数理解析研究所講究録 1348 巻 2003 年 75-84



# 不変イデアルの整閉包、トロイダル解消と同変ベクトル束
# (Integral closure of integral ideals, toroidal resolutions, and equivariant vector bundles)

加藤 周[1](KATO Syu)
東京大学大学院数理科学研究科
153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

**概要**

この論説では球多様体上の同変ベクトル束の全空間上の同変整閉イデアルが球多様体の同変爆発の極限の上のベクトル束と解釈できることを述べ、それを用いて特別な球多様体上の一般のベクトル束の全空間上の同変整閉イデアルの縮約された表示を与える。またそれを用いた Brion [Br91] によって予想されたアフィン球多様体の不変整閉イデアルの積の全射性の特別な球多様体についての証明の概略を述べる。なお、この論説は進行中の仕事 [K03b] の一部についてのアナウンスである[2]。

## 1 導入

もともと整閉包をとるという操作は代数多様体上で完備線形系を取るということに対応する操作であった。そして Lipman [Li69] によって示されたように、代数多様体上の整閉イデアルはその代数多様体を支配する適当な代数多様体上の直線束から来ることが知られている。このような見方は特に代数多様体 $X$ が連結代数群 $G$ の spherical な作用を受けているとき Brion [Br91] による同変整閉イデアルの分類を導いた。この論説の §3 では最後の Brion の結果で $X$ の代わりに $X$ 上のベクトル束の全空間を考えるとどのような事が起こるかということについて議論する。Brion-Luna-Vust [BLV] の局所構造定理より群作用は局所的にはより小さな群作用上のベクトル束として書けるのでこのような結果は基本的に群作用のある空間上の同変な整閉イデアルの構造をよりトーラスに近い小さな群に制限するとどのように切り出せるかという問題を問うていることになる。結果そのものは一般的ではあるが、きれいな球多様体上の同変ベクトル束の構造が分かるということを法として書かれているので、現

[1]日本学術振興会特別研究員ＰＤ (15-10371)
[2]類似の事を博士論文にする為に研究中の人がいると聞いたのでひょっとしたら本物は出ないかもしれません。その場合は申し訳ありませんがご了承ください。

時点での現実的な応用は限られている。しかし、もっとも基本的な例のひとつである $G = GL_n \times GL_m, X = M_{n,m}$ については [K03a] の記述によりわれわれの議論が機能することが分かる。そこで、特にこの場合の一部がどのような条件で記述されるかを §4 で書き下す。そしてひとつの応用として Brion によって予想されたアフィン球多様体上の整閉イデアルの積の全射性の $V \times M_{n,m}$ の場合の証明のスケッチを §5 で与える。

以下、$G$ である複素数体上の連結代数群、$B, T$ でそのある Borel 部分群とその極大部分トーラス、$X$ である $G$-球多様体をそれぞれ表すものとする。

## 2 局所構造定理とトロイダル解消

この節の定理の内容は全て基本的によく知られたことで、教科書的な文献としては [Br97] や [Kn91] がある。

**定理 2.1.** *$G$ のある parabolic 部分群 $P$ と $X$ のある局所閉集合 $Z$ が存在して次を満たす: $P = LU$ を $P$ の Levi 分解で $T \subset L$ となるものとすると、*

- *$Z$ は $L$ 作用で安定。*
- *$[L, L]$ は $Z$ に対して自明に作用。*
- *$P \times_L Z \to X$ は $X$ のアフィン開集合。*

*を満たすものが存在する。*

**定義 2.2.** 「$X$ の $B$-軌道の閉包がある $G$-軌道をふくむ $\Rightarrow$ その $B$-軌道の閉包は実はある $G$-軌道の閉包に一致」という条件が成り立つとき、$X$ をトロイダル球多様体と呼ぶ。

**注意 2.3.** 上の定義におけるトロイダル球多様体は局所的にトーラス埋め込みの族で書けるということを意味するので、[TE73] の意味でのトロイダル埋め込みでもある。

**命題 2.4.** *$X$ がトロイダルであると仮定する。すると定理 2.1 において $X$ の一般点での固定化群を $H$ とおいて $P = \{g \in G; gH \subset BH\}$ と取れる。*

**定理 2.5.** *あるトロイダル $G$-球多様体 $X'$ であって $X' \to X$ という固有な $G$-同変双有理写像を持つものがある。*

この時、$X'$ と写像の組を ($X$ の) トロイダル解消と呼ぶ。

**定義 2.6.** 逆系 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\Lambda := \{X_\lambda \to X :$ トロイダル解消 $\}$、

$$X_\lambda \overset{\pi^\lambda_\mu}{\to} X_\mu \Longleftrightarrow \begin{array}{ccc} X_\lambda & \to & X_\mu \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array} \qquad (G\text{-同変可換図式})$$

によって定め、その pro-object を $X^\infty$ と書いて ($X$ の) 普遍トロイダル解消と呼ぶ。また、自然に存在する射 $X^\infty \longrightarrow X$ の事を $\pi^\infty$ によって表す。

**注意 2.7.** $X^\infty$ は極めて特殊な場合 (e.g. ランクが 1 等) を除いて代数多様体にはなりえない。

$\Lambda' \subset \Lambda$ であってその元 $\mu \in \Lambda'$ は

$$\exists\lambda \in \Lambda, X_\lambda \to X_\mu \Longrightarrow \lambda \in \Lambda'$$

を満たすものを t-閉な部分集合と呼ぶ。

t-閉な部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ に対し $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ という $X_\lambda$ 上のベクトル束の族と $\{\mathcal{E}_\lambda \overset{\cong}{\to} (\pi^\lambda_\mu)^* \mathcal{E}_\mu\}_{\lambda,\mu\in\Lambda'}$ という ($\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ 上の)$G$-同変ベクトル束の同型の族の組を、十分小さな t-閉部分集合上での同型で割ったものを $X^\infty$ 上の同変ベクトルバンドルと呼ぶ。

一般に固有な双有理射 $f : V \to W$ に対して $f_*\mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_W$, $f^*\mathcal{O}_W \cong \mathcal{O}_V$ が成立するので、上の概念をある $X_\lambda$ からの射を受ける t-閉集合の空でない部分集合に対して適用すると $X_\lambda$ 上のベクトル束が得られることから、これが「正しい」ベクトル束の定義であることが分かる。

# 3 バンドル化可能性

$\mathcal{V}$ を $X$ 上の $G$-同変ベクトル束とする。そのとき、ベクトル束 $\mathcal{V}$ の全空間 $X_\mathcal{V}$ を、以下で定義する。

$$X_\mathcal{V} := \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_X} \bigoplus_{n\geq 0} Sym^n \mathcal{V}^\vee.$$

このとき、$X_\mathcal{V}$ は $G$ の作用と可換なファイバー方向のスカラー作用を持つので、$\mathbb{G}_m \times G$-多様体となる。以下、$H := \mathbb{G}_m \times G$ とおく。

**注意 3.1.** もしも $X$ が固定点を持つアファイン $G$-球多様体であれば $X$ 上のベクトル束は $X$ とある $G$-表現 $V$ の直積であることが知られている。(Equivariant Serre Theorem)

さて、$G$-同変な射 $f : Y \to X$ に対して $f^*\mathcal{V}$ は $Y$ 上の同変ベクトル束になる。この時簡単のため $Y_{f^*\mathcal{V}}$ を $Y_\mathcal{V}$ とも書く。この時、$X_\mathcal{V}$ の $H$-同変イデアル層 $\mathcal{I}$ は $\mathbb{G}_m$-作用によって次のように分解する。

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{I}(n) \subset \bigoplus_{n\geq 0} Sym^n \mathcal{V}^\vee$$

ここで、2つめの包含関係は $\mathcal{I}(n) \subset Sym^n\mathcal{V}^\vee$ から誘導されている。以上の設定で次が成立する。

**定理 3.2.** $X_\mathcal{V}$ 上の任意の $H$-同変整閉同変イデアル $\mathcal{I}$ と任意の正整数 $n$ に対して適当なトロイダル解消 $\pi : X' \to X$ が存在して $\pi^*\mathcal{I}(p) \subset \pi^*Sym^p\mathcal{V}^\vee$ が $0 \leq p \leq n$ の時にベクトル束同士の包含関係であるようにすることができる。

**系 3.3.** $X_\mathcal{V}$ 上の任意の $H$-同変整閉同変イデアル $\mathcal{I}$ は $X_\mathcal{V}^\infty$ 上の $H$-同変ベクトル束の列で表される。

# 4　$G = GL_n \times GL_m$, $X = M_{n,m}$ の場合

この場合には $X$ は固定点を持つ $G$-球多様体であるので $X$ 上の $G$-同変ベクトル束とは $G$-加群 $V_0$ と $X$ の直積の事である。以下では簡単のため $V_0 = V \boxtimes \mathbf{C}$ であってしかも $n \leq m$ であると仮定する。すると、簡単な誘導操作により $V_0 \times M_{n,m}$ 上の $\mathbb{G}_m \times GL_n \times GL_m$-同変イデアル層を与えることと $V_0 \times M_{n,n}$ 上の $\mathbb{G}_m \times GL_n \times GL_n$-同変イデアル層を与えることは同値であることが分かる。したがって、以下では $n = m$ を仮定する。この時、Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n$ の行列要素による基底を $\{e_{ij}\}_{i,j}$ とおく。ここで、$t_1, \ldots, t_n$ を変数とする多項式環 $\mathbf{C}[Z] := \mathbf{C}[t_1, \ldots, t_n]$ をとる。さて、$GL_n$ の中で対角行列全体の成す群を $T$ として、$T$ の指標群を $X^*(T)$ とする。この時、$X^*(T)$ の $\mathbf{Z}$-基底 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ を $e_{i,j}$ への $T$ の随伴作用が $\omega_i - \omega_j$ で与えられるように取り、また $t_1, \ldots, t_n$ への $T$ の作用を $t_1$ のウェイトが $-\omega_1$、$t_i (i \geq 2)$ のウェイトが $\omega_{i-1} - \omega_i$ となるように定める。そして、

$\mathfrak{gl}_n \otimes \mathbf{C}[Z]$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{p}$ を

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \begin{cases} e_{i,j} \otimes \mathbf{C}[Z] & \text{if } i \geq j \\ e_{i,j} \otimes \left(\prod_{p=i+1}^{j} t_p\right) \mathbf{C}[Z] & \text{if } i < j \end{cases}$$

によって

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq n} \mathfrak{p}_{i,j}$$

と定める。さて、この時、任意の $\mathfrak{gl}_n$-module$V$ に対して $\mathbf{C}[V \times Z] \cong \mathbf{C}[V] \otimes \mathbf{C}[Z]$ に $\mathfrak{p}$ の作用を $\mathfrak{gl}_n \otimes \mathbf{C}[Z]$ の項別作用の制限で定める。また、$V \times Z$ に $\mathbb{G}_m$-作用を $V$ の元のスカラー倍で定める。

**定義 4.1.** 圏 $\mathcal{C}^V$ を次で定める:
**(Objects)** $\mathbf{C}[V \times Z]$ の $(\mathbb{G}_m, \mathfrak{p})$-不変整閉イデアル。
**(Morphisms)** イデアルの包含関係。

この時、$\mathcal{C}_0^V$ で $V \times X$ 上の $H$-同変整閉イデアルの圏を表すとすると、次が成立する。

**定理 4.2.** ある *essentially surjective* な忠実関手

$$F : \mathcal{C}^V \to \mathcal{C}_0^V$$

が存在する。

証明は基本的には圏 $\mathcal{C}^V$ が $X^\infty$ 上まで持ち上げるとベクトル束になるデータをパラメトライズしていることを前節の議論を用いて示すことによりなされる。

# 5 Brionの問題

(正規) 環 $R$ のあるイデアル $I$ に対して、$\bar{I}$ でその整閉包を表すとする。また、正整数 $q$ に対して $I^q := \{\sum_{j \in J} a_1^j a_2^j \cdots a_q^j; a_1^j, \ldots, a_q^j \in I \text{ for all } j \in J\}$ とおく。$I^q$ はイデアルであるが、一般には $I$ が整閉でも $I^q$ が整閉とは限らない。さて、この設定で Brion [Br91] は彼の不変整閉イデアルの分類において残っている部分として次の問題を提起した。[3](実際にはこれは球関数の積構造の係数に対する条件の一部としても書ける事が [Ru89] 等によって知られている。)

[3]本当はこの言い方は正しくない。彼ははっきりと [Br91] での元々の目標は全射性の証明にあったと言っていた。

**問 1 (Brion の問題).** $X$ はアファイン球多様体であると仮定する。その時、任意の $G$-不変素イデアル $I$ と任意の正整数 $q \in \mathbf{Z}$ に対して、

$$(\bar{I})^q = \overline{(I^q)}$$

は成立するか？

この予想がなぜ大切だと考えられているのかを少し補足する。球多様体というクラスの多様体はいわゆる Luna-Vust 理論 [LV83] によりトーリック多様体の理論に似た襟付き扇 (coloured fan) という言葉で書ける事が知られている。しかし、扇の言葉から球多様体本体の性質 (例えば平滑性) 等を導くのはしばしば困難であり現実に対応する多様体を構成する事を経なければならないことも多い。一方、トーリック・シンプレクティク多様体に関する Delzant の定理 [Del88] の類似は重複度自由なハミルトン多様体に一般化しうると信じられており、実際局所的には球多様体の開集合になっていることまで分かっている。したがって Brion [Br87] によるモーメント凸多面体の構造定理より座標環として与えられた $G$-表現型をもつ (平滑) アファイン球多様体が一意的であれば非可換な Delzant 型定理が得られ[4]るはずで、そちらはもっと直接的に球多様体の分類や構造の記述に役に立つのではないかと期待されている。そのためには座標環の $G$-表現型を決めたときに入りうる積の構造に何か制限を見出すのが妥当なアプローチだと考えられていて、その (球関数のアプローチでの) 先導項の条件が上の予想である。

現在までに、De Concini-Eisenbud-Procesi [DEP]、Ruitenburg [Ru89] 等により、対称空間に付随して現れるアファイン球多様体については上の問題が肯定的であることが知られている。また、De Concini-Procesi [CSV] の意味での完備対称多様体に対してはより精密な予想が Faltings [Fa97] によって立てられ、Chirivi-Maffei [CM04] によって解決された。

**定理 5.1.** $V$ を $GL_n$ のベクトル表現またはその反傾表現としたときに $(GL_n \times GL_m)$-球多様体 $V \oplus M_{n,m}$ について、上の問は肯定的。

**注意 5.2.** $G = GL_n \times GL_m$ かつ $X = M_{n,m}$ のままであれば、非常に古くから知られた結果だが、以下の設定はそこで群作用を $\mathbb{G}_m \times GL_{n-1} \times GL_m$

[4] 厳密にはこれは嘘。なぜなら、多面体、群、一般点の固定群の組が重複度自由ハミルトン多様体を一意に決める事はわかっても、ならばどんな多面体が重複度自由ハミルトン多様体を生むのかは全く分からない‥

に制限して得られる問題と等価である。結果としてより精密な評価が必要になる。

**証明の方針:** 前節に書いたことより、$n = m$ を仮定する。$V \oplus M_{n,n}$ を $M_{n,n}$ 上のベクトルバンドルだと思って前節の関手を用いてイデアルを書き下すと、次のように素イデアルが分類できる。

**補題 5.3.** $\mathbb{P}(M_{n,n})$ の一般元よりランクの低い行列のなす余次元 1 の部分多様体に対応する $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(M_{n,n})}$ の直線束 $\mathcal{L}_1$ と、直積 $V^* \times M_{n,n}$ に対応するベクトル束 $\mathcal{V}_1$ が存在し、任意の $G$-同変ベクトル束 $\mathcal{E}$ である正整数 $p$ に対して $\mathrm{Sym}^p V^* \otimes M_{n,n}^{\infty}$ の部分連接層になっているものに対し、

$$\bigoplus_{x,y\geq 0} \pi_*^{\infty}\mathcal{E}\cdot\mathcal{V}_1^y \subset \bigoplus_{x,y\geq 0} \mathcal{L}_1^x \otimes Sym^{y+p}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(M_{n,n})}}\mathcal{V}_1$$

の大域切断は $\mathbf{C}[V \times M_{n,n}]$ の $H$-不変イデアルを与える。

**補題 5.4.** $X^+$ を $PGL_n$ の *de Concini-Procesi* の意味での *wonderful(=*標準的*)* コンパクト化とする。このとき、$G$-同変な射 $\pi^+ : X^+ \to \mathbb{P}(M_{n,n})$ が存在する。ここで、$X^+$ 上のある直線束 $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ と $PGL_n$ の単位元でのファイバーが $V_0^*$ で与えられるベクトル束 $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ が存在し、次を満たす。

- 直前の補題において $\mathcal{E} = (\pi^{\infty})^* \oplus_{p\geq 0} \pi_*^+\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes p}$ $(1 \leq i \leq n)$ 又は $\mathcal{E} = (\pi^{\infty})^* \oplus_{p\geq 0} \pi_*^+\mathcal{V}_i \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes p}$ $(1 \leq i \leq n)$ とおくと、対応するイデアル $I_1, \ldots, I_{2n}$ は $G$-不変素イデアル。

- 任意の $G$-不変素イデアルは、上のイデアルの高々 2 つの和。*(*素イデアルは自動的に整閉*)*

これらの結果から問題は $M_{n,n}$ 上の $n$ 個の直線束 $\mathcal{L}_i$ と $n$ 個のベクトル束 $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ 達の間の任意の ($\bigoplus_{p,q\geq 0}\mathrm{Sym}^p V^* \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes q}$ 内における) 積が大域切断に全射を導く事を見る事に帰着する。このうち、直線束達の積が大域切断に全射を導くことは注意にもあるように古くから知られているので、積の結合律より **a)** 一般の積と $n$ 個の直線束に対して積が大域切断の全射を誘導すること、**b)** ベクトル束の間のみで閉じた積で、大域切断の全射が誘導されること、の二つを示せば良い。ここで、**b)** は実際には $X^+$ 上の $n$ 個の直線束の場合と同様の議論でできることが分かるので、問題は **a)** に帰着される。そのとき、ベクトル束 $\mathcal{V}_1$ に対応する場合は自明なので、障害はその適当な既約 $G$-部分表現に対して何が起こることになるかを記述するところとなり、結局次節の表現論的な結果に還元される。

# 6 既約因子の射影の非自明性

ここでは、前節の Brion の問題を我々の場合に解くために必要な表現論的な補題を述べる。簡単のため、$S^p$ でベクトル表現の $p$-対称テンソル表現、$\wedge^q$ でベクトル表現の $q$-反対称テンソル表現を表す。

**定義 6.1.** $\lambda, \mu \in X^*(T)$ に対して、二つの半順序 $\leq$ と $\subset$ を以下で定義する。

- $\lambda \leq \mu \Longleftrightarrow \mu \in \lambda + \sum_{i=2}^{n} \mathbf{Z}_{\geq 0}\alpha_i$.
- $\lambda \subset \mu \Longleftrightarrow \mu \in \lambda + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_{\geq 0}\omega_i$.

$V_\lambda$ で最高 $(T\text{-})$ ウェイト $\lambda$ の (上三角 Borel 部分群に対する) 有理 $GL_n$-加群を表すものとする。

**補題 6.2.** 次の $GL_n$-加群の射の合成が非自明と仮定する。

$$S^p \otimes V_\mu \otimes \wedge^q \to S^p \otimes V_{\mu+\gamma} \to V_{\lambda+\mu+\gamma}$$

ここで最初の射は $S^p$ の単位自己準同型と $V_\mu \otimes \wedge^q$ からの射影の積、とする。この時、$\lambda_+ \geq \lambda$ となる $\lambda_+ \in X^*(T)$ であって次を満たすものが存在する:

- $0 \neq V_{\lambda_+ + \mu} \subset S^p \otimes V_\mu$;
- $0 \neq V_{\lambda + \mu + \gamma} \subset V_{\lambda_+} \otimes \wedge^q$;
- $\lambda_+$ は上の二つの性質を満たすウェイトの中で $\geq$ に関して最小な元。

**定理 6.3.** 補題 *6.2* の設定の下で、あるウェイト $\lambda' \leq \lambda_+$ が存在し、次を満たす:

- $0 \neq V_{\lambda' + \mu} \subset S^p \otimes V_\mu$;
- $0 \neq V_{\lambda+\mu+\gamma} \subset V_{\lambda'+\mu} \otimes \wedge^q$;
- 合成写像

$$V_{\lambda+\mu+\gamma} \hookrightarrow V_{\lambda'+\mu} \otimes \wedge^q \hookrightarrow S^p \otimes V_\mu \otimes \wedge^q \to S^p \otimes V_{\mu+\gamma} \to V_{\lambda+\mu+\gamma}$$

は同型。

ここで、$S^p$ を $\mathbf{C}[V \times M_{n,n}] \cong \mathbf{C}[V] \otimes \mathbf{C}[M_{n,n}]$ の中で $\mathbf{C}[V] \otimes \mathbf{C}$ の $p$ 次成分 (の双対) とみなす。すると整閉なイデアル層の大域切断は圏 $\mathcal{C}^V$ の表示から評価できるので、その次数成分を取ることによって得られる $X^+$ 上のベクトル束の大域切断の公式が分かる。以上の設定で上の補題と $\mathbf{C}[M_{n,n}]$ の積構造を組み合わせることによって既約成分ごとの全射が導ける。

**Acknowledgement:** この仕事を始めるきっかけを下さった Claudio Procesi 先生とローマでお世話になった Corrado de Concini 先生、そして彼自身の仕事を紹介してくれた Michel Brion 先生に感謝します。

# 参考文献

[Br87] Michel Brion, Sur l'image de l'application moment, LNM **1296**, 177–192, Springer, Berlin, 1987.

[Br91] Michel Brion, Sur la geometrie des variétés spheriques, *Comm. Math. Helv.* **66** (1991) 237–262.

[Br97] Michel Brion, *Variétés Sphériques*, Grenoble 1997, available at http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/

[BLV] Michel Brion, Domingo Luna, and Thierry Vust, Espace homogèneous sphériques, *Invent. Math.* **84** (1986), no.3, 617–632.

[CM04] Rocco Chirivi, and Andreas Maffei, Projective normality of complete symmetric spaces, math.AG/0206290, to appear

[Del88] Thomas Delzant, Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment, *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), no. 3, 315–339.

[DEP] Corrado de Concini, David Eisenbud, and Claudio Procesi, Young diagrams and determinantal varieties, *Invent. Math.* **56** (1980), no.2, 129–165.

[CSV] Corrado de Concini, and Claudio Procesi, Complete symmetric varieties, LNM **996** (1983) 1–44.

[Fa97] Gerd Faltings, Explicit resolution of local singularities of moduli spaces, *J. Reine Angew. Math.* **483**, 183–196 (1997)

[K03a] 加藤　周, *Equivariant bundles on Group completions*, 博士論文, 東京大学 2003 (a variant is available at math.AG/0202028)

[K03b] Syu Kato, *Integral closure of invariant ideals, toroidal resolution, and equivariant vector bundles*, preliminary draft, Sep/2003

[Kn91] Friedrich Knop, The Luna-Vust Theory of Spherical Embeddings, Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups, December 1989. Madras: Manoj Prakashan (1991) 225-249. available at http://www.math.rutgers.edu/~knop

[LV83] Domingo Luna, and Thierry Vust, Plongements d'espaces homogènes, *Comm. Math. Helv.* **58** (1983), no. 2, 186–245.

[TE73] G. Kempf, Finn Faye Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal embeddings. I. LNM **339**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. viii+209 pp.

[Li69] Joseph Lipman, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Publ. IHES* **36** (1969), 195–280, available at http://www.numdam.org/en

[Ru89] G.C.M. Ruitenburg, Invariant ideals of polynomial algebras with multiplicity-free group action, *Compos. Math.* **71** (1989), 181–228.