

擬逆元写像による対称錐の特徴付け

京都大学大学院理学研究科 甲斐 千舟 (Chifune KAI*¹)

京都大学大学院理学研究科 野村 隆昭 (Takaaki NOMURA*²)

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyoto University

§1 序.

対称錐とは、正定値実対称行列の成す錐を一般化した概念である。既約な対称錐は完全に分類されており、この他に四種類ある (\mathbb{C} , \mathbb{H} , \mathbb{O} (Cayley 数) 成分の正定値対称行列の成す錐と Lorentz 錐)。対称錐をさらに一般化した概念が等質錐である。これもある種の行列代数における正定値対称行列の成す錐として理解できる。線型同型でない等質錐は連続濃度で存在するのに対し、対称錐は可算濃度しかない。対称錐の構造はそれに付随する Jordan 代数を使って詳細に書くことができ、対称錐上の解析が豊富に展開されている ([5])。これゆえ、対称錐の特徴付けは今日まで様々な形で行われてきた。[13] や [14] では微分幾何的な特徴付けが与えられており、[3], [15] においては等質錐の標準的な Riemann 計量から導入される接続代数を用いた特徴付けが成されている。我々の結果は解析的であり、Vinberg の * 写像のチューブ領域保存性について言及した [12, Corollary 2.9] に動機をもつ。

本稿では、擬逆元写像によるチューブ領域の像が双対錐上のチューブ領域に一致する、という条件によって、対称錐を特徴付ける。さらに、パラメーター付きで擬逆元写像を考え、この条件によってパラメーターも特別なものに限定されてしまうことを証明する。

我々の対称性条件は、正定値実対称行列のなす対称錐の場合には次の簡単な事実となる。 Z を複素対称行列とすると、

$$\operatorname{Re} Z \text{ が正定値対称行列} \iff \text{逆行列 } Z^{-1} \text{ が存在し, } \operatorname{Re} Z^{-1} \text{ が正定値対称行列.}$$

Ω を実ユークリッド空間 V の中の対称錐とする。このとき、 V に Jordan 代数の構造が入り、 $W := V_{\mathbb{C}}$ は複素 Jordan 代数になる。先程の事実を対称錐に一般化すると次のようになる。 $z \in W$ とするとき、

$$z \in \Omega + iV \iff \text{Jordan 代数における逆元 } z^{-1} \text{ が存在して, } z^{-1} \in \Omega + iV. \quad (1.1)$$

本稿では、この性質が等質錐の中で対称錐を特徴付けるものであることを証明する。

主定理を詳しく述べるために、定義をしよう。 Ω を有限次元実ベクトル空間 V の中の等質錐とし、一点 $E \in \Omega$ を固定する。このとき、Vinberg [16] により、 Ω の線型自己同型群の分裂可解部分群 H で、 Ω に単純推移的に作用するものが存在する。この単純推移的な作用から、 V に

*¹ E-mail : kai@math.kyoto-u.ac.jp

*² E-mail : nomura@math.kyoto-u.ac.jp

clan と呼ばれる非可換な非結合的代数の構造で E を単位元とするものが入る. この代数における積を $x\Delta y$ ($x, y \in V$) で表し, 左から $x \in V$ をかける線型作用素を L_x で表す. 双線型形式 $\langle x|y \rangle := \text{Tr } L_x \Delta y$ は V に正定値内積を定める. これを V に付随するトレース内積と呼ぶことにしよう. トレース内積を用いて V に実現された Ω の双対錐を Ω^* で表す:

$$\Omega^* := \{y \in V; \langle x|y \rangle > 0 \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}.$$

Ω の特性関数 φ は次式で定義される:

$$\varphi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle x|y \rangle} dy \quad (x \in \Omega).$$

Vinberg の $*$ 写像は $x^* := -\text{grad } \log \varphi(x)$ で与えられる. $W := V_{\mathbb{C}}$ とおくと, $*$ 写像は W から W への双有理写像 I に解析接続され, $\Omega + iV$ 上正則である. 我々の定理の特別な場合として次の定理が成り立つ.

定理 1.1. Ω は既約であるとする. このとき, $\Omega = \Omega^*$ であるためには $I(\Omega + iV) = \Omega^* + iV$ が必要十分である.

既約な対称錐に対しては, $I(x)$ は Jordan 代数における逆元 x^{-1} に一致するので, 定理 1.1 は(1.1) が対称錐を特徴付けることを主張している.

我々はパラメーター付きの擬逆元写像を用いて定理 1.1 をさらに一般化する. Vinberg の $*$ 写像は特定のパラメーターに対応する擬逆元写像である. さて, 我々がパラメーター付きで擬逆元写像を考えている理由を簡単に説明しよう. 擬逆元写像はチューブ領域, および一般の等質ジージェル領域上の Cayley 変換を定義する際に分母を与えるために使われる. 最近の野村の研究により, 対称でない等質ジージェル領域上の Cayley 変換に標準的なものはなく, 扱う問題に応じて適切なパラメーターを取り直して考えるのが良いことがわかってきた. それに合わせて今回我々はパラメーター付きで擬逆元写像を扱う.

f を V 上の線型形式とする. 双線型形式 $\langle x|y \rangle_f := \langle x\Delta y, f \rangle$ が V に正定値内積を定めるとき, f は認容的であるという. 命題 3.1 により, 任意の認容的線型形式に対して, $s_1 > 0, \dots, s_r > 0$ を満たす $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ が存在して, $f = E_{\mathbf{s}}^*$ となることがわかる. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ が $s_1 > 0, \dots, s_r > 0$ を満たすとき, \mathbf{s} は正であるということにしよう. Ω 上の関数 $\Delta_{\mathbf{s}}$ を次式で定義する:

$$\Delta_{\mathbf{s}}((\exp T)E) := e^{\langle TE, E_{\mathbf{s}}^* \rangle} \quad (T \in \mathfrak{h}).$$

$f := E_{\mathbf{s}}^*$ として, $x \in \Omega$ に対する擬逆元 $I_{\mathbf{s}}(x)$ を

$$\langle I_{\mathbf{s}}(x)|y \rangle_f = - \left. \frac{d}{dt} \log \Delta_{-\mathbf{s}}(x + ty) \right|_{t=0} \quad (\forall y \in V)$$

で定義する. $\langle \cdot | \cdot \rangle_f$ を W に複素双線型に拡張する. $I_{\mathbf{s}}$ は W から W への双有理写像に解析接続され, 次の性質を満たす.

- (1) $I_s(E) = E$.
- (2) H の複素化を $H_{\mathbb{C}}$ とする. I_s は $H_{\mathbb{C}}$ 共変, すなわち, $I_s(hx) = {}^s h^{-1} I_s(x)$. ただし, ${}^s h$ は双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ に関する h の随伴作用素である.
- (3) I_s は $\Omega + iV$ 上正則.
- (4) $I_s(\bar{w}) = \overline{I_s(w)}$.

特に, Ω が対称錐で, s が Ω から決まる特別なパラメーター \mathbf{d} のとき (\mathbf{d} の定義は §3 を参照), I_s は Jordan 代数の逆元写像に一致する.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ によって V に実現された Ω の双対錐を Ω^s とする. 我々の定理は次のように述べられる.

定理 1.2. Ω は既約, s は正であるとする. このとき, 次の命題は全て同値である.

- (A) $I_s(\Omega + iV) = \Omega^s + iV$.
- (B) s は \mathbf{d} の正の定数倍, かつ Ω は対称錐.
- (C) s は \mathbf{d} の正の定数倍, かつ $\Omega = \Omega^s$.

§2 等質錐に付随する clan.

ここでは等質錐を研究する上で強力な道具となる clan について説明する. V を有限次元実ベクトル空間, $\Omega \subset V$ を等質錐とする. つまり, Ω は直線を含まない開凸錐で, 線型自己同型群

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V); g(\Omega) = \Omega\}$$

が Ω に推移的に作用しているとする. さらに, 本稿では Ω は既約であると仮定する. [16, Theorem 1] より, Ω に単純推移的に作用する $G(\Omega)$ の分裂可解部分群 H が存在する. 任意の $E \in \Omega$ をとって固定する. 軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ は微分同相写像であり, これを H の単位元で微分することによって, 線型同型写像 $\mathfrak{h} := \text{Lie}(H) \ni T \mapsto TE \in V$ を得る. この逆写像を L で表し, 簡単のため $L(x)$ を L_x と書くことにする. V に積 Δ を $a\Delta b := L_a b$ ($a, b \in V$) で入れる. L の定義から

$$[L_x, L_y]E = L_x(L_y E) - L_y(L_x E) = L_x y - L_y x = x\Delta y - y\Delta x$$

となり

$$[L_x, L_y] = L_{x\Delta y - y\Delta x}$$

が成立する. さらに, [16, Chapter II, §1] より任意の $a \neq 0$ に対し,

$$\text{Tr } L_{a\Delta a} > 0 \tag{2.1}$$

であり, \mathfrak{h} が分裂可解であることから, 任意の $x \in V$ に対し, L_x の固有値は実数のみとなる. このようにして V に積 Δ を入れたものを Ω に付随する clan と呼ぶ. Clan V は E を単位元とする非可換な非結合的代数である.

逆に, 単位元をもつ clan が与えられたとき, それに対応する等質錐が存在し, 等質錐の線型同型類と単位元をもつ clan の同型類が一一に対応することが知られている.

Clan は **normal 分解** と呼ばれる性質のよい直和分解をもつ. すなわち, 正整数 r と r 個の冪等元 E_1, \dots, E_r が存在し, $1 \leq j < k \leq r$ を満たす整数 j, k に対して

$$V_{kj} := \left\{ x \in V; c\Delta x = (\lambda_j + \lambda_k)x/2, x\Delta c = \lambda_j x, \text{ for all } c = \sum_m \lambda_m E_m (\lambda_m \in \mathbb{R}) \right\}$$

とおくとき,

$$V = \sum_{i=1}^r \mathbb{R}E_i \oplus \sum_{k>j} V_{kj}, \quad E = E_1 + \dots + E_r$$

と分解される. Normal 分解は積 Δ に関して次のような性質をもつので, clan における計算を行う際に大変都合がよい.

$$\begin{aligned} V_{ik}\Delta V_{kj} &\subset V_{lj}, \\ k \neq i, j &\Rightarrow V_{ik}\Delta V_{ij} = 0, \\ V_{ik}\Delta V_{mk} &\subset V_{lm} \text{ あるいは } V_{ml} \text{ (} l \text{ と } m \text{ の大小関係による)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

§3 パラメーター付けされた V の正定値内積.

$E_i^* \in V^* (i = 1, \dots, r)$ を

$$\left\langle \sum_m x_m E_m + \sum_{k>j} X_{kj}, E_i^* \right\rangle := x_i$$

により定める. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対し, $E_{\mathbf{s}}^* := \sum s_m E_m^*$ とおき, V 上の双線型形式 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を

$$\langle x | y \rangle_{\mathbf{s}} := \langle x\Delta y, E_{\mathbf{s}}^* \rangle \quad (x, y \in V)$$

で定義する. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ が $s_i > 0 (i = 1, \dots, r)$ を満たすとき, \mathbf{s} は **正である** ということにしよう. (2.1), (2.2) を使うと, \mathbf{s} が正ならば $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ は V 上の正定値内積を定めることがわかる.

このように定義された内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ は次の意味で一般的である.

命題 3.1. $f \in V^*$ に対し, V 上の双線型形式

$$\langle x | y \rangle_f := \langle x\Delta y, f \rangle$$

が V の正定値内積であるならば, 正の $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ が存在して, $f = E_{\mathbf{s}}^*$.

ここで, V 上の線型形式 $x \mapsto \text{Tr } L_x$ は(2.1) より命題 3.1 の仮定を満たすので, 正の $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ が存在して,

$$\text{Tr } L_{x\Delta y} = \langle x\Delta y, E_{\mathbf{d}}^* \rangle$$

を満たす. \mathbf{d} を具体的に書くと, $n_{kj} := \dim V_{kj}$ とおいたとき.

$$d_i = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha < i} n_{i\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > i} n_{\alpha i} \quad (i = 1, \dots, r)$$

である. $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{d}}$ を **Clan V に付随するトレース内積**と呼ぶことにしよう.

§4 擬逆元写像.

対称錐の場合における Jordan 代数の逆元写像にあたるものを, 一般の等質錐に対しても定義したい. そこで我々が用いるのが擬逆元写像である.

4.1 パラメーター付けされた H の一次元表現.

$\mathfrak{a} := \sum \mathbb{R}L_{E_i}$ とおく. \mathfrak{a} は \mathfrak{h} の可換部分 Lie 環である. $A := \exp \mathfrak{a}$ とおく. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対し, A の一次元表現 $\chi_{\mathbf{s}}$ を

$$\chi_{\mathbf{s}} \left(\exp \left(\sum t_i L_{E_i} \right) \right) := \exp \left(\sum s_i t_i \right)$$

によって定義する.

$\mathfrak{n}_{kj} := \{L_x; x \in V_{kj}\}$, $\mathfrak{n} := \sum_{k > j} \mathfrak{n}_{kj}$ とおくと, \mathfrak{n} は \mathfrak{h} の冪零部分 Lie 環であり, \mathfrak{h} は $\mathfrak{a} \times \mathfrak{n}$ の形に書けている. $N := \exp \mathfrak{n}$ とおくと, $H = A \times N$ となっている. そこで $\chi_{\mathbf{s}}$ を N 上自明であるとして H の一次元表現に拡張しておく.

4.2 擬逆元写像.

$\chi_{\mathbf{s}}$ を微分同相な軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ により Ω 上に移した関数を $\Delta_{\mathbf{s}}$ とする:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hE) := \chi_{\mathbf{s}}(h) \quad (h \in H).$$

明らかに $\Delta_{\mathbf{s}}$ は H の作用に関して相対不変な関数である:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hx) = \chi_{\mathbf{s}}(h)\Delta_{\mathbf{s}}(x) \quad (x \in \Omega, h \in H).$$

$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ は正であるとする. $x \in \Omega$ に対し, $I_{\mathbf{s}}(x)$ を

$$\langle I_{\mathbf{s}}(x) | y \rangle_{\mathbf{s}} = -D_y \log \Delta_{-\mathbf{s}}(x) \quad (\forall y \in V)$$

によって定義する. ただし, D_v は v 方向の方向微分を表す. すなわち, V 上の関数 f に対し, $D_v f(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0}$ である. $I_{\mathbf{s}} : \Omega \rightarrow V$ を **擬逆元写像**と呼ぶ. [10] では $I_{\mathbf{s}}$ の像は V^* に入っているが, 本稿では内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を用いて V^* を V と同一視して話を進めていることに注意しよう. また, [10] で用いられている normal j -algebra と今回我々が用いる clan の関係については [2, P.536] を参照されたい.

Ω の双対錐を内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ を用いて V に実現したものを $\Omega^{\mathfrak{s}}$ で表す:

$$\Omega^{\mathfrak{s}} := \{x \in V; \langle x|y \rangle_{\mathfrak{s}} > 0, \text{ for all } y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}.$$

[10, Proposition 3.12] より $I_{\mathfrak{s}}$ は Ω から $\Omega^{\mathfrak{s}}$ への微分同相写像である. さらに, $\Delta_{\mathfrak{s}}$ が相対不変であることから $I_{\mathfrak{s}}$ の H 共変性が従う: $I_{\mathfrak{s}}(hx) = {}^{\mathfrak{s}}h^{-1}I_{\mathfrak{s}}(x)$ ($h \in H$). ただし, ${}^{\mathfrak{s}}h$ は $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ に関する h の随伴作用素を表す. また, $I_{\mathfrak{s}}(E) = E$ ([10, Lemma 3.10, (ii)]) であり, H は反傾作用により $\Omega^{\mathfrak{s}}$ に単純推移的に作用している.

$W := V_{\mathbb{C}}$ とおく. 積 Δ と内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ を W に複素双線型に拡張し同じ記号で表す. $w \in W$ に対し, 右から w をかける線型作用素を R_w で表し,

$$\mathcal{O} := \{w \in W; \det R_w \neq 0\}$$

とおく. $R_E = I$ であるから, $w \mapsto \det R_w$ は恒等的には 0 でない多項式関数である. よって, \mathcal{O} は空でない Zariski 開集合となる.

補題 4.1 ([10, Lemma 3.17]). $I_{\mathfrak{s}}$ は W 上の有理写像に解析接続され, $w \in \mathcal{O}$ に対し, $I_{\mathfrak{s}}(w) = {}^{\mathfrak{s}}R_w^{-1}E$ である.

補題 4.1 と, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ の複素双線型性より, $I_{\mathfrak{s}}(\overline{w}) = \overline{I_{\mathfrak{s}}(w)}$ ($w \in \mathcal{O}$) が成立する.

$I_{\mathfrak{s}}$ の逆写像を具体的に与える. H が反傾作用により $\Omega^{\mathfrak{s}}$ に単純推移的に作用していることに注意して, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ に対し,

$$\chi_{\mathbf{u}}^* := \chi_{-\mathbf{u}}, \quad \Delta_{\mathbf{u}}^*({}^{\mathfrak{s}}h^{-1}E) := \chi_{\mathbf{u}}^*(h) \quad (h \in H)$$

とおく. $x \in \Omega^{\mathfrak{s}}$ に対し, $I_{\mathfrak{s}}^*(x)$ を

$$\langle I_{\mathfrak{s}}^*(x)|y \rangle_{\mathfrak{s}} = -D_y \log \Delta_{-\mathfrak{s}}^*(x) \quad (\forall y \in V)$$

によって定義する. $I_{\mathfrak{s}}^*$ は $\Omega^{\mathfrak{s}}$ から Ω への微分同相写像であり, H 共変性 ($I_{\mathfrak{s}}^*({}^{\mathfrak{s}}h^{-1}x) = hI_{\mathfrak{s}}^*(x)$), および $I_{\mathfrak{s}}^*(E) = E$ を満たす. $I_{\mathfrak{s}}$ と同様に $I_{\mathfrak{s}}^*$ は W 上の有理関数に解析接続され, [10, Proposition 3.16] より, $I_{\mathfrak{s}}^*$ は $I_{\mathfrak{s}}$ の逆写像であることがわかる. かくして, $I_{\mathfrak{s}}$ は双有理写像である.

$I_{\mathfrak{s}}$ は $\Omega + iV$ 上正則であり, $I_{\mathfrak{s}}(\Omega + iV)$ は $I_{\mathfrak{s}}^*$ の正則領域に含まれる. $I_{\mathfrak{s}}^*$ に対しても同様の命題が成立する. 最後に, $I_{\mathfrak{s}}$ の特異点集合について述べておこう. H の Lie 群としての複素化を $H_{\mathbb{C}}$ とおく. [9, Lemma 2.7] の証明から,

$$\det R_{hE} = \det \text{Ad}_W(h) \det \text{Ad}_{H_{\mathbb{C}}}(h^{-1}) \quad (h \in H_{\mathbb{C}})$$

を得る. よって, $w \mapsto \det R_w$ は H の作用に関して相対不変な多項式関数である. [6] で導入された Ω に付随する基本相対不変式を $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ とする. これを自然に W 上の多項式関数とみなす. このとき, 非負整数 a_1, \dots, a_r と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$\det R_w = \alpha \Delta_1(w)^{a_1} \cdots \Delta_r(w)^{a_r}$$

と書ける. これと補題 4.1 から次の命題を得る.

命題 4.2. $\mathcal{N}_i := \{w \in W; \Delta_i(w) = 0\}$ ($i = 1, \dots, r$) とおく. このとき, I_s は $W \setminus \cup_{i=1}^r \mathcal{N}_i$ 上正則である.

§5 主定理.

V における等質錐は, 適当な正定値内積によって双対錐を V に実現したときに, それが元の等質錐に一致する場合, 自己双対であるという. 自己双対な等質錐を対称錐と呼ぶ. 主定理を述べよう.

定理 5.1. $s \in \mathbb{R}^r$ は正であるとする. このとき, 次の命題は全て同値である:

- (A) $I_s(\Omega + iV) = \Omega^s + iV$.
- (B) s は d の正の定数倍であり, Ω は自己双対.
- (C) s は d の正の定数倍であり, $\Omega = \Omega^s$.

§6 (C) \Rightarrow (A) の証明.

証明の概略に入る前に, 対称錐に関して成立する事実をまとめておこう.

6.1 対称錐に関する幾つかの事実.

V_1 を正定値内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ の入った Euclid 空間とし, $\Omega_1 \subset V_1$ をこの内積に関して自己双対な対称錐とする. Ω_1 の特性関数 φ_1 を

$$\varphi_1(x) := \int_{\Omega_1} e^{-\langle x|y \rangle} dy \quad (x \in \Omega_1)$$

によって定義し, Vinberg の $*$ 写像 $\Omega_1 \rightarrow V_1$ を

$$\langle x^* | y \rangle = -D_y \log \varphi_1(x) \quad (x \in \Omega_1, \forall y \in V_1)$$

で定義する. $*$ 写像は一意的な固定点 e_1 をもつことが知られている ([5, Proposition I.3.5]). Ω_1 は自己双対であるから V_1 に Jordan 代数の構造が入るが, 特に e_1 が単位元となるようにその構造を入れることができる. このとき, 次の補題が成立する.

補題 6.1. Jordan 代数 V_1 において左から $v \in V_1$ をかける線型作用素を $L'(v)$ で表す. このとき,

$$\text{Tr } L'(uv) = D_u D_v \log \varphi_1(e_1) = \langle u | v \rangle.$$

これを鑑みて, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を V_1 の Jordan トレース内積と呼ぶことにしよう.

ここで, Ω_1 は既約であると仮定すると, V_1 は単純 Jordan 代数となる. このように, 単純 Jordan 代数において Jordan トレース内積を用いて $*$ 写像が定義されているとき, 次の関係がある.

補題 6.2. 可逆な $x \in V_1$ に対して, $x^* = x^{-1}$.

6.2 (C)⇒(A) の証明.

(C) の成立を仮定する. 6.1 節の議論を $V, \Omega, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ に適用して, V に Jordan 代数の構造を入れる. Ω の特性関数を φ とする. $\text{Det } h = \chi_{\mathfrak{a}}(h)$ ($h \in H$), $\varphi(hE) = (\text{Det } h)^{-1}\varphi(E)$ ([5, Proposition I.3.1]) より, 容易に $\varphi(x) = \Delta_{-\mathfrak{a}}(x)\varphi(E)$ ($x \in \Omega$) が得られ, $I_{\mathfrak{s}}$ と $*$ 写像の定義より $I_{\mathfrak{s}}(x) = px^*$ となる. 補題 6.2 と合わせると $I_{\mathfrak{s}}(x) = px^{-1}$ であり, 複素 Jordan 代数 W における逆元写像 $w \mapsto w^{-1}$ が $\Omega + iV$ 上の対称的自己同型であること ([5, Theorem X.1.1]) から, (A) が従う.

§7 (B) と (C) の同値性.

定義より (C)⇒(B) は明らかである. 本稿では Ω は既約と仮定しているのので, 実は (B)⇒(C) も容易にわかる. なぜならば, [16] ではトレース内積を用いて双対錐を V に実現しており, それが Ω に一致することは, Ω が既約な場合は [17] より明らかだからである.

この節では Ω が既約であるという仮定をはずして, 既約とは限らない一般の等質錐に対しても (B)⇒(C) が成立することを証明する.

いま, Ω が内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$ に関して自己双対であるとする. Ω の特性関数を φ_0 とし, $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$ を用いて定義された $*$ 写像の一意な固定点を E_0 とする. 6.1 節の議論によって, V に E_0 を単位元とする Jordan 代数の構造を入れる. このとき補題 6.1 より

$$D_x D_y \log \varphi_0(E_0) = \langle x | y \rangle_0. \quad (7.1)$$

第 2 節では E を base point として V に clan の構造を入れた. この clan を (V, E) で表し, 新たに E_0 を base point とした clan を (V, E_0) で表す. [16, Chapter II, §1] より, $\Phi(\Omega) = \Omega$ となる準同型 $\Phi: (V, E) \rightarrow (V, E_0)$ が存在する. (V, E_0) に付随するトレース内積を $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{tr}}$ で表すことにすると, [16, Chapter II, §1] より,

$$D_x D_y \log \varphi_0(E_0) = \langle x | y \rangle_{\text{tr}}. \quad (7.2)$$

よって, (7.1), (7.2) から $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$ と $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{tr}}$ は一致する. 従って, Ω は $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{tr}}$ に関して自己双対である. ここまでくれば, (C) の導出は次の補題を用いれば容易である.

補題 7.1. Clan の間の準同型はそれぞれの clan のトレース内積に関してユニタリ写像である.

§8 (A)⇒(B) の証明.

(A) の成立を仮定すると, 特に

$$\text{Re } I_{\mathfrak{s}}(E + iV) \in \Omega^*, \quad \text{Re } I_{\mathfrak{s}}^*(E + iV) \in \Omega$$

が成立する. いくつかの具体的な $v \in V$ に対して $\operatorname{Re} I_{\mathfrak{s}}(v)$ を計算し, それが Ω^* に属するための必要条件を解析することによって (もちろん $I_{\mathfrak{s}}^*$ に対しても「双対的な」議論を行う), (B) の導出を目指す.

$I_{\mathfrak{s}}(v)$ の計算に際しては, $I_{\mathfrak{s}}$ の $H_{\mathbb{C}}$ 共変性を用いる. まず, 次の補題にある $\eta(v)$ を具体的に求める.

補題 8.1 ([9]). 実解析的な写像 $\eta: V \rightarrow H_{\mathbb{C}}$ が一意的存在して, $\eta(0) = e$ かつ $\eta(v)E = E + iv$ が任意の $v \in V$ に対して成り立つ. ここで e は $H_{\mathbb{C}}$ の単位元.

実際には, $\eta(v)$ を求めることは容易ではなく, これが求まったとしても $\eta(v)$ の反傾作用を計算しなければならないから, かなりの苦勞が伴う.

ここで, 任意の $t_j \in \mathbb{R}$ に対し $\sum e^{t_j} E_j \in \Omega$ かつ $\sum e^{-t_j} E_j \in \Omega^{\mathfrak{s}}$ であるから,

$$E_m \in \bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}^{\mathfrak{s}} \quad (m = 1, \dots, r) \quad (8.1)$$

であることに注意しておく.

さて, 一般に次のようなノルム等式が成立する:

$$\|v_{lk} \Delta v_{kj}\|_{\mathfrak{s}}^2 = (2s_k)^{-1} \|v_{lk}\|_{\mathfrak{s}}^2 \|v_{kj}\|_{\mathfrak{s}}^2 \quad (v_{lk} \in V_{lk}, v_{kj} \in V_{kj}).$$

この等式より,

補題 8.2. (1) $n_{kj} \neq 0$ ならば $n_{lj} \geq n_{lk}$.

(2) $n_{lk} \neq 0$ ならば $n_{lj} \geq n_{kj}$.

8.1 第一段階.

$v = v_{kj} \in V_{kj}$ ($k > j$) に対し, $I_{\mathfrak{s}}(E + iv)$ を考える. このときは

$$t_k := \log(1 + (2s_k)^{-1} \|v_{kj}\|_{\mathfrak{s}}^2)$$

として $\eta(v)$ は

$$\eta(v) = \exp L_{iv_{kj}} \exp(t_k L_{E_k})$$

で与えられる. これによって $I_{\mathfrak{s}}(E + iv_{kj})$ が計算でき,

$$\operatorname{Re} I_{\mathfrak{s}}(E + iv_{kj}) = \sum_{m \neq j, k, l} E_m + \left(1 - (2s_j)^{-1} e^{-t_k} \|v_{kj}\|_{\mathfrak{s}}^2\right) E_j + e^{-t_k} E_k + E_l \quad (8.2)$$

を得る. 仮定より $\operatorname{Re} I_{\mathfrak{s}}(E + iv_{kj}) \in \Omega^{\mathfrak{s}}$ であるが, (8.1) と双対錐の定義より, (8.2) の E_j の係数は正でなければならない. よって, $1 - (2s_j)^{-1} e^{-t_k} \|v_{kj}\|_{\mathfrak{s}}^2 > 0$ であり, t_k の定義を使って整理すると次の不等式を得る:

$$2s_j > \left(1 + (2s_k)^{-1} \|v_{kj}\|_{\mathfrak{s}}^2\right)^{-1} \|v_{kj}\|_{\mathfrak{s}}^2.$$

v_{kj} は任意であり, $n_{kj} \neq 0$ であるから, $\|v_{kj}\|_{\mathfrak{s}} \rightarrow \infty$ として次の補題を得る.

補題 8.3. $n_{kj} \neq 0$ ならば $s_j \geq s_k$.

$I_s^*(E + iv_{kj})$ に対して同様の議論を行うことによって逆の不等式が得られ、結局次の命題を得る.

命題 8.4. $n_{kj} \neq 0$ ならば $s_j = s_k$.

Ω は既約であるから, [1, Theorem 4] より, 任意の j, k に対して, 相異なる自然数からなる列 $\{j_\lambda\}_{\lambda=0}^m$ ($j_0 = k, j_m = j$) で, $n_{j_\lambda-1j_\lambda} \neq 0$ を満たすものが存在する. ただし, $j_{\lambda-1} < j_\lambda$ のときは $n_{j_\lambda-1j_\lambda} := n_{j_\lambda j_{\lambda-1}}$ とする. これを用いると,

命題 8.5. s_m ($m = 1, \dots, r$) は m によらず一定である.

以後, $s := s_m$ (m に無関係) とおき, 簡単のため $\|\cdot\|_s, \langle \cdot, \cdot \rangle_s$ をそれぞれ $\|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle$ と書くことにする.

8.2 第二段階.

$j < k < l$ とする. 任意の $v_{lk} \in V_{lk}, v_{lj} \in V_{lj}$ をとり, $w_{kj} := -{}^s L_{v_{lj}} v_{lk}$ とおく.

第二段階では, $v = v_{lk} - {}^s L_{w_{kj}} v_{lk} + v_{lj}$ に対して $I_s^*(E + iv)$ を考える.

反傾作用に対しても補題 8.1 と同様のことが成立する:

補題 8.6. 実解析的な写像 $\eta^* : V \rightarrow H_{\mathbb{C}}$ が一意的に存在して, $\eta^*(0) = e$ かつ ${}^s \eta^*(v)^{-1} E = E + iv$ が任意の $v \in V$ に対して成り立つ.

反傾作用の計算を行わなければならないので, $\eta^*(v)$ を求めるのは $\eta(v)$ に比べ格段に難しい.

$$\begin{aligned} t_j &:= -\log \left(1 + (2s)^{-1} \|w_{kj}\|^2 + (2s)^{-1} \|v_{lj}\|^2 \right), \\ t_k &:= -\log \left(1 + (2s)^{-1} \|v_{lk}\|^2 \right) \end{aligned} \quad (8.3)$$

とおくと, 細かな議論を幾つか伴う計算を経て, $\eta^*(v)$ が次式で与えられることがわかる:

$$\eta^*(v) = \exp(L_{(-iv_{lj})} + L_{w_{kj}}) \exp(L_{(-iv_{lk})}) \exp(t_j L_{E_j} + t_k L_{E_k}).$$

これを用いて $I_s^*(E + iv)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_s^*(E + i(v_{lk} - {}^s L_{w_{kj}} v_{lk} + v_{lj})) &= \sum_{m \neq j, k, l} E_m + e^{t_j} E_j + \left((2s)^{-1} e^{t_j} \|w_{kj}\|^2 + e^{t_k} \right) E_k \\ &\quad + \left(1 - (2s)^{-1} e^{t_j} \|v_{lj}\|^2 - (2s)^{-1} e^{t_k} \|v_{lk}\|^2 \right) E_l + e^{t_j} w_{kj}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

$\operatorname{Re} I_s^*(E + iV) \in \Omega$ であるから, (8.1) より, (8.4) の E_l の係数は正でなければならない. よって, (8.3) を使って整理すると,

$$(2s)^{-1} \|v_{lk}\|^2 \|v_{lj}\|^2 - 2s < \|w_{kj}\|^2$$

が従う. この不等式を解析していくと (正規直交基底をとって走らせるなど, 多少技巧的なので省略する), 次を得る:

$$\|v_{lk}\|^{-2} (\|v_{lk}\|^2 - (2s)^2) n_{lj} < n_{kj}.$$

$n_{lk} \neq 0$ を仮定する. v_{lk} は任意であるから $\|v_{lk}\| \rightarrow \infty$ として, 次の補題が従う.

補題 8.7. $n_{lk} \neq 0$ ならば $n_{kj} \geq n_{lj}$.

これと補題 8.2(2) を合わせて,

命題 8.8. $n_{lk} \neq 0$ ならば $n_{kj} = n_{lj}$.

8.3 第三段階.

第三段階に入る前に記号を用意しておく.

$v_{lj} \in V_{lj}, v_{kj} \in V_{kj}$ に対して, $U_{lk} := \frac{1}{2}(v_{lj} \Delta v_{kj} + v_{kj} \Delta v_{lj})$ とおく. U_{lk} に対して, 一般に次の補題が成立する.

補題 8.9. $\|U_{lk}\|^2 \leq (2s_k)^{-1} \|v_{lj}\|^2 \|v_{kj}\|^2$.

第三段階では, $v = v_{lj} + v_{kj}$ ($v_{lj} \in V_{lj}, v_{kj} \in V_{kj}$) に対して $I_s(E + iv)$ を考える.

$$\begin{aligned} t_k &:= \log \left(1 + (2s)^{-1} \|v_{kj}\|^2 \right), \\ t_l &:= \log \left(1 + (2s)^{-1} \|v_{lj}\|^2 - (2s + \|v_{kj}\|^2)^{-1} \|U_{lk}\|^2 \right), \\ w_{lk} &:= e^{-t_k} U_{lk} \end{aligned}$$

とおく. ここで, 補題 8.9 より

$$1 + (2s)^{-1} \|v_{lj}\|^2 - (2s + \|v_{kj}\|^2)^{-1} \|U_{lk}\|^2 > 0$$

が導かれ, よって t_l は実数にとれることに注意する. このとき, $\eta(v)$ は次式で与えられることがわかる:

$$\eta(v) = \exp(L_{iv_{lj}} + L_{iv_{kj}}) \exp(L_{w_{lk}}) \exp(t_k L_{E_k} + t_l L_{E_l}).$$

従って, $I_s(E + iv)$ が計算でき,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_s(E + iv) &= \sum_{m \neq j, k, l} E_m + (1 - (2s)^{-1} (e^{-t_k} + (2s)^{-1} e^{-t_l} \|w_{lk}\|^2) \|v_{kj}\|^2 \\ &\quad - (2s)^{-1} e^{-t_l} \|v_{lj}\|^2 + s^{-1} e^{-t_l} \langle U_{lk} | w_{lk} \rangle) E_j \\ &\quad + (e^{-t_k} + (2s)^{-1} e^{-t_l} \|w_{lk}\|^2) E_k + e^{-t_l} E_l - e^{-t_l} w_{lk}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

$\operatorname{Re} I_s(E+iV) \in \Omega^s$ であるから, (8.1) より, (8.5) の E_j の係数は正でなければならない, すなわち,

$$1 - (2s)^{-1}(e^{-t_k} + (2s)^{-1}e^{-t_l}\|w_{lk}\|^2)\|v_{kj}\|^2 - (2s)^{-1}e^{-t_l}\|v_{lj}\|^2 + s^{-1}e^{-t_l}\langle U_{lk}|w_{lk}\rangle > 0.$$

これを解析することによって ($\|v_{kj}\|, \|v_{lj}\|$ を大きくしたときの左辺の漸近挙動を見るのだが, 計算はかなり複雑である), 次の不等式を得る:

$$\|U_{lk}\|^2 \geq (2s)^{-1}\|v_{lj}\|^2\|v_{kj}\|^2.$$

補題 8.9 と合わせて,

補題 8.10. $\|U_{lk}\|^2 = (2s)^{-1}\|v_{lj}\|^2\|v_{kj}\|^2.$

この補題と補題 8.2(1) より

命題 8.11. $n_{kj} \neq 0$ ならば $n_{lk} = n_{lj}.$

8.4 最終段階.

後の議論は [11, Subsection 5.5] と同様である. まず, 命題 8.8, 8.11 より次の補題が従う.

補題 8.12. n_{lk}, n_{lj}, n_{kj} の少なくとも 2 つが 0 でなければ, これらはみな等しい.

この補題と [1, Theorem 4] を再び用いると, n_{kj} が k, j に依らないことがわかり, 次の対称性条件によって (A) \Rightarrow (B) の証明が完了する.

命題 8.13 ([17, Proposition 3]). 既約な等質錐 Ω が対称錐であるためには, n_{kj} が k, j に依らず一定であることが必要十分である.

参考文献

- [1] H. Asano, *On the irreducibility of homogeneous convex cones*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **15** (1968), 201-208.
- [2] J. E. D'Atri and I. Dotti Miatello, *A characterization of bounded symmetric domains by curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **276** (1983), 531-540.
- [3] J. Dorfmeister, *Inductive construction of homogeneous cones*, Trans. Amer. Math. Soc., **252** (1979), 321-349.
- [4] J. Dorfmeister, *Homogeneous Siegel domains*, Nagoya Math. J., **86** (1982), 39-83.
- [5] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [6] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory **11** (2001), 155-171.

- [7] M. Koecher, *The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications*, Lecture Notes in Math., **1710** (1999), Springer, Berlin.
- [8] C. Kai and T. Nomura, *Characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps*, preprint; Kyoto-Math., 2003-04.
- [9] T. Nomura, *On Penney's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory **11** (2001), 185-206.
- [10] T. Nomura, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl. **18** (2003), 55-78.
- [11] T. Nomura, *Geometric norm equality related to the harmonicity of the Poisson kernel for homogeneous Siegel domains*, J. Funct. Anal., **198** (2003), 229-267.
- [12] O. S. Rothaus, *Domains of positivity*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **24** (1960), 189-235.
- [13] H. Shima, *A differential geometric characterization of homogeneous self dual cones*, Tsukuba J. Math., **6** (1982), 79-88.
- [14] T. Tsuji, *A characterization of homogeneous self-dual cones*, Tokyo J. Math., **5** (1982), 1-12.
- [15] T. Tsuji, *On connection algebras of homogeneous convex cones*, Tsukuba J. Math., **7** (1983), 69-77.
- [16] E. B. Vinberg, *The theory of the convex homogeneous cones*, Trudy Moskov. Mat. Obsc., **12**, 303-358.
- [17] E. B. Vinberg, *The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone*, Trudy Moskov. Mat. Obsc., **13**, 56-83; Trans. Moscow Math. Soc., **13**, 63-93.