

核付アフィン点配置の 根付サーキット系の性質について

筑波大学社会工学系 八森正泰 (Masahiro Hachimori)
Institute of Policy and Planning Sciences,
University of Tsukuba

1 序：核付点配置とその根付サーキット系

本論文では、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 中の 2 組の有限点集合、 $V \cup r$ (r は特別な 1 点を意味する) と T 、の組 $(V \cup r, T)$ を考える。これを T を核とする**核付点配置** (configuration with kernel) と呼ぶ。そして、核付点配置 $(V \cup r, T)$ に対して、集合族 $\mathcal{C}_{(V \cup r, T)} = \text{Min}\{X \cup r : X \subseteq V, \text{conv}(X \cup T) \ni r\}$ をその r を根 (root) とする**根付サーキット系** (system of rooted circuits)、そして、そのそれぞれの要素から r を排除した集合族、すなわち、 $\mathcal{S}_{(V \cup r, T)} = \text{Min}\{X \subseteq V : \text{conv}(X \cup T) \ni r\}$ を **stem clutter** と呼ぶ。ただし、ここで conv は通常ユークリッド空間における凸包作用素、そして、 Min という記号は極小集合を取る操作を意味するものとする。

この stem clutter という名前であるが、**clutter** とは、どの 2 つの集合も互いに包含関係を持たないような集合族の一般名称である。今、 $\mathcal{S}_{(V \cup r, T)}$ の各要素は **stem** と呼ばれるので、stem のなす clutter という意味で、stem clutter と呼んでいる。ちなみに、 $\mathcal{C}_{(V \cup r, T)}$ の方の各要素は**根付サーキット** (rooted circuit) であり、こちらも clutter をなしている。

この核付点配置の stem clutter は、閉集合族の根付サーキット系の stem clutter という、[7] においてより一般的な枠組で議論されている概念の特殊ケースである。ここでは、そこまでの一般化までは言及せず、その代表的な部分クラスである、凸幾何の根付サーキットの stem clutter の例として紹介する。閉集合族の根付サーキットの stem clutter に関する一般論については [7] を参照されたい。一方、これとは別な文脈として、有向マトロイドの正サーキット系の特殊ケースとしても同じ集合族が生じる。本節ではこの 2 つの見方を紹介することによって、核付点配置の stem clutter とは何かということ、および、その研究にはどのような意義があるのか、ということ概観することとする。その後、2 節では核付点配置の stem clutter の性質、特に 2 次元の場合の特徴付けおよび一般の次元における連結成分数について議論し、3 節では、それを用いた応用について紹介する。

1.1 凸幾何とその根付サーキット系

凸幾何 (convex geometry) とは、有限集合 E 上の集合族 $\mathcal{K}$ で、以下の公理を満たすもののことである。

(K1) $\emptyset \in \mathcal{K}$,

(K2) $X, Y \in \mathcal{K} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{K}$,

(K3) $X \in \mathcal{K}, X \neq E \Rightarrow \exists x \in E \setminus X \text{ s.t. } X \cup x \in \mathcal{K}$.

公理 (K1) および (K2) は、 $\mathcal{K}$ が閉集合族であるということを示しており、(K3) はそれに加えて、 $\mathcal{K}$ の要素は 1 要素ずつサイズを大きくすることができるということを示している。凸幾何についての詳細は、[6, 10]などを参照されたい。

凸幾何という概念は、様々な場面で登場する重要な離散構造の 1 つであり、例えば次の例が凸幾何であることがよく知られている。

例 1. ポセット P において、そのイデアルの全体は凸幾何をなす。

例 2. 木 T に含まれる連結部分木の全体は (枝集合を台集合 E として) 凸幾何をなす。

例 3. $\mathbb{R}^d$ 中の有限点集合 V に対して、 $\{\text{conv}(X) \cap V : X \subseteq V\}$ は凸幾何をなす。

例えば、例 1 が凸幾何の例であることから、ブール束 (べき集合) 上の概念をポセット上に一般化し、さらに一般化をする場合に、凸幾何上で考えるというのは自然な一般化の 1 つであり、そうした議論は [1] や [8] などに見られる。

また、凸幾何 $\mathcal{K}$ の補集合族、すなわち、 $\mathcal{A} = \{E - X : X \in \mathcal{K}\}$ は、**アンチマトロイド** (antimatroid) という名前で知られており、これは**グリードイド** (greedoid) と呼ばれる概念の部分クラスである。グリードイドは貪欲算法との関連で提唱された概念であると同時に、マトロイドなども含む非常に一般化された枠組であり、アンチマトロイド/凸幾何についてもこの文脈で多くの研究がされている。[3, 10]を参照されたい。

凸幾何 $\mathcal{K}$ は、

$$\begin{aligned} \tau : 2^E &\longrightarrow 2^E \\ X &\longmapsto \bigcap \{Y \in \mathcal{K} : X \subseteq Y\} \end{aligned}$$

という自然な閉包作用素を持っており、これを用いて、端点作用素 (extreme point operator) を

$$\begin{aligned} \text{ex} : 2^E &\longrightarrow 2^E \\ X &\longmapsto \{x \in X : \tau(X) \neq \tau(X \setminus x)\} \end{aligned}$$

のように定義することができる。ここで、 $\text{ex}(X) = X$ を満たす集合は自由集合 (free set) と呼ばれ、その全体は独立集合族、すなわち、部分集合で閉じた集合族となることが知られている。(注: $\text{ex}(X) = \tau(X)$ を満たす集合のことを自由集合と呼んでいる論文もあるので、少し注意が必要である。) 一般に、独立集合族はサーキットの族、すなわち、独立集合でない極小な集合の族、によって一意に決定されるため、独立集合族を考える場合には、そのサーキットの族も同時に考えるのが一般的である。したがって、凸幾何の場合にも、自由集合でない極小な集合の族、すなわち、

$$\mathcal{C} = \text{Min}\{Z \subseteq E : \text{ex}(Z) \neq Z\}$$

の各要素が、 $\mathcal{K}$ のサーキット (circuit) という名前で定義されている。凸幾何 $\mathcal{K}$ は、そのサーキットの集合 $\mathcal{C}$ によって一意に決定されるので、凸幾何を考えることとそのサーキットの集合を考えることは等価である。

凸幾何のサーキット $C \in \mathcal{C}$ は、 $C = X \dot{\cup} r$ 、ただし、 X は自由集合で、 $r \in \text{conv}(X)$ 、という形をしていることが知られている。この r をサーキット C の根 (root) という。根を固定したサーキットの集合 $\mathcal{C}_r = \{X \dot{\cup} r : X \dot{\cup} r \text{ は } r \text{ を根とするサーキット}\}$ を $\mathcal{K}$ の根付サーキット系、 $\{X : X \dot{\cup} r \text{ は } r \text{ を根とするサーキット}\}$ をその stem clutter という。

凸幾何については、次の表現定理が知られている。

定理 1.1. [9] ユークリッド空間中の核付点配置 (V, T) に対して、 $V \cap \text{conv}(T) = \emptyset$ の場合、

$$\mathcal{K}_{(V, T)} := \{X \subseteq V : \text{conv}(X \cup T) \cap V = X\}$$

は凸幾何である。逆に、任意の凸幾何 $\mathcal{K}$ に対して、ある次元のユークリッド空間中の核付点配置で、 $\mathcal{K}_{(V, T)}$ が $\mathcal{K}$ と同型であるものが存在する。

この定理の前半は以前から知られていた言明であり (例えば [3, p. 351, Ex. 8.13])、後半が [9] によって示された部分である。

実は、この表現を用いた場合、凸幾何の $r \in V$ を根とする根付サーキット系およびその stem clutter は、核付点配置 $(V' \cup r, T)$ の根付サーキット系および stem clutter と一致することが分かる。(ただし、 $V' = V \setminus r$ 。) つまり、核付点配置の stem clutter について調べるということは、凸幾何をこの幾何学的表現の下で、特定の点を根とするサーキットの性質から調べるということなのである。これは大雑把にいうと、凸幾何の性質を、特定の点の周辺の局所的な性質を元に議論していくという視点を、幾何学的手法を用いて与えるものということができるだろう。

1.2 有向マトロイドの正サーキット系とそのマイナー

有向マトロイドとは、マトロイドに正負の符号をつけた離散構造で (注: すべてのマトロイドを有向マトロイドに符号付けできるわけではない)、点配置、超平面アレンジメント、ゾノトープなどの種々の幾何学的対象を組合せの抽象化したものであり、凸多面体の研究やトポロジー的組合せ論においても大きな役割を果たす重要な概念である。詳細は [2] を参照されたい。

有向マトロイドはマトロイドと同様に、多くの等価な公理系で記述されるが、次に挙げるのはサーキットの公理系である: 台集合 E 上の符号ベクトルの集合 $\mathcal{C} \subseteq \{+, -, 0\}^E$ が次の公理を満たすとき、 $\mathcal{C}$ は有向マトロイドのサーキット系である。

$$(C0) \quad 0 \notin \mathcal{C},$$

$$(C1) \quad C \in \mathcal{C} \Rightarrow -C \in \mathcal{C},$$

$$(C2) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C} \text{ のとき、 } \underline{C_1} \subseteq \underline{C_2} \Rightarrow C_1 = C_2 \text{ または } C_1 = -C_2,$$

$$(C3) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C} \text{ かつ } x \in C_1^+ \cap C_2^- \\ \Rightarrow \exists C' \in \mathcal{C} \text{ s.t. } C'^+ \subseteq C_1^+ \cup C_2^+ \setminus x \text{ かつ } C'^- \subseteq C_1^- \cup C_2^- \setminus x.$$

ただし、ここで、 $C \in \{+, -, 0\}^E$ を $C^+ = \{e \in E : C_e = +\}$ および $C^- = \{e \in E : C_e = -\}$ の組 (C^+, C^-) と同一視している。また、 $-C$ は C の $+$ と $-$ を入れ換えたものであり、 $\underline{C} = C^+ \cup C^-$ である。有向マトロイドのサーキット系から符号を取り除いたもの、つまり、 $\underline{\mathcal{C}} = \{\underline{C} : C \in \mathcal{C}\}$ がマトロイドのサーキット系となることは簡単に確かめられるだろう。

例 4. 有向グラフにおいて、サーキットを向きを込めて考える。すなわち、(向きを考えない) サーキット $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \cdots v_k \xrightarrow{e_k} v_1$ において、 e_i が v_i から v_{i+1} の方向に向きを持っていたら i 番目の要素を $+$ 、逆向きなら $-$ とする符号ベクトルの集合を考える。この符号ベクトルの全体は有向マトロイドのサーキット系であり、このようにして有向グラフからできる有向マトロイドは**グラフ的** (graphic) であるという。グラフ的な有向マトロイドの符号を取り除いて得られるマトロイドは**グラフ的マトロイド**である。

例 5. ユークリッド空間中において、有限個のベクトルの集合 V を考える。このとき、 $\sum_{v_i \in V} \lambda_i v_i = 0$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) となる係数ベクトル $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に対して、その符号のベクトルを対応させ、こうして現れるすべての符号ベクトルの中で、support (符号が 0 でない添字集合) が極小であるものを集めてきたものは、有向マトロイドのサーキット系となる。このようにしてできる有向

マトロイドは**実現可能** (realizable) であるという。グラフ的な有向マトロイドは、隣接行列 ($V \times E$ の行列 A で、 $e = v \rightarrow w$ の場合に $A_{v,e} = 1$ 、 $A_{w,e} = -1$ 、それ以外の要素は 0) を縦ベクトルの集合と考えれば、実現可能であることが分かる。実現可能な有向マトロイドの符号を取り除いて得られるマトロイドは $\mathbb{R}$ 上のベクトルマトロイド (vector matroid) である。

有向マトロイドのサーキットの中で、成分が $+$ と 0 のみであるものを**正サーキット** (positive circuit) という。有向マトロイドの正サーキット系は、例えばグラフ的な場合には、feedback arc set (取り除くと acyclic になるような枝集合) の族の blocker (与えられた集合族の任意の集合と交わりを持つ極小集合の族) に対応し、feedback arc set の最小サイズを求める「feedback arc set problem」とも関連する重要な対象である。

例 5 の実現可能な有向マトロイドの場合、正サーキットとは、 $\sum_{v_i \in V} \lambda_i v_i = 0$, $\lambda_i \geq 0$ となる係数ベクトル $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ の符号のベクトルで、 $+$ の数が極小なものことにあたる。これは、言い換えると、 $\text{conv}(\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}) \ni 0$ を満たす極小な集合 $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ を $+$ とし、他を 0 とする符号ベクトルのことである。すなわち、核付点配置 $(V \cup 0, T)$ の (原点 0 を根とする) stem clutter は、 $T = \emptyset$ の場合には、ベクトル配置 V の与える実現可能な有向マトロイドの正サーキットの集合に他ならない、ということである。

有向マトロイドにおいて、その符号を取り除いたマトロイド ($\underline{C}$ をサーキット系とするマトロイド) のランクを有向マトロイドの**ランク** (rank) という。これは、 $\underline{C} \in \underline{C}$ を含まないような E の部分集合の最大サイズのことであるが、実現可能な場合は、実現しているベクトル配置を含む最小の線形空間の次元と等しい。したがって、 $\mathbb{R}^d$ 中の核付点配置 $(V, \emptyset)$ の stem clutter は、ランクが高々 d の実現可能な有向マトロイドの正サーキット系と対応することになる。

それでは、 T が非空の場合には核付点配置の stem clutter は何にあたるのだろうか。これを説明するためには、clutter のマイナーという概念を導入する必要がある。

一般に、clutter $\mathcal{C}$ と台集合の要素 e に対して、次の 2 つの操作が定義されている。

$$\mathcal{C} \setminus e = \{X : X \in \mathcal{C}, e \notin X\},$$

$$\mathcal{C}/e = \text{Min}\{X \setminus e : X \in \mathcal{C}\}.$$

これらはそれぞれ**除去** (deletion) および**縮約** (contraction) と呼ばれており、この 2 つの操作を繰り返して得られる集合族を $\mathcal{C}$ の**マイナー** (minor) と呼ぶ。一般にこの 2 種類の操作は可換であるため、 $\mathcal{C}$ のマイナーは

$$\mathcal{C} \setminus A/B$$

と表記することができる。Clutter のマイナーについての詳細は、[4]などを参照されたい。

さて、ここで核付点配置 (V, T) の stem clutter のマイナーがどのようなものになるかということを考えてみる。まず、除去の方は簡単である。すなわち、 $A \subseteq V$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(V \cup r, T)} \setminus A &= \text{Min}\{X \subseteq V : \text{conv}(X \cup T) \ni r\} \setminus A \\ &= \text{Min}\{X \subseteq V : \text{conv}(X \cup T) \ni r, X \cap A = \emptyset\} \\ &= \text{Min}\{X \subseteq (V \setminus A) : \text{conv}(X \cup T) \ni r\} \\ &= \mathcal{S}_{((V \setminus A) \cup r, T)}. \end{aligned}$$

つまり、 A の除去とは、 V を $V \setminus A$ に置き換える、すなわち、 A にあたる点集合を取り除くことに対応する。一方、縮約の方は少し証明は困難であるが、

$$\mathcal{S}_{(V \cup r, T)} / B = \mathcal{S}_{((V \setminus B) \cup r, T \cup B)}$$

となる。つまり、 B の縮約とは、 B にあたる点集合を核にすることに対応することを示すことができる。(証明法としては、例えば、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \text{Min}\{X \setminus B : X \in \text{Min}\{Y \subseteq V : \text{conv}(Y \cup T) \ni r\}\} \\ &= \text{Min}\{X \setminus B : X \in \{Y \subseteq V : \text{conv}(Y \cup T) \ni r\}\} =: \text{Min } \mathcal{X} \\ \text{右辺} &= \text{Min}\{X \subseteq V \setminus B : \text{conv}(X \cup T \cup B) \ni r\} =: \text{Min } \mathcal{Y} \end{aligned}$$

であることに着目し、 $\forall X \in \mathcal{X}$ に対して $X \subseteq \exists Y \in \mathcal{Y}$ 、および、 $\forall Y \in \mathcal{Y}$ に対して $Y \subseteq \exists X \in \mathcal{X}$ を示せばよい。)

これらの事柄を総合すると、核付点配置 $(V \cup 0, T)$ の (原点 0 を根とする) stem clutter を調べるということは、実現可能な有向マトロイドの正サーキット系の (clutter としての) マイナーを調べることに他ならない、ということが分かる。

(有向マトロイドのマイナーという概念もあるが、これはここで紹介した clutter のマイナーとは異なるものであることに注意が必要である。すなわち、有向マトロイドのマイナーの正サーキット系と、有向マトロイドの正サーキット系のマイナーは異なるものである。)

Clutter のマイナーは、3節で触れることになる MFMC、packing property、idealness といった、組合せ最適化に関する性質を議論する上で重要な概念であり ([4] 参照)、核付点配置の stem clutter という概念は、(実現可能) 有向マトロイドの正サーキット系に対してそれらを調べる上で幾何学的な視点を与えるものと言える。

マトロイドに実現可能でないマトロイドがあるように、有向マトロイドにも実現可能でないものが存在する。しかし、有向マトロイドの場合には Folkman のトポロジック表現定理 ([2] 参照) があるため、その差はある面では (もちろん、異なる場面も多くあるが)それほど大きいものではない。したがって、実現可能な有向マトロイドのクラスは有向マトロイドの重要な一例であるだけでなく、対象として十分に広いクラスでもある。特に、有向マトロイド一般の正サーキット系を調べる上で、stem clutter を通した実現可能なクラスに対しての幾何学的な考察から有向マトロイド一般に対する洞察を得ることは、重要な手法の1つとなる。

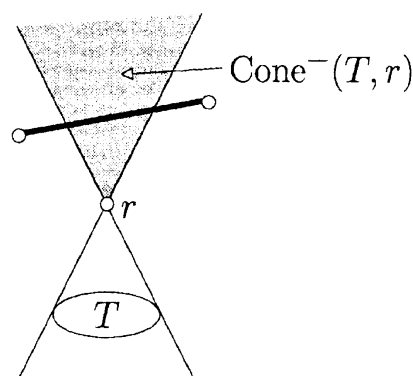
2 核付点配置の stem clutter の諸性質

本節では、議論を統一的にするため、 $\mathbb{R}^d$ 中の核付点配置 $(V \cup r, T)$ を考える際、 $T \neq \emptyset$ であることを仮定する。 $T = \emptyset$ の場合には、空間の次元を1つ上げ、 $\mathbb{R}^d$ の外側に $T = \{t\}$ をおけば、同型な stem clutter を持ち $T \neq \emptyset$ である核付点配置を与えることができるので、次元が1つずれることに留意すれば、本節の議論はそのまま $T = \emptyset$ の場合にも流用することが可能である。

本節では、核付点配置の stem clutter の諸性質を調べて行きたいのだが、そのために、まず、各 stem が核付点配置の中でどのような形で存在しているのかを見る必要がある。次の命題はこれに答えるものである。ただし、命題中に現れる $\text{Cone}^-(T, r)$ は、

$$\text{Cone}^-(T, r) = \{(1 - \lambda)r + \lambda t : \lambda \leq 0, t \in \text{conv}(T)\}$$

で定義される錐であり、これは、 r に対して $\text{conv}(T)$ の反対側にのびる錐のことである。



命題 2.1. 核付点配置 $(V \cup r, T)$ において、 $X \subseteq V$ に対して以下は同値。

- (i) X は stem である。すなわち、 X は $\text{conv}(X \cup T) \ni r$ を満たす極小集合である。
- (ii) $\text{conv}(X)$ は単体で、 $\text{Cone}^-(T, r)$ との交わりは $\text{conv}(X)$ の相対的内部である。

(証明).

- 「 X は $\text{conv}(X \cup T) \ni r$ を満たす極小集合」
- $\Leftrightarrow$ 「 X は $\sum_{x_i \in X} \lambda_i x_i + \sum_{t_j \in T} \mu_j t_j = r$ と書ける極小集合、ただし、 $\sum \lambda_i + \sum \mu_j = 1, \lambda_i, \mu_j \geq 0$ 。」
- $\Leftrightarrow$ 「 X は、 $x \in \text{conv}(X)$ と $t \in \text{conv}(T)$ によって、 r が線分 $\overline{xt}$ 上にのるようにできるような極小集合」
- $\Leftrightarrow$ 「 X は $\text{conv}(X)$ が $\text{Cone}^-(T)$ と交わるような極小集合」

であるので、ここから言明がしたがう。 □

ここで、(ii) の条件を満たす単体は full-dimensional ではあり得ないことから、次の系が出てくる。

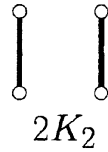
系 2.2. $\mathbb{R}^d$ 中の核付点配置 $(V \cup r, T)$ の stem X に対して、 $|X| \leq d$ 。
($T = \emptyset$ の場合には $|X| \leq d + 1$ 。)

この系の言明は他にもいろいろ示す方法があり、例えば、[7] では凸多面体の三角形分割に基づく方法が紹介されている。また、1.2 節の対応による有向マトロイドの言葉で、より一般に、(実現可能とは限らない) 有向マトロイドに対して示すことも可能である。

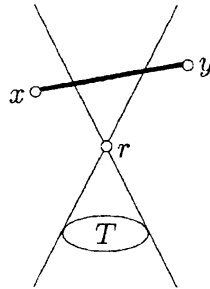
命題 2.1 は、stem clutter の性質を議論する上で非常に役に立つ、基本的な考察である。例えば、次に紹介する $\mathbb{R}^2$ 中の核付点配置の stem clutter の特徴付けを与える定理の証明の中でも、証明を分かりやすくする役割を担っている。

$\mathbb{R}^2$ 中の核付点配置 $(V \cup r, T)$ の stem clutter $\mathcal{S}_{(V \cup r, T)}$ の場合、系 2.2 により、各 stem のサイズは 1 か 2 であり、したがって、グラフとみなすことができる。つまり、 $\mathcal{S}_{(V \cup r, T)}$ の台集合上のグラフで、サイズ 2 の stem を枝、サイズ 1 の stem を孤立点とするグラフである。このとき、次の定理のように、 $\mathbb{R}^2$ 中の核付点配置の stem clutter となり得るグラフを特徴付けることができる。(この定理は、[7] でも紹介されている。)

定理 2.3. グラフ G が $\mathbb{R}^2$ 中の核付点配置 $(V \cup r, T)$ の stem clutter であることと、二部グラフでかつ $2K_2$ を誘導部分グラフに含まないことは同値である。

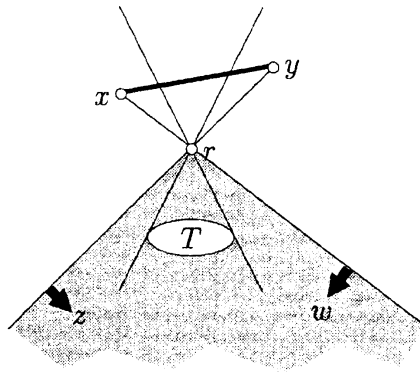


(証明). グラフの各枝 (サイズ 2 の stem) は、命題 2.1 より、次図の $\{x, y\}$ のように配置されないといけない。つまり、片方の点が左側の領域、もう片方が右側の領域に入る。このことから、二部グラフであることは簡単に分かる。



次に、2次元核付点配置の stem clutter が $2K_2$ を誘導部分グラフに含まないことを示す。そのために、4点 $\{x, y, z, w\}$ に制限したときに、clutter が $\{\{x, y\}, \{z, w\}\}$ になると仮定してみる。 $\{x, y\}$ が stem なので、 x と y は先の図のように配置される。 $(x$ は左側の領域、 y は右側の領域。)

z と w に関しても x と y と同様に、片方が左側、もう片方が右側に入ることになるが、一般性を失わず、 z が左側、 w が右側としておく。ここで、 $\{x, w\}$ および $\{y, z\}$ が stem でないことから、 w と z は次の図の場所に来ることになる。(線上は含まない。)

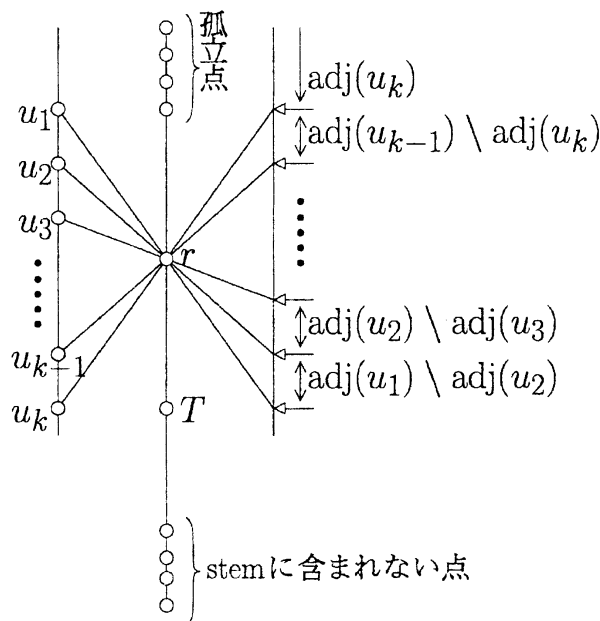


しかし、上の影をつけた領域は凸集合であり、その内部に T 、 w および z が存在しているが、 r がその領域内に存在していないので、 $\{w, z\}$ が stem であることに反し ($\text{conv}(\{w, z\} \cup T) \ni r$ にならない)、矛盾である。

逆に、 $2K_2$ を誘導部分グラフに含まない二部グラフが 2 次元核付点配置の stem clutter として実現可能であることを示す。二部グラフに対しては、2 つの部集合を U と W とすると、片方の部集合 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ に対して、頂点を適当に並び替えることによって、

$$\text{adj}(u_1) \supseteq \text{adj}(u_2) \supseteq \dots \supseteq \text{adj}(u_k)$$

のように、各頂点 u_i の隣接頂点集合 $\text{adj}(u_i)$ が単調になることと、 $2K_2$ を誘導部分グラフに含まないことが同値であることが簡単に示せる。これに注意すると、次の図によって、条件を満たすグラフは 2 次元核付点配置の stem clutter として実現できることが簡単に確認できる。(W の各頂点は右端の縦線上に、図に指定されているように置く。)



□

ランク 2 の有向マトロイドはすべて実現可能であることから、この定理は、有向マトロイドの範囲でも成立していることに注意しておく。

定理 2.3 から、 $\mathbb{R}^2$ 中の核付点配置の stem clutter の孤立点を除いた部分は連結であることが分かる。この性質を一般の次元に拡張すると、次の定理のようになる。

定理 2.4. $\mathbb{R}^d$ 中の核付点配置の stem clutter において、各連結成分の要素のサイズの最大値を a_i とすると、 $\sum (a_i - 1) \leq d - 1$ が成り立つ。
(これは、より一般に、ランクが高々 d の (実現可能とは限らない) 有向マトロイドの正サーキット系を 1 点以上縮約したマイナーについて成り立つ。)

(証明). 証明は、1.2 節の対応によって、有向マトロイドの言葉で行なう。

$X_1, X_2, \dots, X_k$ を、互いに異なる連結成分に属する stem とし、この stem clutter が r を原点とする点配置 $(V \cup r, T)$ によって実現されているとする。特に、 $X_1, X_2, \dots, X_k, T$ は互いに交わらないことに注意しておく。対応する有向マトロイドにおいては、 X が stem であることと、 X がある $T' \subseteq T$ に対して $(X \cup T', \emptyset)$ というサーキットを構成するような極小集合である (T' は空集合でもよい) ことが同値である。((X, Y) という表記は、 X が正の成分を持つ添字の集合、 Y が負の成分を持つ添字の集合を表している。1.2 節参照。) したがって、サーキット系の中に、

$$(X_1 \cup T_1, \emptyset), (X_2 \cup T_2, \emptyset), \dots, (X_k \cup T_k, \emptyset)$$

というサーキットが存在するはずである。ただし、ここで、 $T_i \subseteq T$ ($1 \leq i \leq k$) である。そして、 $(|X_1| - 1) + \dots + (|X_k| - 1) \geq d$ と仮定して、矛盾を導く。

まず、各 X_i から要素 y_i を選び、 $X'_i = X_i \setminus y_i$ とし、また、 T から要素 t を 1 つ選ぶ。すると、仮定から、集合 $X'_1 \cup X'_2 \cup \dots \cup X'_k \cup t$ のサイズは $d+1$ 以上である。したがって、あるサーキット C で、 $C^+ \cup C^- \subseteq X'_1 \cup X'_2 \cup \dots \cup X'_k \cup t$ を満たすものが存在するはずである。(有向マトロイドにおいて、ランクよりサイズの大きい集合はサーキットを必ず含む。)

この C において、公理 (C1) を利用することにより、一般性を失わずに

$$C^+ = \{t, x_1, x_2, \dots, x_a\} \text{ または } \{x_1, x_2, \dots, x_a\}, \quad C^- = \{z_1, z_2, \dots, z_b\}$$

であると仮定できる。($\{x_1, \dots, x_a, z_1, \dots, z_b\} \subseteq X'_1 \cup \dots \cup X'_k$ となっている。 T からの要素が高々 1 つであるため、 C^- に T の要素が入らないように C を選べる、という所がポイントである。) ここで、 $z_1 \in X_{j_1}$ であるような j_1 に対して、 C と $(X_{j_1} \cup T_{j_1}, \emptyset)$ の 2 つがサーキットであることに着目する。今、 $z_1 \in (X_{j_1} \cup T_{j_1}) \cap C^-$ なので、これに (C3) を適用すると、サーキット C_1 で、

$$C_1^+ \subseteq C^+ \cup (X_{j_1} \cup T_{j_1}) \setminus z_1, \quad C_1^- \subseteq C^- \cup \emptyset \setminus z_1 \subseteq \{z_2, \dots, z_b\}$$

を満たすものが存在する。さらに、 C_1^- の 1 つの要素に対して同様に (C3) を適用してサーキット C_2 を得、 C_2^- の 1 つの要素に適用してサーキット C_3 を得、…、と繰返し、最終的に得られるサーキットを C' とすると、

$$\begin{aligned} C'^+ &\subseteq \{t, x_1, \dots, x_a\} \cup (X_{j_1} \cup T_{j_1}) \setminus z_{l_1} \cup \dots \cup (X_{j_p} \cup T_{j_p}) \setminus z_{l_p} \\ &\subseteq \left(T \cup \bigcup_{i=1}^k (X_i \setminus y_i) \right) \cup X_{j_1} \setminus z_{l_1} \cup X_{j_2} \setminus z_{l_2} \cup \dots \cup X_{j_p} \setminus z_{l_p}, \\ C'^- &= \emptyset \end{aligned}$$

が満たされることになる。ただし、 $\{z_{l_1}, \dots, z_{l_p}\} \subseteq \{z_1, \dots, z_b\}$ で、 $z_{l_1}, \dots, z_{l_p}$ は (C3) を適用する対象となった要素達であり、 $1 \leq i \leq p$ において $z_{l_i} \in X_{j_{l_i}}$ である。

いま、上の条件を満たすサーキット C' の存在が分かったが、この性質を満たすサーキット C'' で、 $C''^+ \setminus T$ が最小のものを選ぶ。このとき、 $C''^+ \setminus T$ は stem であるが、 $X_1, \dots, X_k$ とは異なることが分かる。ここで、 $C''^+ \setminus T \subseteq (\bigcup_{i=1}^k X_i)$ が成り立っているが、ある1つの添字 i について $C''^+ \setminus T \subseteq X_i$ となることはない。なぜなら、 $C''^+ \setminus T = X_i$ ではなく、また、もし $C''^+ \setminus T \subsetneq X_i$ が成り立つとすると、 X_i が stem であることに反するからである。しかし、 $C''^+ \setminus T \subseteq X_i$ がどの i についても成り立たないとすると、 $C''^+ \setminus T$ が2つ以上の X_i にまたがる stem であることになるので、stem clutter において $X_1, X_2, \dots, X_k$ が異なる連結成分に属するというに反し、矛盾である。□

この定理の証明は、定理 2.3 のような方法で幾何学的に証明することも可能であるが、少しややこしく、上のように有向マトロイドの言葉で証明するのが簡明である。また、実現可能でない場合にも適用できる証明となっている。ただし、この言明は幾何学的な発想から生まれたものであり、有向マトロイドによる証明はそれを簡明に証明するために後から作られたものである、ということをつ記しておく。

この定理によって、 d 次元の核付点配置の stem clutter の連結成分数については情報が得られたが、まだ定理 2.3 のような完全な特徴づけは d 次元では知られておらず、その特徴付けは大きい open problem の1つである。しかし、この定理による部分的な情報からでも、ある程度 d 次元核付点配置の stem clutter について議論することができることがあり、そうした例を、次の節で紹介する。

3 Minimally nonideal circulant clutters

Clutter $\mathcal{C}$ において、隣接行列 $A(\mathcal{C})$ を、行の添字を $\mathcal{C}$ の各要素、列の添字を台集合の各要素として、 $\mathcal{C} \ni v$ のときに $(\mathcal{C}, v)$ 成分が 1、それ以外は 0 である行列とする。

$$\mathcal{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & & v_3 \\ \text{---} \circ \text{---} & & \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} & & \text{---} \circ \text{---} \\ v_2 & & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{cc} C_1 & C_3 \\ \text{---} & \text{---} \\ C_2 & \end{array} \end{array} \longrightarrow A(\mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ C_1 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ C_2 & \\ C_3 & \end{array} \end{array}$$

このとき、

$$\begin{aligned} A(C)x &\geq 1, \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

の定める多面体が整数多面体であるとき、 C を **ideal clutter** であるという。Clutter C が ideal であるとき、そのマイナーはすべて ideal であることから、自分自身は ideal ではないが、そのマイナーはすべて ideal である clutter を全て知ることができれば、ideal clutter と nonideal clutter を区別することができることになる。このような、自分自身は ideal ではないが、そのマイナーはすべて ideal であるような clutter は、**minimally nonideal clutter** と呼ばれている。

Clutter の idealness という概念は、packing property、MFMC (max-flow min-cut property) といった概念と関係があり、次のようになっている。

$$\text{ideal} \Leftarrow \text{packing property} \Leftarrow \text{MFMC}$$

これらの概念は、例えば「最大流最小カットの定理」などを一般化したものであり、よい性質を持つ組合せ構造の代表例である。それぞれの概念の定義やその詳細については [4] を参照して欲しい。

点配置 (核 $T = \emptyset$) の stem clutter については、2次元の場合の MFMC 性の特徴づけが [7] で次のように与えられている。

定理 3.1. ([7]) 2次元の点配置の stem clutter が MFMC であることの必要十分条件は、 $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 1\}, \{5, 1, 2\}\}$ と同型な clutter をマイナーに含まないことである。

これは、(1つの禁止マイナーによる) 禁止マイナー型特徴づけとなっており、非常にきれいな定理である。(核付点配置およびその一般的枠組である有向マトロイドにおけるこれに類した結果としては、柏原賢二・佐久間雅がコランク ≤ 4 の有向マトロイドの正サーキット系に対して特徴づけを行なっている (未出版、personal communication)。上の定理はランク 2 の有向マトロイドの正サーキット系の MFMC 性の特徴づけであり、ランクが小さい場合を扱ったものである。一方、柏原・佐久間の結果は逆にランクが非常に大きい場合を扱ったものである。)

例えば、上の定理の高次元版を考える場合、どのような minimally nonideal clutter が核付点配置の stem clutter として実現できるかを知ることが、ある程度役に立つ。というのは、それらは nonMFMC でもあるため、禁止マイナーとして除外される (禁止マイナーの集合に入れられるか、他の禁止マイナーによって取り除かれる) 必要があることが分かるためである。

そこで、ここでは、3次元の核付点配置について、その stem clutter として実現され得る minimally nonideal clutter はどのようなものかを考えてみたい。しかし、この問題は、3次元に限っているとはいえ、難しい問題であるため、まだ答が得られていない。そこで、部分的な答として、circulant clutter についての結果を紹介する。Circulant clutter $\mathcal{C}_m^k$ とは、

$$\{\{1, 2, \dots, k\}, \{2, 3, \dots, k+1\}, \{3, 4, \dots, k+2\}, \dots, \{m, 1, \dots, k-1\}\}$$

と同型な clutter のことである。(上の定理 3.1 に登場している clutter は $\mathcal{C}_5^3$ にあたる。)

定理 3.2. 3次元の核付点配置 (または、より一般的に、ランクが高々3の有向マトロイドの正サーキット系の、1点以上を縮約したマイナー) の stem clutter として実現される minimally nonideal circulant clutter は、 $\mathcal{C}_3^2$ 、 $\mathcal{C}_5^2$ 、 $\mathcal{C}_7^2$ 、 $\mathcal{C}_5^3$ の4種のみである。

(証明). [5] により、circulant な minimally nonideal clutter は以下のものすべてであることが知られている。

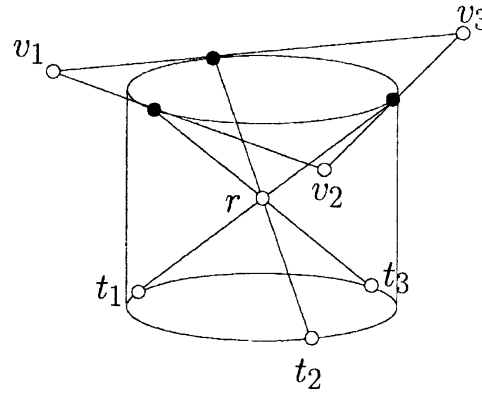
$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_3^2, \mathcal{C}_5^2, \mathcal{C}_7^2, \mathcal{C}_9^2, \dots, \mathcal{C}_{2m+1}^2, \dots, \\ &\mathcal{C}_5^3, \mathcal{C}_8^3, \mathcal{C}_{11}^3, \mathcal{C}_{14}^3, \mathcal{C}_{17}^3, \\ &\mathcal{C}_7^4, \mathcal{C}_{11}^4, \mathcal{C}_9^5, \mathcal{C}_{11}^6, \mathcal{C}_{13}^7 \end{aligned}$$

ここで、系 2.2 から、3次元核付点配置においては各 stem のサイズは高々3であるので、 $\mathcal{C}_7^4, \mathcal{C}_{11}^4, \mathcal{C}_9^5, \mathcal{C}_{11}^6, \mathcal{C}_{13}^7$ は3次元核付点配置の stem clutter としては実現されないことが分かる。

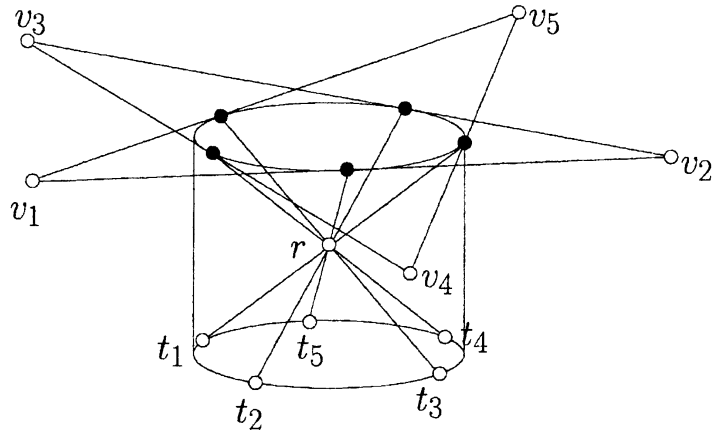
ある clutter が3次元核付点配置の stem clutter として実現された場合、そのマイナーはすべて実現できることに注意する。したがって、定理 2.4 の条件を満たさないマイナーを持つ clutter は3次元核付点配置の stem clutter としては実現されないことが分かる。これにより、 $\mathcal{C}_k^2$ ($k \geq 9$) および $\mathcal{C}_l^3$ ($l \geq 8$) は3次元核付点配置の stem clutter として実現され得ないことになる。(前者の系列については $\{1, 4, 7\}$ を除去、後者の系列については $\{1, 5\}$ を除去すると、それぞれ連結成分数が3および2になるが、このときに定理 2.4 の不等式を満たさないことが確認できる。)

後は、 $\mathcal{C}_3^2, \mathcal{C}_5^2, \mathcal{C}_7^2, \mathcal{C}_5^3$ の4種が3次元核付点配置の stem clutter として実現できることを示せば、定理を証明することができる。実際、これは、次に示す各配置によって実現することができる。

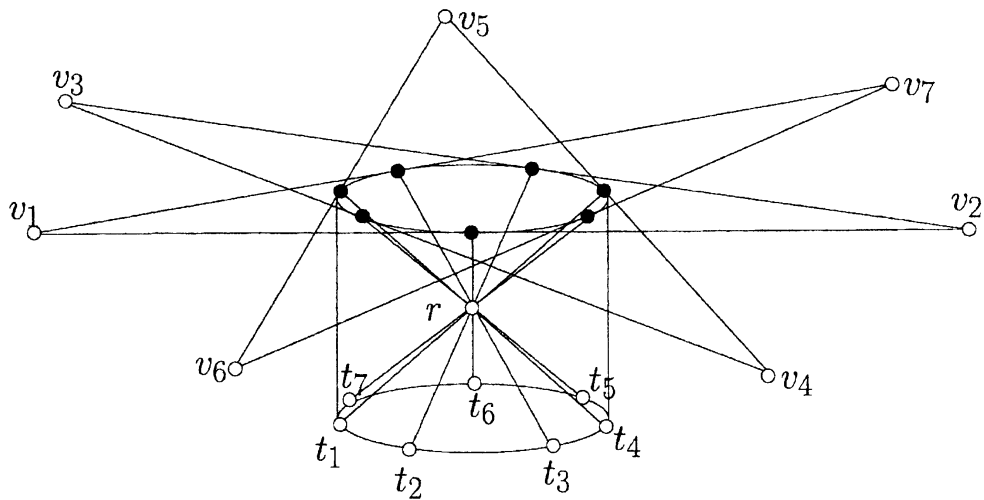
- $\mathcal{C}_3^2 \simeq \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}\}$
 $V = \{v_1, v_2, v_3\}, T = \{t_1, t_2, t_3\}$ として、点配置 $(V \cup r, T)$



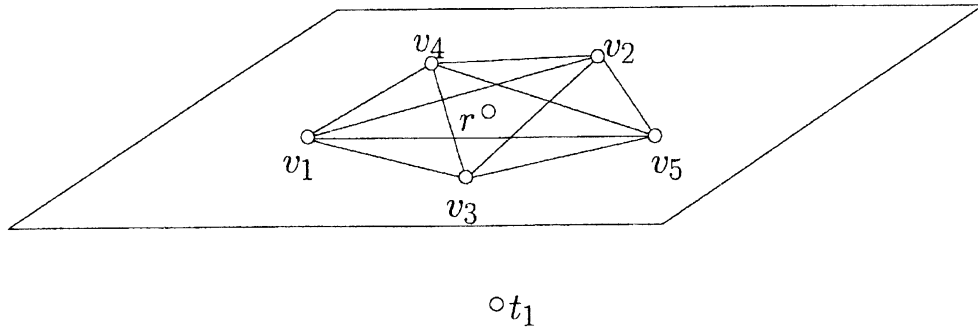
- $\mathcal{C}_5^2 \simeq \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}\},$
 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ として、点配置 $(V \cup r, T)$



- $\mathcal{C}_7^2 \simeq \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\}, \{v_7, v_1\}\}$
 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$ として、
 点配置 $(V \cup r, T)$



- $C_5^3 \simeq \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_3, v_4, v_5\}, \{v_4, v_5, v_1\}, \{v_5, v_1, v_2\}\}$
 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, T = \{t_1\}$ として、点配置 $(V \cup r, T)$



($r, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ は同じ平面上にあり、 t_1 はその平面の外にある。)

□

これにより、次の系も示すことができる。

系 3.3. ランクが高々3の有向マトロイドの正サーキット系の clutter がマイナーとして持ち得る minimally nonideal circulant clutter は、 $C_3^2, C_5^2, C_7^2, C_5^3$ の4種で全てである。

(証明). 1点以上縮約した場合としては、定理 3.2 によって、この4種であることは示されている。後は、縮約をしない場合、つまり、核が空集合の場合に、他の minimally nonideal circulant clutter が実現できないことを示す必要がある。定理 3.2(の前半の実現不可能性の証明) と同じ議論をすれば、ここで示すべきことは、 C_7^4 が実現されないことを示すことである。

C_7^4 の補集合族の各要素は7点からなる台集合上の、7つのサイズ3の集合の族 (C_7^3 と同型) である。これを、台集合を頂点集合とする7つの2次元単体と対応させてみる。すると、この単体の集合は、非自明な基本群を持つことが分かる。一方、もし C_7^4 が3次元核付点配置として実現できるとすると、 C_7^4 の補集合族は双対有向マトロイドによって定まる有向マトロイド多面体の各ファセットを単体に膨らませたものとなる。したがって、その基本群は(双対のランクが2の場合を除いて) 自明でなければならない。これは矛盾であるので、 C_7^4 は実現できないことが分かる。(この議論は柏原賢二によって提案されたものである。)

□

Acknowledgement

本研究は、科研費 (14380188 および 15740052) および筑波大学学内プロジェクト研究からの補助を受けている。

本研究を進めるにあたり、中村政隆、柏原賢二両氏に多くのことを教わった。また、佐久間雅、岡本吉央両氏も加わっての多くの議論にも刺激を受け、また、役立った。

References

- [1] J.M. Bilbao, “Cooperative Games on Combinatorial Structures”, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London 2000.
- [2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G.M. Ziegler, “Oriented Matroids”, Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- [3] A. Björner and G.M. Ziegler, Introduction to greedoids, in “Matroid Applications”, N. White ed., Cambridge University Press, Cambridge 1992, 285–357.
- [4] G. Cornuéjols, “Combinatorial Optimization: Packing and Covering”, SIAM, Philadelphia 2001.
- [5] G. Cornuéjols and B. Novick, Ideal 0,1 matrices, J. Combin. Theory B, **60** (1994), 145–157.
- [6] P.H. Edelman and R.E. Jamison, The theory of convex-geometries, Geometriae dedicata, **19** (1985), 127–150.
- [7] M. Hachimori and M. Nakamura, Rooted circuits of closed-set systems and the max-flow min-cut property of stem clutters of affine convex geometries, preprint.
- [8] K. Kashiwabara and Y. Okamoto, A greedy algorithm for convex geometries, Discrete Appl. Math., **131** (2003), 523–533.
- [9] K. Kashiwabara, M. Nakamura and Y. Okamoto, The affine representation theorem for abstract convex geometries, preprint.
- [10] B. Korte, L. Lovász and R. Schrader, “Greedoids”, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1991.