数理解析研究所講究録 1351 巻 2004 年 143-154



# 重調和擬過程の境界値問題とその数値シミュレーション

## – 問題の起源と確率論からのアプローチ –

西岡 國雄 (NISHIOKA Kunio) [1]

(東京都立大学数学教室)[2]

端点 $x=0$ に構造力学的な支点[3]が与えられている半直線の棒が, 天井からバネ定数 $\lambda>0$ のバネで一様に保持されている. この棒の軸に垂直な方向に, 分布密度が $\varphi(x)$ である小さな荷重を加えた時, 場所 $x\geq 0$ での棒の下方向への変形量 $v(x)$ は次の方程式を満たす事が知られている:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^4 v}{dx^4}(x)+\lambda v(x)=\varphi(x), \quad x>0, \\
&\frac{d^j v}{dx^j}(0)=0 \quad \text{and} \quad \frac{d^k v}{dx^k}(0)=0.
\end{aligned} \tag{0.1}
$$

ここで, 境界条件の階数 $\{j,k\}$ は (0.1) が自己共役になる

$$\{j,k\}=\{0,1\},\{0,2\},\{1,3\},\{2,3\}$$

の 4 組に限り, それぞれが構造力学的な支点の種類に対応している. 一方棒には

軸に垂直な方向, 軸方向, 支点の周りの回転

の 3 種類の力が作用するが, それらの力への反力と構造力学的支点の種類との関連は次の通りである, [3, 10]:

| 境界条件の階数 $\{j,k\}$ | 構造学的支点 | 軸方向の力 | 軸に垂直な力 | 回転 |
|---|---|---|---|---|
| $\{0,1\}$ | 固定端 | 固定 | 固定 | 固定 |
| $\{0,2\}$ | 蝶番端 | 固定 | 固定 | 自由 |
| $\{1,3\}$ | スライド端 | 固定 | 自由 | 自由 |
| $\{2,3\}$ | 自由端 | 自由 | 自由 | 自由 |

本報告では, 方程式 (0.1) と重調和擬過程を関連づけ, 以下の点を論ずる.

(0.2a) 各々の構造力学的な支点での反力の視覚的な説明,

(0.2b) (0.1) で表される定常状態に至るまでの, 棒の変形状態の時間変化.

---

[1] kunio@comp.metro-u.ac.jp

[2] Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, 〒 192-0397 八王子市南大沢 1-1

[3] 固定端, 蝶番端, スライド端, 自由端の 4 種類がある.

## 1 重調和擬過程

**A.** まず (0.1) の解を重調和作用素の発展方程式と関連づけよう. $\mathbf{R}^1$ 内の半直線 $[0,\infty)$ を $\mathbf{R}_+$ と表し, $[0,\infty)\times\mathbf{R}_+$ 上の重調和発展方程式

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) = -\partial_x^4 u(t,x), \quad t>0,\ x>0,\\
&\lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x), \quad x>0,\\
&\partial_x^j u(t,0) = 0 \quad \text{and} \quad \partial_x^k u(t,0) = 0, \quad t>0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

を考える. (1.1) が有界な一意古典解 $u$ を持つとして,

$$
V(t,x) \equiv \int_0^t ds\ \exp\{-\lambda s\}\ u(s,x)
\tag{1.2}
$$

とおくと, その $V$ は

$$
\begin{aligned}
&\partial_t V(t,x) = -\partial_x^4 V(t,x) - \lambda V(t,x) + \varphi(x), \quad t>0,\ x>0,\\
&\lim_{t\to 0} V(t,x) = 0, \quad x>0,\\
&\partial_x^j V(t,0) = 0 \quad \text{and} \quad \partial_x^k V(t,0) = 0, \quad t>0.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

の解となる. さらに (0.1) の解 $v$ は $V$ の定常状態

$$
v(x) = \lim_{t\to\infty} V(t,x)
$$

として得られる.

つまり棒の変形量 $v$ は, (1.1) の解 $u$ の Laplace 変換であり, そこに至る棒の変形状態の時間変化は (1.2) の $V$ で記述されている. 言い換えれば, 発展方程式 (1.1) の解 $u$ の確率論的表現を求めれば, 我々の設問 (0.2a, 0.2b) への解答が得られる.

**B.** "境界条件をもつ重調和擬過程" と (1.1) との関連を述べる前に, 重調和擬過程を説明する.

4 階微分作用素 $-\partial_x^4$ は重調和作用素と呼ばれ, $[0,\infty)\times\mathbf{R}^1$ 上の発展方程式

$$
\partial_t u(t,x) = -\partial_x{}^4 u(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^1,
\tag{1.4}
$$

は, 弾性論や流体力学で重要な役割を果たしている[3]. そこで, 我々は (1.4) の基本解

$$
p(t,x) \equiv (1/2\pi)\int d\xi\ \exp\{-i\xi x - \xi^4 t\}, \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^1,
\tag{1.5}
$$

を "遷移確率密度" とする確率擬過程を考える. ところが $p(t,x)$ は, $|x|$ が大きいとき

$$
p(1,|x|) \sim a|x|^{-1/3}\exp\{-b|x|^{4/3}\}\cos c|x|^{4/3} \quad \text{with positive constants } a, b, \text{ and } c
$$

となり負の値もとるので, これは通常の確率過程とはなりえない.

[3] Kuramoto-Sivashinsky 方程式や Cahn-Hilliard 方程式の主要項となっている, [11] を見よ.

すなわち $\mathbf{R}^{[0,\infty)}$ 上の筒型集合 $\Gamma$,

$$\Gamma = \{\omega \in \mathbf{R}^{[0,\infty)} : \omega(t_1) \in B_1, \cdots, \omega(t_n) \in B_n\}, \quad 0 \leq t_1 < \cdots < t_n,$$

にたいし, 通常通り

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{P}}_x[\Gamma] \equiv \int_{B_1} dy_1 \cdots \int_{B_n} dy_n\, p(t_1, y_1 - x) \times \\ \times p(t_2 - t_1, y_1 - y_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, y_n - y_{n-1}), \quad x \in \mathbf{R}^1,\end{aligned} \tag{1.6}$$

として有限加法的な符号付き測度 $\widetilde{\mathbf{P}}$ を定義する. ここで, $\widetilde{\mathbf{P}}$ の全変動は 1 でないため Kolmogorov の拡張定理は成立せず, 関数空間上の可算加法的測度は得られない. そこで, この $\widetilde{\mathbf{P}}$ を多少拡張した "有限加法的な符号付き測度 $\mathbf{P}$ " を**重調和擬過程**[4]と定義する.

$\mathcal{H}^\alpha[0,\infty)$ を $[0,\infty)$ で定義された $\alpha$ 次 Hölder 連続関数の全体とすると, Krylov [2] による計算結果

$$\alpha < 1/4 \text{ のとき}, \quad \mathcal{H}^\alpha[0,\infty)^c \text{ の } \mathbf{P}\text{-全変動 } = 0$$

が成立するので, 重調和擬過程は path continuous である. しかし技術的な理由で, 我々は次のように設定する:

path 空間を右連続で左極限が存在する関数の全体 $\mathcal{D}[0,\infty)$ とする.

## 2 重調和擬過程の first hitting time と place

$\omega \in \mathcal{D}[0,\infty)$ にたいし $\tau_0(\omega) \equiv \inf\{t > 0 : \omega(t) < 0\}$ を "負の部分への *first hitting time*" , $\omega(\tau_0)$ を "*first hitting place*" と呼ぶ.

通常の確率論では, 確率変数 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ の分布

$$P_x[X \in da], \quad a \in \mathbf{R}^1 \tag{2.1}$$

は有界連続関数全体 $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^1)$ 上の連続線形汎関数である.

しかし重調和擬過程の場合, " 確率変数の分布" はその範囲に収まらず, (2.1) はまず Schwartz の緩増加超関数として定義される. 次に, 確率変数 $X$ の個々の性質に応じて, (2.1) は Schwartz の急減少関数全体から, それよりさらに広い関数空間上の連続線形汎関数へ一意に拡張される.

我々は $[0,\infty)$ 上の有界可測関数の全体を $\mathcal{B}_b[0,\infty)$ とあらわす.

**命題 2.1 ([6]).** 重調和擬過程の first hitting time と place の同時分布は, $\mathcal{B}_b[0,\infty) \times \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$ 上の連続な線形汎関数である.

$$P_x[\tau_0(\omega) \in dt, \omega(\tau_0) \in da] = \left[K(t,x)\,\delta(a) - J(t,x)\,\delta'(a)\right] dt\, da. \tag{2.2}$$

ここで $\delta(a)$ は Dirac の関数, $\delta'(a)$ はその超関数の意味での微分で

[4] しばしば **Krylov motion** とも呼ばれる. 厳密な定義は, [6] を見よ.

$$K(t,x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dy\, \exp\{-y^4 t\}\, 4y^3 \Big(\sin yx - \cos yx + \exp\{-yx\}\Big),$$
$$J(t,x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dy\, \exp\{-y^4 t\}\, 4y^2 \Big(\sin yx - \cos yx + \exp\{-yx\}\Big). \quad \diamondsuit$$

**注意 2.2.** (i) $-\delta'(a)$ は物理学で dipole とよばれ, 同じ大きさで符号が逆の物理量を同時に担っている粒子である[5]. 一方, $\delta(a)$ は monopole といい, どちらか一方の符号の物理量だけを担っている粒子である. 命題 2.1 より, 棒の変形状態を時間経過で見ると, "荷重による一方向への変形 = monopoles" と "荷重インパクトによる瞬間的な弾力変形とその反発 = dipoles" の両方が作用していることになる.

(ii) 重調和擬過程にたいし, monopole と dipole の両方を考えることは自然である. 実際, 重調和擬過程は monopole と dipole 両方を考えると強マルコフ性を持つが, 片方の粒子だけでは強マルコフ性が成立しない[6].

(iii) 通常の確率過程, 例えば Brown 運動では

$$P_x[\tau_0 \in dt,\, \omega(\tau_0) \in da] = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\{-x^2/2t\}\; \delta(a)\; dt\, da$$

となり, dipole は現われない. つまり熱は monopole のみによって伝搬される. $\diamondsuit$

上記の 命題 2.1 および 注意 2.2 の意味を明確にするため, 次の定義を導入する.

**定義 2.3.** monopoles および dipoles それぞれの first hitting time と place の同時分布を次で定義する:

$$\mathbf{P}_x[\tau_0(\omega) \in dt,\, \omega(\tau_0) \text{ are monopoles and in } da] = K(t,x)\, \delta(a)\, dt\, da$$
$$\mathbf{P}_x[\tau_0(\omega) \in dt,\, \omega(\tau_0) \text{ are dipoles and in } da] = J(t,x)\, \delta'(a)\, dt\, da. \quad \diamondsuit$$

後で使うために, $K$ と $J$ の Laplace 変換を明示する: $\lambda > 0$, $x \geq 0$ とする.

$$\begin{aligned}\hat{K}(\lambda,x) &\equiv \int_0^\infty dt\;\exp\{-\lambda t\}\, K(t,x) \\ &= \sqrt{2}\;\exp\{-\frac{\lambda^{1/4}x}{\sqrt{2}}\}\,\cos(\frac{\lambda^{1/4}x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}),\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\hat{J}(\lambda,x) &\equiv \int_0^\infty dt\;\exp\{-\lambda t\}\, J(t,x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}}\;\exp\{-\frac{\lambda^{1/4}x}{\sqrt{2}}\}\,\sin(\frac{\lambda^{1/4}x}{\sqrt{2}}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

また方程式 (1.4) の resolvent kernel は次の通り:

$$\begin{aligned}g(\lambda,x,b) &\equiv \int dt \exp\{-\lambda t\}\; p(t, b-x) \\ &= \frac{1}{2\lambda^{3/4}}\;\exp\{-\frac{\lambda^{1/4}\,|b-x|}{\sqrt{2}}\}\;\cos(\frac{\lambda^{1/4}\,|b-x|}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

[5] 典型的な例は, 微小な磁石である.
[6] 実際 [1] では monopole のみを考え, "重調和擬過程では強マルコフ性は成立しない" と結論している.

## 3 固定端 fixed end

命題 2.1 と 定義 2.3 により, 重調和擬過程の粒子が境界に到達したとき, それは monopoles か dipoles のどちらかに成っている. そこで, 重調和擬過程の境界での挙動を制御するためには, monopoles と dipoles それぞれの境界での挙動を別々に制御しなければならない. 実際, 発展方程式 (1.1) では2つの境界条件が必要であることが知られているが, それは, monopoles の境界での挙動と dipoles のそれとを別々に規定するためである.

この節では, 方程式 (0.1) で $\{j,k\}=\{0,1\}$ と表現される固定端を考える. 固定端の棒は, 端点で壁にしっかり固定されており, 端点でのどんな移動および回転も許さない. それに対応する重調和擬過程は, 境界 $x=0$ で monopoles, dipoles ともに死滅する"全死滅壁重調和擬過程"となるが, その挙動を直感的に説明すると:

(i) monopole が $x\geq 0$ から出発する. この粒子は境界に到達するまでは, 通常の重調和擬過程として振る舞う.

(ii) この粒子は monopoles と dipoles とに別れて境界に到達するが, どちらもそこで死滅する.

**定義 3.1.** (i) 全死滅壁重調和擬過程の遷移確率 $\mathbf{P}_x^{(00)}[w(t)\in db]$ を次式で定義する:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_x^{(00)}[w(t)\in db] &= \mathbf{P}_x[w(t)\in db]\\
&-\int_0^t\int \mathbf{P}_x[\tau_0(\omega)\in dt,\ \omega(\tau_0)\text{ are monopoles and in } da]\ \mathbf{P}_a[w(t-s)\in db]\\
&-\int_0^t\int \mathbf{P}_x[\tau_0(\omega)\in dt,\ \omega(\tau_0)\text{ are dipoles and in } da]\ \mathbf{P}_a[w(t-s)\in db].
\end{aligned}
$$

(ii) 全死滅壁重調和擬過程の遷移密度 $p^{(00)}(t,x,b)$ はつぎの様になる:

$$
\begin{aligned}
p^{(00)}(t,x,b) &= p(t,b-x)-\int_0^t ds\ K(s,x)\,p(t-s,b)\\
&\quad -\int_0^t ds\ J(s,x)\,\partial_a p(t-s,b-a)/_{a=0}. \quad \diamondsuit
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

簡単な計算で, (3.1) の Laplace 変換 $U^{(00)}$ も得られる.

$$
\begin{aligned}
U^{(00)}(\lambda,x,b) &= g(\lambda,x,b)-K(\lambda,x)\,g(\lambda,0,b)-J(\lambda,x)\,\partial_a g(\lambda,a,b)/_{a=0}\\
&= \frac{1}{2\lambda^{3/4}}\Big\{\exp\{-\frac{\lambda^{1/4}|b-x|}{\sqrt{2}}\}\cos\big(\frac{\lambda^{1/4}|b-x|}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\big)\\
&\quad -\sqrt{2}\exp\{-\frac{\lambda^{1/4}(b+x)}{\sqrt{2}}\}\Big(\cos(\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\lambda^{1/4}x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4})\\
&\quad -\sin(\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\lambda^{1/4}x}{\sqrt{2}})\Big)\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

**定理 3.2.** $\varphi\in C_b(\mathbf{R}_+)$ とする. 固定端 $\{j,k\}=\{0,1\}$ の場合, (0.1) の古典解 $v$ は

$$
v(x)=\int_0^\infty db\ U^{(00)}(\lambda,x,b)\ \varphi(b)
\tag{3.3}
$$

で与えられる．さらに棒の変形状態の時間経過

$$V(t,x) \equiv \int_0^t ds \int_0^\infty db\ \exp\{-\lambda s\}\ p^{(00)}(s,x,b)\ \varphi(b) \tag{3.4}$$

は, $t \to \infty$ でこの $v$ に各点収束する．

## 4 蝶番端 pinned end

蝶番端は, (0.1) で $\{j,k\} = \{0,2\}$ と表現される．蝶番端の棒は, 棒を水平に貫通したピンで台座に結ばれており, 台座は壁にしっかり固定されている．つまり端点で, 棒の軸方向および上下方向への移動は許していない．しかし棒を含む垂直面内で, ピンを中心とした回転は許している．

蝶番端は, 境界 $x=0$ で "monopole は死滅, dipole は反射" する重調和擬過程に対応しているが, その重調和擬過程を次の方法[7]で構成しよう．まず, 下記の近似重調和擬過程を考える:

(i) monopole が $x \geq 0$ から出発する．この粒子は境界に到達するまでは, 通常の重調和擬過程として振る舞う．

(ii) この粒子が境界に到達したとき monopole なら, そこで死滅する．

(iii) この粒子が境界に到達したとき dipole なら, $\varepsilon$ から ( dipole として ) 再出発する．

この近似擬過程の遷移確率 ${}^\varepsilon\mathbf{P}_x^{0r}[w(t) \in db]$ は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} {}^\varepsilon\mathbf{P}_x^{(0r)}[w(t) \in db] &= \mathbf{P}_x^{(00)}[w(t) \in db] \\ &+ \int_0^t \int \mathbf{P}_x[\tau_0(\omega) \in dt,\ \omega(\tau_0) \text{ are dipoles and in } da]\ {}^\varepsilon\mathbf{P}_{\varepsilon+a}[w(t-s) \in db]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

上記の遷移確率が密度関数 ${}^\varepsilon p^{(0r)}(t,x,b)\ db = {}^\varepsilon\mathbf{P}_x^{(0r)}[w(t) \in db]$ を持つと仮定して, その Laplace 変換を

$${}^\varepsilon U^{(0r)}(\lambda,x,b) = \int_0^\infty dt\ \exp\{-\lambda t\}\ {}^\varepsilon p^{(0r)}(t,x,b)$$

とおく．すると (4.1) から

$${}^\varepsilon U^{(0r)}(\lambda,x,b) = U^{(00)}(\lambda,x,b) + \hat{J}(\lambda,x)\ \partial_x\, {}^\varepsilon U^{(0r)}(\lambda,\varepsilon,b)$$

となる．ここで未知関数は ${}^\varepsilon U^{(0r)}$ だが, それについて解くことができ,

$${}^\varepsilon U^{(0r)}(\lambda,x,b) = U^{(00)}(\lambda,x,b) + \hat{J}(\lambda,x)\ \frac{\partial_x\, {}^\varepsilon U^{(00)}(\lambda,\varepsilon,b)}{1-\partial_x \hat{J}(\lambda,\varepsilon)}$$

となる．いま $\varepsilon \to 0$ として,

---

[7] この方法は, 通常の確率過程で penalty method として知られている．

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
U^{(0r)}(\lambda,x,b) &\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} {}^{\varepsilon}U^{(0r)}(\lambda,x,b)\\
&= U^{(00)}(\lambda,x,b) - \hat{J}(\lambda,x)\ \frac{\partial_x^2 U^{(00)}(\lambda,0,b)}{\partial_x^2 \hat{J}(\lambda,0)}\\
&= U^{(00)}(\lambda,x,b) + \hat{J}(\lambda,x)\ \frac{1}{\lambda^{1/2}} \exp\{-\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}}\} \sin(\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}})\\
&= U^{(00)}(\lambda,x,b) + 2\hat{J}(\lambda,x)\ \partial_a g(\lambda,a,b)/_{a=0}
\end{aligned}
$$

が得られた.

**定義 4.1.** 境界 $x=0$ で "monopole は死滅, dipole は反射" する重調和擬過程の遷移確率密度 $p^{(0r)}(t,x,b)$ を (4.2) の Laplace 逆変換で定義する. ◇

Laplace 逆変換を実際に計算すると

$$
(4.3)\qquad
\begin{aligned}
&p^{(0r)}(t,x,b) = p^{(00)}(t,x,b) + \int_0^t ds\ J(s,x)\ Q^{(0r)}(t-s,b), \quad x\geq 0,\\
&Q^{(0r)}(t,b) = 2\partial_a p(t,b-a)/_{a=0} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dy\ \exp\{-y^4 t\}\, y\, \sin y\, b,
\end{aligned}
$$

となっている, [7].

**定理 4.2.** $\varphi\in\mathcal{C}_b(\mathbf{R}_+)$ とする. 蝶番端 $\{j,k\}=\{0,2\}$ の場合, (0.1) の古典解 $v$ は

$$
(4.4)\qquad v(x) = \int_0^\infty db\ U^{(0r)}(\lambda,x,b)\ \varphi(b)
$$

で与えられる. さらに棒の変形状態の時間経過

$$
(4.5)\qquad V(t,x) \equiv \int_0^t ds \int_0^\infty db\ \exp\{-\lambda s\}\ p^{(0r)}(t,x,b)\ \varphi(b)
$$

は, $t\to\infty$ で, この $v$ に収束する. ◇

**注意 4.3.** 棒での熱伝搬は, Brown 運動で表現される. 熱伝導に関して, 棒の端点が自由端の場合, 対応する Brown 運動の境界条件は反射壁となる. その境界からの entracne law は

$$
Q(t,b) = 2q(t,0), \quad q(t,b) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{b^2}{2t}\}\ \text{は熱核},
$$

だが, これは "monopole は死滅, dipole は反射" する重調和擬過程の entrance law, (4.3) の第二式, と類似している. そこで熱伝搬と Brown 運動からの類推で, 蝶番端での棒の変形について, 以下の視覚的説明が得られる: 蝶番端は, "棒の上下方向への変形 = monopoles" に関しては固定端, "荷重インパクトによる弾力変形とその反発 = dipoles" に関しては自由端として振る舞う. ◇

## 5 スライド端 slide end

スライド端は, (0.1) で $\{j,k\}=\{1,3\}$ で表現される. スライド端の棒は, 台座に蝶番端で結ばれているが, 台座自身は壁にローラーを介して取り付けられている. つまり棒は, 軸方向への移動は規制されているが, 蝶番端のピンを中心とした回転に加え, 上下方向への移動も自由である.

スライド端は, 境界 $x=0$ で "monopoles は 3 次の反射, dipoles は死滅" する重調和擬過程に対応している. この重調和擬過程を前節と同様の方法で構成しよう.

まず $[0,\infty)$ 上の符号付き測度 ${}^{\varepsilon}\nu^3(dz)$ を次で与える: $\varepsilon>0$ として

$$
{}^{\varepsilon}\nu^3(dz)\equiv 2\delta_0(dz)-3\delta_{\varepsilon}(dz)+3\delta_{2\varepsilon}(dz)-\delta_{3\varepsilon}(dz). \tag{5.1}
$$

ここで, $\delta_a(dz)$ は $\{a\}$ に質量をもつデルタ測度である. すると $\varphi\in\mathcal{C}^4(\mathbf{R}^1)$ にたいし,

$$
\begin{aligned}
&\int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz)=1,\\
&\int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz)\,\varphi(z)=\varphi(0)-\varphi'''(0)\,\varepsilon^3+\mathcal{O}(\varepsilon^4)\ \text{as}\ \varepsilon\to 0.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

となる. 次に, 下記の近似重調和擬過程を考える:

(i) monopole が $x\geq 0$ から出発する. この粒子は境界に到達するまでは, 通常の重調和擬過程として振る舞う.

(ii) この粒子が境界に到達したとき monopoles なら, 初期分布 ${}^{\varepsilon}\nu^3(dz)$ の重調和擬過程として再出発する[8].

(iii) この粒子が境界に到達したとき dipoles なら, そこで死滅する.

この近似重調和擬過程の遷移確率 ${}^{\varepsilon}\mathbf{P}_x^{t0}[w(t)\in db]$ は次式で与えられる:

$$
\begin{aligned}
{}^{\varepsilon}\mathbf{P}_x^{t0}[w(t)\in db] &= \mathbf{P}_x^{(00)}[w(t)\in db]\\
&+\int_0^t\int \mathbf{P}_x[\tau_0\in ds,\ w(\tau_0)\ \text{are monopoles and in}\ da]\\
&\times\int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz)\ {}^{\varepsilon}\mathbf{P}_{a+z}^{t0}[w(t)\in db].
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

この遷移確率が密度関数 ${}^{\varepsilon}p^{(t0)}(t,x,b)\,db={}^{\varepsilon}\mathbf{P}_x^{(t0)}[w(t)\in db]$ を持つと仮定して, その Laplace 変換を

$$
{}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda,x,b)=\int_0^{\infty}dt\ \exp\{-\lambda t\}\ {}^{\varepsilon}p^{(t0)}(t,x,b)
$$

とおくと (5.3) から

$$
{}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda,x,b)=U^{(00)}(\lambda,x,b)+\hat{K}(\lambda,x)\int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz)\ {}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda,z,b)
$$

[8] 重調和擬過程はもともと負の遷移確率を許しているので, (5.2) さえ満たしていれば, 初期分布が負になってもかまわない.

となる. ここで未知関数は ${}^{\varepsilon}U^{(t0)}$ だが, それについて解くことができ,

$$
{}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda, x, b) = U^{(00)}(\lambda, x, b) + \hat{K}(\lambda, x) \, \frac{\displaystyle\int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz) \, U^{(00)}(\lambda, z, b)}{1 - \displaystyle\int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz) \, \hat{K}(\lambda, z)}.
$$

上式で $\varepsilon \to 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
U^{(t0)}(\lambda, x, b) &\equiv \lim_{\varepsilon \to 0} {}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda, x, b) \\
&= U^{(00)}(\lambda, x, b) - \hat{K}(\lambda, x) \, \frac{\partial_x^3 U^{(00)}(\lambda, 0, b)}{\partial_x^3 \hat{K}(\lambda, 0)} \\
&= U^{(00)}(\lambda, x, b) + \hat{K}(\lambda, x) \, \frac{1}{\lambda^{3/4}} \, \exp\{-\frac{\lambda^{1/4} b}{\sqrt{2}}\} \, \cos\left(\frac{\lambda^{1/4} b}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= U^{(00)}(\lambda, x, b) + 2\hat{K}(\lambda, x) \, g(\lambda, 0, b)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

が得られた.

**定義 5.1.** 境界 $x = 0$ で “monopoles は 3 次の反射, dipoles は死滅” する重調和擬過程の遷移確率密度 $p^{(t0)}(t, xb)$ を (5.4) の Laplace 逆変換で定義する. ◇

実際に Laplace 逆変換を計算すると

$$
\begin{aligned}
p^{(t0)}(t, x, b) &= p^{(00)}(t, x, b) + \int_0^t ds \, K(s, x) \, Q^{(t0)}(t - s, b), \quad t > 0, \ b \geq 0, \\
Q^{(t0)}(t, b) &= 2 \, p(t, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dy \, \exp\{-y^4 t\} \, \cos y \, b,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

となっているので, 次の結論が導かれる.

**定理 5.2.** $\varphi \in C_b(\mathbf{R}_+)$ とする. スライド端 $\{j, k\} = \{1, 3\}$ の場合, (0.1) の古典解 $v$ は

$$
v(x) = \int_0^{\infty} db \, U^{(t0)}(\lambda, x, b) \, \varphi(b) \tag{5.6}
$$

で与えられる. さらに棒の変形状態の時間経過

$$
V(t, x) \equiv \int_0^t ds \int_0^{\infty} db \, \exp\{-\lambda s\} \, p^{(t0)}(t, x, b) \, \varphi(b) \tag{5.7}
$$

は, $t \to \infty$ で, この $v$ に各点収束する. ◇

**注意 5.3.** (i) 注意 4.3 を思い出すと, (5.5) からスライド端での棒の変形について, 次の視覚的説明が得られる: スライド端は “荷重による一方向への変形 = monopoles” に関して自由端, “荷重インパクトによる弾力変形とその反発 = dipoles” に関しては固定端として振る舞う.

(ii) 固定端 (3.4) と蝶番端 (4.5) の場合と異なり (5.7) の解 $V$ では $V(t, 0) = 0$ は必ずしも成立せず, 適当な $\varphi$ を選べば, $V(t, 0) > 0$ となる. この理由は, スライド端では支持点の位置が動くの, 原点で棒が下側に撓む事もあり得るからである. ◇

## 6 自由端 free end

自由端は, (0.1) で $\{j,k\}=\{2,3\}$ で表現される. 棒の端点には支持点がなく, 端点での自由な移動が許されている. 自由端は, $x=0$ で "monopole は 3 次の反射, dipole は通常の反射" をする重調和擬過程に対応しており, それを前節と同様の近似擬過程を使って構成する.

(i) monopole が $x\geq 0$ から出発する. この粒子は境界に到達するまでは, 通常の重調和擬過程として振る舞う.

(ii) この粒子が境界に到達したとき monopole なら, 初期分布 ${}^{\varepsilon}\nu^3(dz)$ の重調和擬過程として再出発する.

(iii) この粒子が境界に到達したとき dipole なら, $\varepsilon$ から ( dipole として ) 再出発する.

この近似擬過程の遷移確率 ${}^{\varepsilon}\mathbf{P}_x^{(tr)}[w(t)\in db]$ は次式で与えられる:

$$
\begin{aligned}
&{}^{\varepsilon}\mathbf{P}_x^{(tr)}[w(t)\in db]=\mathbf{P}_x^{(00)}[w(t)\in db]\\
&\quad+\int_0^t\int \mathbf{P}_x[\tau_0\in ds,\ w(\tau_0)\text{ are monopoles and in }da]\\
&\quad\times\int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz)\ {}^{\varepsilon}\mathbf{P}_{a+z}^{(tr)}[w(t)\in db]\\
&\quad+\int_0^t\int \mathbf{P}_x[\tau_0\in ds,\ w(\tau_0)\text{ are dipoles and in }da]\ {}^{\varepsilon}\mathbf{P}_{a+\varepsilon}^{(tr)}[w(t)\in db].
\end{aligned}\tag{6.1}
$$

この遷移確率が密度関数 ${}^{\varepsilon}p^{(tr)}(t,x,b)\,db=\ {}^{\varepsilon}\mathbf{P}_x^{(tr)}[w(t)\in db]$ を持つと仮定して, その Laplace 変換を

$$
{}^{\varepsilon}U^{(tr)}(\lambda,x,b)=\int_0^{\infty}dt\ \exp\{-\lambda t\}\ {}^{\varepsilon}p^{(tr)}(t,x,b)
$$

とおくと (6.1) から

$$
\begin{aligned}
&{}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda,x,b)=U^{(00)}(\lambda,x,b)\\
&\quad+\hat{K}(\lambda,x)\ \int {}^{\varepsilon}\nu^3(dz)\ {}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda,z,b)+\hat{J}(\lambda,x)\ \partial_x{}^{\varepsilon}U^{(t0)}(\lambda,\varepsilon,b)
\end{aligned}
$$

となる. ここの未知関数は ${}^{\varepsilon}U^{(tr)}$ だが, それについて解くことができる:

$$
\begin{aligned}
&{}^{\varepsilon}U^{tr}(\lambda,x,b)=U^{(00)}(\lambda,x,b)\\
&+\hat{K}(\lambda,x)\frac{(1-\partial_x\hat{J}(\lambda,\varepsilon))\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,U^{(00)}(\lambda,z,b)+\partial_xU^{(00)}(\lambda,\varepsilon,b)\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,\hat{J}(\lambda,z)}{(1-\partial_x\hat{J}(\lambda,\varepsilon))(1-\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,\hat{K}(\lambda,z))-\partial_x\hat{K}(\lambda,\varepsilon)\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,\hat{J}(\lambda,z)}\\
&+\hat{J}(\lambda,x)\frac{\partial_xU^{(00)}(\lambda,\varepsilon,b)(1-\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,\hat{K}(\lambda,z))+\partial_x\hat{K}(\lambda,\varepsilon)\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,U^{(00)}(\lambda,z,b)}{(1-\partial_x\hat{J}(\lambda,\varepsilon))(1-\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,\hat{K}(\lambda,z))-\partial_x\hat{K}(\lambda,\varepsilon)\int{}^{\varepsilon}\nu(dz)\,\hat{J}(\lambda,z)}.
\end{aligned}
$$

ここで $\varepsilon \to 0$ として,

$$
\begin{aligned}
U^{(tr)}(\lambda,x,b) &\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} {}^{\varepsilon}U^{(tr)}(\lambda,x,b) = U^{(00)}(\lambda,x,b) \\
&+ \hat{K}(\lambda,x)\Big( -\frac{\partial_x^3 U^{(00)}(\lambda,0,b)\,\partial_x^2\hat{J}(\lambda,0) - \partial_x^2 U^{(00)}(\lambda,0,b)\,\partial_x^3\hat{J}(\lambda,0)}{-\partial_x^2\hat{K}(\lambda,0)\,\partial_x^3\hat{J}(\lambda,0) + \partial_x^3\hat{K}(\lambda,0)\,\partial_x^2\hat{J}(\lambda,0)}\Big) \\
&+ \hat{J}(\lambda,x)\Big( -\frac{\partial_x^2 U^{(00)}(\lambda,0,b)\,\partial_x^3\hat{K}(\lambda,0) - \partial_x^3 U^{(00)}(\lambda,0,b)\,\partial_x^2\hat{K}(\lambda,0)}{-\partial_x^2\hat{K}(\lambda,0)\,\partial_x^3\hat{J}(\lambda,0) + \partial_x^3\hat{K}(\lambda,0)\,\partial_x^2\hat{J}(\lambda,0)}\Big) \\
&= U^{(00)}(\lambda,x,b) + \hat{K}(\lambda,x)\,\frac{\sqrt{2}}{\lambda^{3/4}}\,\exp\{-\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}}\}\cos(\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}}) \\
&+ \hat{J}(\lambda,x)\,\frac{\sqrt{2}}{\lambda^{1/2}}\,\exp\{-\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}}\}\sin(\frac{\lambda^{1/4}b}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4})
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

が得られた.

**定義 6.1.** 境界 $x=0$ で "monopole は3次の反射, dipole は反射" する重調和擬過程の遷移確率密度 $p^{(tr)}(t,x,b)$ を (6.2) の Laplace 逆変換で定義する. ◇

逆変換の計算を実行して, 遷移確率密度 $p^{(tr)}(t,x,b)$ は

$$
\begin{aligned}
p^{(tr)}(t,x,b) &= p^{(00)}(t,x,b) + \int_0^t ds\ K(s,x)\ Q_K^{(tr)}(t-s,b) \\
&+ \int_0^t ds\ J(s,x)\ Q_J^{(tr)}(t-s,b), \quad t>0,\ b\ge 0, \\
Q_K^{(tr)}(t,b) &\equiv \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dy\ \exp\{-y^4 t\}\ \big(\cos by - \sin by + \exp\{-by\}\big), \\
Q_J^{(tr)}(t,b) &\equiv -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dy\ \exp\{-y^4 t\}\ y\,\big(\cos by - \sin by + \exp\{-by\}\big),
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

である.

**定理 6.2.** $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}_+)$ とする. 自由端 $\{j,k\}=\{2,3\}$ の場合, (0.1) の古典解 $v$ は

$$
v(x) = \int_0^\infty db\ U^{(tr)}(\lambda,x,b)\ \varphi(b) \tag{6.4}
$$

で与えられる. さらに棒の変形状態の時間経過

$$
V(t,x) \equiv \int_0^t ds \int_0^\infty db\ \exp\{-\lambda s\}\ p^{(tr)}(s,x,b)\ \varphi(b) \tag{6.5}
$$

は, $t\to\infty$ で, この $v$ に各点収束する. ◇

**注意 6.3.** 自由端での棒の変形について, 次の視覚的説明が得られる: 自由端は "荷重による一方向への変形 = monopoles" と "荷重インパクトによる弾力変形とその反発 = dipoles" の両者に関して, 自由端として振る舞う. ◇

**謝辞**: (0.1) のモデル等を御教示下さった 亀高 維倫 教授および同研究室 (大阪大学大学院基礎工学研究科) の皆様に感謝の意を表します.

[1] Hochberg, K. J., A signed measure on path space related to Wiener measure, Ann. Prob., 6 (1978), 433–458.

[2] Krylov, Y. Yu., Some properties of the distribution corresponding to the equation $\partial u/\partial t = (-1)^{q+1}\partial^{2q}u/\partial x^{2q}$, Soviet Math., Dokl., 1 (1960), 760–763.

[3] ランダウ, L. D., リフシッツ, E. M., 弾性論, 第 4 判, 東京図書, 1987.

[4] Nakajima, T. and Sato, S., On the joint distribution of the first hitting time and the first hitting place to the space-time wedge domain of a biharmonic pseudo process, Tokyo J. Math., 22 (1999), 399–413.

[5] Nishioka, K., Monopole and dipole of a biharmonic pseudo process, Proc. Japan Acad., Ser. A 72 (1996), 47–50; Math. Rev., 97g:60117.

[6] Nishioka, K., The first hitting time and place of a half-line by a biharmonic pseudo process, Japan. J. Math., **23** (1997), 235–280; Math. Rev., 99f:60080.

[7] Nishioka, K., Boundary conditions for one-dimensional biharmonic pseudo process, Electr. J. Prob., **6** (2001), 1-27; http:// www.math. washington. edu/ ~ejpecp/Ejp Vol 6/ paper13.abs.html; Math. Rev., 2002m:35093.

[8] Sato, S., A construction of the biharmonic pseudo process by a random walk, J. Math. Kyoto Univ., **42** (2002), 403–422.

[9] Schwartz, L., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Paris. 1961.

[10] 鈴木 良明, 強く引っ張った棒の荷重によるたわみの半無限区間における境界値問題に対する Green 関数の正値性, 修士論文 (2000), 大阪大学大学院基礎工学研究科.

[11] Temam, R., Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, Springer-Verlag, New York, 1988.