Science and Technology, Niigata University  
 Niigata 950-2181, Japan  
 E-mail Address: takahashi@melody.gs.niigata-u.ac.jp

基礎体を複素数体  $\mathbb{C}$  とし、簡単のため  $k = \mathbb{C}$  とおく。非特異射影的代数曲線  $C$  の関数体  $K = k(C)$  について考察したい。特に、超越拡大  $K/k$  に注目したい。次の定理が基本となる。

**定理 1** (リューローの定理).  $k$  を無限体とし、 $M$  は  $k$  の純超越拡大体とする。このとき  $M$  の部分体  $N$  が  $M \supset N \supset k$ ,  $\text{tr.deg}_k N = 1$  ならば、 $N$  も  $k$  の純超越拡大体である。

拡大  $K/k$  の極大有理中間体を  $K_m$  とする。リューローの定理を動機にして、拡大  $K/K_m$  の考察を試みることにする。次に定義するゴナリティは古くから知られている、代数曲線の重要な不変量である。

**定義 1.** 曲線  $C$  のゴナリティ  $\text{gon}(C)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \text{gon}(C) &= \min\{[K : M] \mid M \text{ は } K/k \text{ の有理中間体}\} \\ &= \min\{\deg \phi \mid \phi \text{ は全射正則写像 } \phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1\} \end{aligned}$$

吉原久夫氏は  $C$  が平面曲線のときに、 $[K : K_m] = \text{gon}(C)$  となる拡大  $K/K_m$  に注目してガロア点というものを定義している。本稿の目的はクリフォード次元 3 の曲線に対して、ガロア点の研究と同様の研究を試みることである。

### §1. 平面曲線の点射影とガロア点

この節では非特異平面  $d$  次曲線  $C \subset \mathbb{P}^2$  ( $d \geq 3$ ) とその関数体  $K = k(C)$  について考える。曲線上の点  $P \in C$  中心の射影  $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  に対して、関数の引き戻しによって、関数体の拡大  $K/k(\mathbb{P}^1)$  が得られる。この体の拡大は点  $P$  のとり方に依存するので、 $K_P = k(\mathbb{P}^1)$  とおく。拡大  $K/K_P$  の次数は  $d - 1$  次である。平面曲線のゴナリティに関して次の結果がある。

**定理 2** ([14, p. 372]). 非特異平面曲線  $C \subset \mathbb{P}^2$  の次数を  $d = \deg C$  ( $d \geq 3$ ) とする。このとき、曲線のゴナリティは  $\text{gon}(C) = d - 1$  である。さらにゴナリティを与える拡大  $K/k(\mathbb{P}^1)$  は、ある点  $P \in C$  中心の射影  $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  により得られる。

この定理によって、 $[K : k(\mathbb{P}^1)] = \text{gon}(C)$  となる拡大  $K/k(\mathbb{P}^1)$  の研究として、平面曲線の射影の考察が重要になる。

**定義 2** (吉原久夫). 非特異平面曲線の射影  $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  から得られる代数拡大  $K/K_P$  がガロア拡大のときに、射影の中心  $P \in C$  をガロア点と呼ぶ。

また、吉原久夫氏は次のように問題を設定した。

## 問題 1.

- (1) ガロア点を持つ曲線  $C$  はどのようなものか? またガロア点とは幾何的にどのような点か?
- (2) 一つの曲線上にガロア点は最大で何個存在するのか?
- (3) 拡大  $K/K_P$  のガロア閉包を  $L_P$  とするとき,  $L_P$  の曲線モデル  $\tilde{C}_P$  はどのようなものか?
- (4) 拡大  $L_P/K_P$  のガロア群は何か?
- (5) 拡大  $K/K_P$  は点  $P \in C$  を動かしたときにどのようにかわるのか?
- (6)  $\tilde{C}_P$  は点  $P \in C$  を動かしたときにどのようにかわるのか?

(1), (2), (3), (4) に関して次の定理がある.

**定理 3** ([12]).  $C \subset \mathbb{P}^2$  を非特異平面 4 次曲線とする. このとき次が成り立つ.

- (1)  $P \in C$  がガロア点であるための必要十分条件は, うまく射影変換をして,  $C$  の定義方程式を  $y + g(x, y) = 0$ ,  $P$  の座標を  $(0, 0)$  とできることである. ここで,  $g(x, y)$  は 4 次斉次多項式である.
- (2)  $C$  上のガロア点の個数は 0, 1 もしくは 4 である.  $C$  上に 4 個のガロア点をもつための必要十分条件は,  $C$  が  $x + x^4 + y^4 = 0$  で定義される曲線と射影同値になることである.
- (3)  $L_P$  の曲線モデル  $\tilde{C}_P$  の種数は  $g(\tilde{C}_P) = 3, 6, 7, 8, 9$  もしくは 10 である.  $g(\tilde{C}_P) = 3$  となるための必要十分条件は  $P$  がガロア点となることである.
- (4)  $P$  がガロア点ならば,  $K/K_P$  のガロア群は 3 次巡回群である.
- (5)  $P$  が  $C$  上の一般的な点ならば,  $g(\tilde{C}_P) = 10$  で  $L_P/K_P$  のガロア群は 3 次対称群である. また,  $C$  が一般的な非特異 4 次曲線ならばガロア点を持たない.

**定理 4** ([21]).  $C \subset \mathbb{P}^2$  を非特異平面  $d$  次曲線 ( $d \geq 5$ ) とする. このとき次が成り立つ.

- (1)  $P \in C$  がガロア点であるための必要十分条件は, うまく射影変換をして,  $C$  の定義方程式を  $y + g(x, y) = 0$ ,  $P$  の座標を  $(0, 0)$  とできることである. ここで,  $g(x, y)$  は  $d$  次斉次多項式である.
- (2)  $C$  上のガロア点の個数は 0 もしくは 1 である.
- (3)  $P$  がガロア点ならば,  $K/K_P$  のガロア群は  $d - 1$  次巡回群である.
- (4)  $P$  が  $C$  上の一般的な点ならば,  $\tilde{C}_P$  の種数は  $g(\tilde{C}_P) = (d - 1)!(d + 2)(d - 3)/4 + 1$  で  $L_P/K_P$  のガロア群は  $d - 1$  次対称群である. また,  $C$  が一般的な非特異  $d$  次曲線ならばガロア点を持たない.

問題 1 の (5), (6) については, [23], [15] によって結果が得られていて, 特に,  $P, Q \in C$  ( $P \neq Q$ ) が十分に近い点のとき  $\tilde{C}_P$  と  $\tilde{C}_Q$  は同型ではない, ということがわかっている.

その他関係する論文に [3], [4], [6], [8], [9], [10], [11], [13], [16], [17], [18], [19], [22], [23], [24] がある.

## §2. クリフォード指数とクリフォード次元

この節では非特異射影的曲線のクリフォード指数とクリフォード次元を定義し, それに関する重要な結果を紹介する. 詳しくは [2] と [5] などを読んでいただきたい. 以下, 非特異射影的曲線  $C$  の種数  $g(C)$  を  $g(C) \geq 4$  と仮定する.

**定義 3.**  $C$  上の直線束  $L$  に対して, そのクリフォード指数  $\text{Cliff}(L)$  を次で定義する.

$$\text{Cliff}(L) = \deg L - 2(\dim_k H^0(C, L) - 1)$$

また、曲線  $C$  自身のクリフォード指数  $\text{Cliff}(C)$  を次で定義する.

$$\text{Cliff}(C) = \min\{\text{Cliff}(L) \mid L \text{ は直線束で } \dim_k H^0(C, L) \geq 2, \dim_k H^1(C, L) \geq 2\}$$

$g(C) \geq 4$  ならば、 $\dim_k H^0(C, L) \geq 2$  かつ  $\dim_k H^1(C, L) \geq 2$  という直線束  $L$  が存在することに注意する. また、クリフォードの定理によって  $\text{Cliff}(C) \geq 0$  であることに注意する. さらに、曲線  $C$  のクリフォード次元  $\text{Cliff-dim}(C)$  を次で定義する.

$$\text{Cliff-dim}(C) = \min\{\dim_k H^0(C, L) - 1 \mid L \text{ は直線束で } \dim_k H^0(C, L) \geq 2, \dim_k H^1(C, L) \geq 2, \text{Cliff}(L) = \text{Cliff}(C)\}$$

**補題 1** ([5, Lemma 1.1]).  $\text{Cliff-dim}(C) \geq 2$  と仮定する. クリフォード次元を与える直線束  $L$ , つまり、 $\text{Cliff-dim}(C) = \dim_k H^0(C, L) - 1$ ,  $\dim_k H^0(C, L) \geq 2$ ,  $\dim_k H^1(C, L) \geq 2$ ,  $\text{Cliff}(L) = \text{Cliff}(C)$  をみたす直線束  $L$  に対して、 $|L|$  は非常に豊富な完備線形系である.

クリフォード次元を与える直線束  $L$  に対して、完備線形系  $|L|$  によって決まる埋め込みをクリフォード埋め込みと呼ぶ. クリフォード次元を使って平面曲線の特徴付けることができる.

**系 1.** 非特異平面  $d$  次曲線 ( $d \geq 5$ ) のクリフォード次元は 2 である. また逆に、非特異射影的曲線  $C$  のクリフォード次元が 2 ならば、クリフォード埋め込みによって  $C$  を  $\mathbb{P}^2$  に埋め込むことができる.

$\text{Cliff-dim}(C) \geq 3$  のときは次の定理がある.

**定理 5** ([5]). 非特異射影的曲線  $C$  のクリフォード次元を  $r = \text{Cliff-dim}(C)$  とおく.  $3 \leq r \leq 9$  と仮定する. このとき、

- (1)  $g(C) = 4r - 2$ ,  $\text{Cliff}(C) = 2r - 3$
- (2)  $C$  のクリフォード指数を与える直線束  $L$ , つまり、 $\dim_k H^0(C, L) \geq 2$ ,  $\dim_k H^1(C, L) \geq 2$ ,  $\text{Cliff}(L) = \text{Cliff}(C)$  をみたす直線束  $L$  は唯一つだけ存在する.
- (3)  $C$  のクリフォード指数を与える直線束  $L$  に対して  $L^2$  は標準束である. また、 $|L|$  は  $C$  を *arithmetically Cohen-Macaulay* 曲線として射影空間  $\mathbb{P}^r$  に埋め込む.
- (4)  $\text{gon}(C) = 2r$  である. また、ゴナリティを与える正則写像  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  は  $|L(-D)|$  という完備線形系から決まり、ゴナリティを与える正則写像の族は一次元である. ここで、 $L$  は  $C$  のクリフォード指数を与える直線束で、因子  $D$  は  $\deg D = 2r - 3$  をみたす.

$\text{Cliff-dim}(C) \geq 10$  のときも同様の結果が成り立つと予想されている ([5]). クリフォード次元 3 の曲線は次の定理のように比較的よくわかっている.

**定理 6** ([7]). 非特異射影的曲線  $C$  のクリフォード次元を 3 と仮定する.

- (1) クリフォード埋め込みによって  $C$  を  $\mathbb{P}^3$  に埋め込むと、それは二つの 3 次曲面の完全交差になる. また逆に、 $\mathbb{P}^3$  内の二つの 3 次曲面の完全交差によって定義される非特異曲線のクリフォード次元は 3 である.
- (2)  $\deg C = 9$ ,  $g(C) = 10$ ,  $\text{Cliff}(C) = 3$
- (3)  $C$  のクリフォード指数を与える直線束  $L$  は唯一つだけ存在する.
- (4)  $\text{gon}(C) = 6$  で、ゴナリティを与える正則写像  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  は  $C$  のトリセカントライン中心の射影によって与えられる.

基本的な補題を四つ示す.

**補題 2.** 非特異曲線  $C \in \mathbb{P}^3$  は二つの 3 次曲面の完全交差であるとする.

$$I_C(3) = \{X, Y, Z, W \text{ の 3 次斉次多項式で曲線 } C \text{ 上恒等的に零}\} \cup \{0\}$$

とおく. このとき,  $\dim_k I_C(3) = 2$  である.

**補題 3.** 非特異曲線  $C \in \mathbb{P}^3$  は二つの 3 次曲面の完全交差であるとする.  $C$  を含む一般の 3 次曲面は既約かつ非特異である.

**補題 4.** 非特異曲線  $C \in \mathbb{P}^3$  は二つの 3 次曲面の完全交差であるとする.  $C$  を含む任意の 3 次曲面は正規曲面である.

**補題 5.** 非特異曲線  $C \in \mathbb{P}^3$  は二つの 3 次曲面の完全交差であるとする.  $C$  とそのトリセカントライン  $l$  に対して,  $C$  と  $l$  を含む 3 次曲面  $S$  が唯一つ存在する. 逆に,  $C$  を含む 3 次曲面  $S$  に対して,  $S$  に含まれる直線  $l$  は  $C$  のトリセカントラインである.

### §3. クリフォード次元 3 の曲線のガロアトリセカントライン

平面曲線のガロア点の研究は, クリフォード次元 2 の曲線とその関数体についての研究といえる. この章ではクリフォード次元 3 の曲線とその関数体について, ガロア点の研究の拡張を試みたい. 以下  $C$  をクリフォード次元 3 の曲線, つまり,  $\mathbb{P}^3$  内の非特異曲線で二つの 3 次曲面の完全交差であるとする. 直線  $l \subset \mathbb{P}^3$  は,  $l$  を含む一般的な超平面  $H$  に対して  $C \cap H - C \cap l$  が丁度  $6 (= \deg C - 3)$  点からなるときに, トリセカントラインと呼ぶ. トリセカントライン中心の射影  $\pi_l: C \rightarrow \mathbb{P}^1$  から, 関数の引き戻しによって 6 次の拡大  $K/k(\mathbb{P}^1)$  が得られる. この拡大はトリセカントラインのとり方に依存するので,  $K_l = k(\mathbb{P}^1)$  と書くことにする.

**定義 4.** クリフォード次元 3 の曲線  $C$  のトリセカントライン  $l \subset \mathbb{P}^3$  中心の射影  $\pi_l: C \rightarrow \mathbb{P}^1$  から得られる 6 次拡大  $K/K_l$  がガロア拡大のときに,  $l$  をガロアトリセカントラインと呼ぶ.

次の補題が基本になる.

**補題 6.**  $l$  をガロアトリセカントラインと仮定する. ガロア群の任意の元  $\sigma \in \text{Gal}(K/K_l)$  に対して, それに付随する  $C$  の自己同型を  $\tilde{\sigma}: C \rightarrow C$  と書く. このとき,  $\mathbb{P}^3$  の射影変換  $M \in \text{PGL}(4, k)$  で  $M|_C = \tilde{\sigma}$  というものが存在する.

証明. クリフォード指数を与える直線束  $L$  が唯一つであることから,  $\tilde{\sigma}: C \rightarrow C \subset \mathbb{P}^3$  も完備線形系  $|L|$  によって与えられる. したがって,  $\tilde{\sigma}$  は射影変換の制限になる.  $\square$

$K/K_l$  がガロア拡大ならば, 拡大の次数は 6 次なので,  $\text{Gal}(K/K_l)$  は 6 次の巡回群  $C_6$  もしくは, 3 次対称群  $S_3$  に同型である. 以下,  $K/K_l$  がガロア拡大のときに  $\text{Gal}(K/K_l) \subset \text{PGL}(4, k)$  と考える.  $\text{Gal}(K/K_l)$  の単位元を  $e$  と書く.

**補題 7.**  $l$  を  $C$  のガロアトリセカントラインと仮定する.

(1)  $\text{Gal}(K/K_l) \cong C_6$  と仮定し, その生成元を  $\sigma$  と書く. このとき射影変換をして  $\mathbb{P}^3$  の座標をうまくとることによって,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_6^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_6^j \end{pmatrix}$$

とすることができる. ここで,  $\zeta_6$  は 1 の原始 6 乗根で  $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  である.

- (2)  $\text{Gal}(K/K_l) \cong S_3$  と仮定し, その生成元を  $\sigma, \tau$  として,  $\sigma^3 = e, \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^2$  という関係を持つものとする. このとき射影変換をして  $\mathbb{P}^3$  の座標をうまくとることによって,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすることができる. ここで,  $\omega$  は 1 の原始 3 乗根である.

証明. まず,  $\text{Gal}(K/K_l) \cong C_6$  と仮定する. 射影変換によって,  $l$  は  $X = Y = 0$  で定義されているとしてよい. このとき  $\pi_l \circ \sigma = \pi_l$  なので,  $l$  を含む超平面  $H$  に対して  $\sigma(H) = H$  がわかる. 従って,  $\sigma$  は

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (a \in k - \{0\})$$

という形をしている. とくに, 固有方程式は重根を持つ. また,  $\sigma^6 = e$  であることから,  $\sigma$  は対角化可能であり, うまく射影変換をすることによって,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_6^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_6^j \end{pmatrix}$$

とできる.

次に  $\text{Gal}(K/K_l) \cong S_3$  と仮定する. 射影変換によって,  $l$  は  $X = Y = 0$  で定義されているとしてよい. また  $\sigma$  に関して, 上の議論と同様にして,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^j \end{pmatrix}$$

としてよい.  $l$  は  $X = Y = 0$  で定義されているので,  $\tau$  は

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{pmatrix}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_8 \in k - \{0\})$$

という形をしている. ここで,  $\sigma^3 = e, \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^2$  が成り立つように  $i, j, a_1, a_2, \dots, a_8$  を求めると,  $2i \equiv j \pmod{3}, a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_8 = 0, a_4 a_7 = 1$  がわかる. 従って,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_4} \end{pmatrix}$$

という射影変換によって座標を取り替えると

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とできる. □

クリフォード次元3の非特異曲線  $C \subset \mathbb{P}^3$  を決める二つの3次曲面  $S_1$  と  $S_2$  が, 3次斉次多項式  $F_1$  と  $F_2$  の零点であるとする. このとき斉次イデアル  $I$  を  $I = (F_1, F_2)$  とおく. 射影変換  $\alpha \in PGL(4, k)$  に対して, その代表元を  $M \in GL(4, k)$  とし,

$${}^t(\sigma^*X, \sigma^*Y, \sigma^*Z, \sigma^*W) = M {}^t(X, Y, Z, W)$$

とおく. 斉次多項式  $F \in k[X, Y, Z, W]$  に対して,  $\alpha^*(F) = F(\sigma^*X, \sigma^*Y, \sigma^*Z, \sigma^*W)$  と定義する.

**補題 8.**  $l$  は  $C$  のガロアトリセカントラインと仮定し,  $\text{Gal}(K/K_l)$  の元を一つとり  $\alpha$  とする. このとき, 二つの3次斉次多項式  $F_1, F_2$  を  $I = (F_1, F_2)$ ,  $\alpha^*F_1 = \lambda_1 F_1$ ,  $\alpha^*F_2 = \lambda_2 F_2$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in k - \{0\}$ ) をみたすように選ぶことができる.

証明. 補題 7 の証明の前半部分の議論と同様にして, 射影変換によってうまく座標を取ることにより,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_6^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_6^j \end{pmatrix}$$

としてよい.  $I$  の生成元を一組とって  $A, B$  ( $A, B$  は3次斉次多項式) とする.  $\alpha^*A, \alpha^*B$  も3次斉次多項式ゆえ,  $\alpha^*A, \alpha^*B \in I_C(3)$  である. 従って, 補題 2 により  $\alpha^*A = a_1A + a_2B$ ,  $\alpha^*B = b_1A + b_2B$  という  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in k$  が存在する. 一次結合  $r_1A + r_2B$  ( $r_1, r_2 \in k$ ) に  $\sigma^*$  を作用させると,

$$\sigma^*(r_1A + r_2B) = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

である. ここでジョルダン標準形により, 正則行列  $P$  が存在して,

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{もしくは} \quad P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in k$ ) となる. 3次斉次多項式  $F_1, F_2$  を  $(F_1 \ F_2) = (A \ B) P$  とおくと,

$$\alpha^*F_1 = \lambda_1 F_1, \quad \alpha^*F_2 = \lambda_2 F_2 \quad \text{もしくは} \quad \alpha^*F_1 = \lambda F_1, \quad \alpha^*F_2 = F_1 + \lambda F_2$$

である. しかし, 後者は以下に示すように不合理である.

$\alpha^*F_1 = \lambda F_1$ ,  $\alpha^*F_2 = F_1 + \lambda F_2$  と仮定する. これより,  $\alpha^*(F_2/F_1) = 1/\lambda + F_2/F_1$  を得る. 従って,  $(\alpha^*)^6(F_2/F_1) = 6/\lambda + F_2/F_1$  であるが,  $(\alpha)^6 = e$  より  $(\alpha^*)^6(F_2/F_1) = F_2/F_1$  でなければならないので矛盾である. □

補題 6, 補題 7, 補題 8 を使ってガロアトリセカントラインをもつ  $C$  の定義方程式を決定する.

定理 7. クリフォード次元 3 の非特異曲線  $C \subset \mathbb{P}^3$  がガロアトリセカントライン  $l$  を持つと仮定する. このとき  $C$  は次の 3 種類の曲線のどれかと射影同値である.

$$C_1: \begin{cases} X^3 + Y^3 + (X + aY)W^2 = 0 \\ Z^3 + W^3 + WG_1(X, Y) = 0 \end{cases}$$

$$C_2: \begin{cases} H_2(X, Y) + Z^3 + XW^2 = 0 \\ G_2(X, Y) + YW^2 = 0 \end{cases}$$

$$C_3: \begin{cases} H_3(X, Y) + Z^3 + W^3 + cYZW = 0 \\ G_3(X, Y) + XZW = 0 \end{cases}$$

ここで,  $a \in k$ ,  $c = 0$  または  $1$  であり,  $G_1$  は 2 次斉次多項式,  $H_2, G_2, H_3, G_3$  は 3 次斉次多項式である. 曲線  $C_1, C_2, C_3$  のガロアトリセカントライン  $l$  は  $X = Y = 0$  で与えられて, 曲線  $C_1$  と  $C_2$  のときは  $\text{Gal}(K/K_l) \cong C_6$  であり, 曲線  $C_3$  のときは  $\text{Gal}(K/K_l) \cong S_3$  である.

証明. まず, 曲線  $C_1, C_2, C_3$  に対して, 直線  $l: X = Y = 0$  がガロアトリセカントラインであることはすぐにわかる. 実際,  $C_1$  [resp.  $C_2$ ] に対しては,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_6^3 \end{pmatrix}, \quad \left[ \text{resp. } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_6^3 \end{pmatrix} \right]$$

を制限したものが  $C_1$  [resp.  $C_2$ ] の位数 6 の自己同型であり,  $\pi_l = \pi_l \circ \sigma_1|_{C_1}$  [resp.  $\pi_l = \pi_l \circ \sigma_2|_{C_2}$ ] をみたく,  $C_3$  に対しては

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を制限したものが  $C_3$  の自己同型であり,  $\pi_l = \pi_l \circ \sigma_3|_{C_3}$ ,  $\pi_l = \pi_l \circ \tau|_{C_3}$  をみたく,  $\sigma_3$  と  $\tau$  で生成される群は  $S_3$  に同型である.

曲線  $C$  がガロアトリセカントライン  $l$  を持つと仮定する. まずは  $\text{Gal}(K/K_l) \cong C_6$  と仮定する. 補題 7 により,  $l$  は  $X = Y = 0$  で定義され,  $\text{Gal}(K/K_l)$  の生成元は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_6^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_6^j \end{pmatrix}$$

としてよい. 補題 8 を用いて曲線  $C$  の定義方程式の候補を見つける.

例えば,  $(i, j) = (1, 1)$  のときに  $\sigma^*F = \lambda F$  ( $\lambda \in k - \{0\}$ ) をみたく 3 次既約斉次多項式は  $ZH_1(X, Y) + WH_2(X, Y)$  もしくは  $Z^2G_1(X, Y) + ZWG_2(X, Y) + W^2G_3(X, Y)$  という形になる. ここで,  $H_1, H_2$  は 2 次斉次多項式であり,  $G_1, G_2, G_3$  は 1 次斉次多項式である.

従って  $C$  の定義方程式のタイプは

$$\begin{cases} ZH_1(X, Y) + WH_2(X, Y) = 0 \\ ZH'_1(X, Y) + WH'_2(X, Y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ZH_1(X, Y) + WH_2(X, Y) = 0 \\ Z^2G_1(X, Y) + ZWG_2(X, Y) + W^2G_3(X, Y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z^2G_1(X, Y) + ZWG_2(X, Y) + W^2G_3(X, Y) = 0 \\ Z^2G'_1(X, Y) + ZWG'_2(X, Y) + W^2G'_3(X, Y) = 0 \end{cases}$$

の三種類が考えられる. しかしこれらの方程式が定義する曲線はどれも  $Z = W = 0$  という直線を含むので,  $C$  の定義方程式にふさわしくない. このように他の  $(i, j)$  に対しても同様の考察をすると, 既約かつ非特異な曲線になるものは曲線  $C_1$  か  $C_2$  のどちらかと射影同値になっていることがわかる.

次に  $\text{Gal}(K/K_l) \cong S_3$  と仮定する. 補題 7 により,  $l$  は  $X = Y = 0$  で定義され,  $\text{Gal}(K/K_l)$  の生成元は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としてよい.  $\sigma$  に対して補題 8 を用いて曲線  $C$  の定義方程式の候補をみつける.  $\sigma^*F = \lambda F$  ( $\lambda \in k - \{0\}$ ) をみたく 3 次既約斉次多項式は  $H_1(X, Y) + a_1Z^3 + b_1W^3 + G_1(X, Y)ZW$ ,  $H_2Z + a_2Z^2W + G_2W^2$ ,  $H_3Z^2 + G_3W + a_3ZW^2$  の三種類である. ここで,  $a_1, a_2, a_3, b_1 \in k$  で,  $H_1$  は 3 次,  $H_2, G_3$  は 2 次,  $G_1, G_2, H_3$  は 1 次の斉次多項式である. 従って  $C$  の定義方程式の候補は, 曲線が既約でなければならないことに注意すると

$$\begin{cases} H_1(X, Y) + a_1Z^3 + b_1W^3 + G_1(X, Y)ZW = 0 \\ H'_1(X, Y) + a'_1Z^3 + b'_1W^3 + G'_1(X, Y)ZW = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(X, Y) + a_1Z^3 + b_1W^3 + G_1(X, Y)ZW = 0 \\ H_2Z + a_2Z^2W + G_2W^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z^2G_1(X, Y) + ZWG_2(X, Y) + W^2G_3(X, Y) = 0 \\ H_3Z^2 + G_3W + a_3ZW^2 = 0 \end{cases}$$

の三種類が考えられる. ここで,  $\tau^*F$  は 3 次斉次多項式で補題 2 より  $\tau^*F \in I$  となるので, これを確かめると

$$\begin{cases} H_1(X, Y) + a_1Z^3 + b_1W^3 + G_1(X, Y)ZW = 0 \\ H'_1(X, Y) + a'_1Z^3 + b'_1W^3 + G'_1(X, Y)ZW = 0 \end{cases}$$

以外の二種類の定義方程式は条件をみたさない. この定義方程式は  $C$  が非特異であるから,  $H_1(X, Y)$  と  $H'_1(X, Y)$  が  $k$  上一次独立であることがわかる. 従って  $\tau^*F \in I$  から  $a_1 = b_1$ ,  $a'_1 = b'_1$  がわかる. つまり,  $C$  の定義方程式は

$$\begin{cases} H_1(X, Y) + a_1Z^3 + a_1W^3 + G_1(X, Y)ZW = 0 \\ H'_1(X, Y) + a'_1Z^3 + a'_1W^3 + G'_1(X, Y)ZW = 0 \end{cases}$$

という形をしている. この曲線は  $C_3$  と射影同値である. □

定理 7 の曲線  $C_1, C_2, C_3$  の具体例を示す.



例 1. 次の方程式で定義される曲線に対して,  $l: X = Y = 0$  はガロアトリセカントラインである.

$$(1) \begin{cases} X^3 + Y^3 + YW^2 = 0 \\ Z^3 + W^3 + XYW = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} Y^3 + Z^3 + XW^2 = 0 \\ X^3 + Y^3 + YW^2 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} X^3 + Z^3 + W^3 = 0 \\ Y^3 + XZW = 0 \end{cases}$$

クリフォード次元 2 の曲線のガロア点は高々 1 個であったが, クリフォード次元 3 の曲線には次の例がある.

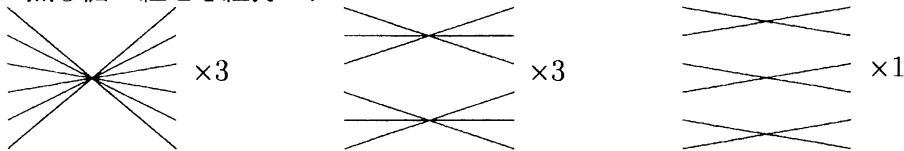
例 2. 次の方程式によって定義される曲線は  $l_1: X = Y = 0$  と  $l_2: Z = W = 0$  の二本のガロアトリセカントラインを持つ.  $\text{Gal}(K/K_{l_1}), \text{Gal}(K/K_{l_2}) \cong \mathcal{C}_6$  である.

$$\begin{cases} X^3 + Y^3 + XW^2 = 0 \\ Z^3 + W^3 + 2X^2W = 0 \end{cases}$$

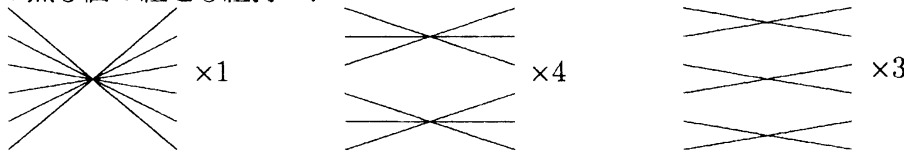
曲線  $C$  の定義方程式が決定できたことにより, ガロアトリセカントライン中心の射影の分岐の様子を調べることができる.

系 2. 定理 7 の曲線  $C_1, C_2, C_3$  のガロアトリセカントライン  $l: X = Y = 0$  中心の射影  $\pi_l: C_i \rightarrow \mathbb{P}^1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の分岐の様子は次のようになる.

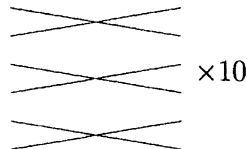
(1)  $\pi_l: C_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  は分岐指数 6 の点を 3 点, 分岐指数 3 の点のペアを 3 組, 分岐指数 2 の点 3 個の組を 1 組持つ.



(2)  $\pi_l: C_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  は分岐指数 6 の点を 1 点, 分岐指数 3 の点のペアを 4 組, 分岐指数 2 の点 3 個の組を 3 組持つ.



(3)  $\pi_l: C_3 \rightarrow \mathbb{P}^1$  は分岐指数 2 の点 3 個の組を 10 組持つ.



曲線  $C$  を含む一般的な 3 次曲面は補題 3 により非特異であるが,  $C$  とガロアトリセカントライン  $l$  を含む 3 次曲面は次のように特異点を持つ.

命題 1. 定理 7 の曲線  $C_1, C_2, C_3$  とそれぞれのガロアトリセカントラインである  $l: X = Y = 0$  に対して,  $C_i \cup l \subset S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) という 3 次曲面  $S_i$  は唯一つずつ存在して次の方

程式で与えられる.

$$S_1 : X^3 + Y^3 + (X + aY)W^2 = 0$$

$$S_2 : G(X, Y) + YW^2 = 0$$

$$S_3 : G(X, Y) + XZW = 0$$

$S_1, S_2$  はどちらも楕円曲線上の錐面であり, 特異点のタイプは  $\hat{E}_6$  である.  $S_3$  は2重点を2個もしくは3個持ち, そのタイプは  $2A_2, 3A_2$ , もしくは,  $A_1 2A_2$  のどれかである. (特異点のタイプについては [1] 参照.)

#### 謝辞.

本研究は今野一宏先生に提案していただきました. 補題 2, 補題 3, 補題 5 は大淵朗先生に教えていただきました. 吉原久夫先生, 小島秀雄先生, 三浦敬先生には本研究に関して有益なアドバイスを多くいただきました. 心から感謝いたします.

#### 参考文献

- [1] J. W. Bruce and C. T. C. Wall, On the classification of cubic surfaces, *J. London Math. Soc.* (2), **19** (1979), 245–256.
- [2] M. Coppens and G. Martens, Secant spaces and Clifford's theorem, *Compositio Math.*, **78** (1991), 193–212.
- [3] C. Duyaguit and H. Yoshihara, Galois lines for normal elliptic space curves, to appear in *Algebra Colloq.*
- [4] C. Duyaguit and K. Miura, On the number of Galois points for plane curves of prime degree, to appear in *Nihonkai Math. J.*
- [5] D. Eisenbud, H. Lange, G. Martens and F. -O. Schreyer, The Clifford dimension of a projective curve, *Compositio Math.*, **72** (1989), 173–204.
- [6] M. Kanazawa, T. Takahashi and H. Yoshihara, The group generated by automorphisms belonging to Galois points of the quartic surface, *Nihonkai Math. J.*, **12** (2001), 89–99.
- [7] G. Martens, Über den Clifford Index algebraischer Kurven, *J. Reine Angew. Math.*, **336** (1982), 83–90.
- [8] K. Miura, Field theory for function fields of singular plane quartic curves, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **62** (2000), 193–204.
- [9] ———, Field theory for function fields of plane quintic curves, *Algebra Colloq.*, **9** (2002), 303–312.
- [10] ———, Galois points on singular plane quartic curves, preprint.
- [11] ———, On plane curves with a Galois point, preprint.
- [12] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, *J. Algebra*, **226** (2000), 283–294.
- [13] ———, Field theory for the function field of the quintic Fermat curve, *Comm. Algebra*, **28** (2000), 1979–1988.
- [14] M. Namba, “Geometry of projective algebraic curves”, Marcel Dekker (1984).
- [15] H. Sakai, Infinitesimal deformation of Galois covering space and its application, preprint.
- [16] T. Takahashi, Galois points on normal quartic surfaces, *Osaka J. math.*, **39** (2002), 647–663.
- [17] ———, Galois points on normal surfaces in the projective three space, preprint.
- [18] ———, Minimal splitting surface determined by a projection of a smooth quartic surface, *Algebra Colloq.*, **9** (2002), 107–115.
- [19] ———, Non-smooth Galois point on a quartic curve with one singular point, preprint.
- [20] H. Yoshihara, Families of Galois closure curves for plane quartic curves, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*
- [21] ———, Function field theory of plane curves by dual curves, *J. Algebra*, **239** (2001), 340–355.
- [22] ———, Galois lines for space curves, preprint.
- [23] ———, Galois points on quartic surfaces, *J. math. Soc. Japan*, **53** (2001), 731–743.
- [24] ———, Galois points for hypersurfaces, *Journal of Algebra*, **264** (2003), 520–534.