数理解析研究所講究録 1351 巻 2004 年 99-105

グラフの連結安定性の評価へのモンテカルロ法の応用

政策研究大学院大学　諸星穂積
大山達雄

An application of Monte Carlo method to the estimation of the network stable connectivity.

National Graduate Institute for Policy Studies
Hozumi MOROHOSI
Tatsuo OYAMA

1 はじめに

道路や鉄道，送配電網や都市ガスといったネットワーク構造を有するシステムは，いろいろな災害による不通，破断に対して頑健で信頼性の高いシステムであることが要求される．本論では，ネットワークシステムの頑健性・安定性を評価するための一つの指標として，連結安定性という基準を提案し，日本のいくつかの県の道路網を実例にして提案した指標の性質を論じてみる．

2 モデル

ネットワークを無向グラフ $G=(V,E)$ でモデル化する．V は頂点集合，E は枝集合で，$|V|=n$, $|E|=m$ とする．$\mathcal{G}_k$ を、G から k 本の枝を除去する（枝の両側の頂点は残す）ことで得られる部分グラフの全体からなる集合とする．$|\mathcal{G}_k|=\binom{m}{k}$ である．$G_k\in\mathcal{G}_k$ に対して，連結安定関数 [?] を以下のように定義する．

$$S(G_k)=(G_k\text{中で連結な頂点組の個数})/\binom{n}{2} \tag{1}$$

連結安定関数 S の値は $[0,1]$ に分布するが，全ての G_k が等確率で現れるとして，その累積分布を $F_k(x)$ で表す．

$$F_k(x)=\#\{G_k:\ S(G_k)\leq x\}/|\mathcal{G}_k| \tag{2}$$

ここで # は集合の要素の個数を表す．期待連結安定関数 $s(k)$ は $S(G_k)$ の F_k の下での期待値とする．

$$s(k)=\mathrm{E}\left[S(G_k)\right]=\frac{1}{|\mathcal{G}_k|}\sum_{G_k\in\mathcal{G}_k}S(G_k) \tag{3}$$

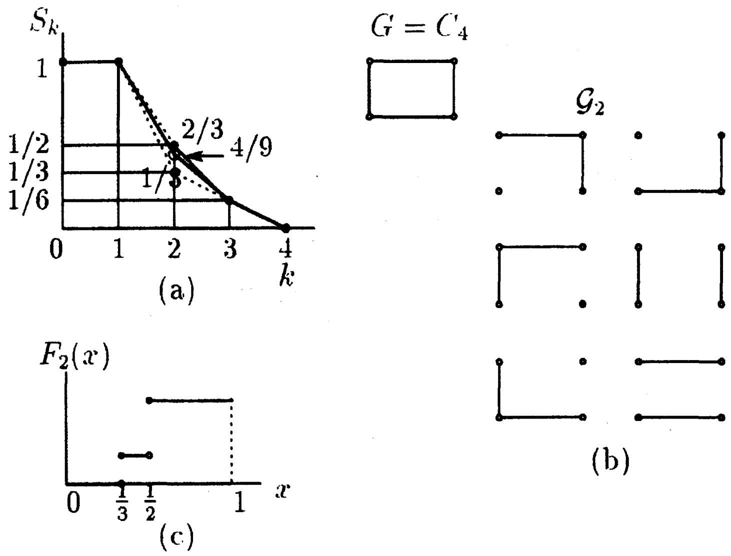


図 1: サイクルグラフ C_4 の例. (a) 横軸は除去する枝の数をとり，縦軸に S_k のとり得る値を示す．実線の折れ線は期待安定連結関数の値を結んで示したもの．$k=2$ のとき S_k は 2 種類の値をとる．(b) $k=2$ のときの $\mathcal{G}_k$ の全要素．(c) $k=2$ のときの S_k の累積分布関数．

図 1 に 4 頂点が円周上に並んだ形のグラフ C_4 の例を示す．$k=2$ のとき，$\mathcal{G}_k$ の要素は 6 個あり（図 1(b)），そのうち 4 個は $S_k(G_k)$ の値は 1/2 であり，2 個は 1/3 である．従って，F_k は図 1(c) のようになり，期待連結安定関数 $s(k)$ の値は 4/9 となる．

定義 (1) より，$S(G_k)$ は G_k が連結であれば値 1 をとり，非連結の場合は G_k ができるだけ大きい（含まれる頂点の数が多い）連結成分をもつほど 1 に近い値をとることがわかる．次節で，$S(G_k)$ あるいは $s_k(x)$ を用いてグラフのどのような性質をとらえることができるか，現実の道路ネットワークに対して検討してみる．このとき，大規模なネットワークに対して $S(G_k)$ の分布やその期待値 $s(k)$ を，上記のように $\mathcal{G}_k$ の全ての要素を数え上げて計算することは，計算量の観点から不可能であるので，以下のようなモンテカルロ法によって推定値を求めることにする．

Crude Monte Carlo Method

Input: グラフ $G=(V,E)$，除去する枝の数 k，繰返し回数 N.
Output: 期待連結安定関数の推定値 $\bar{s}(k)$.
Method:
$j := 1,\ S := 0.$

While $j \leq N$:
部分グラフ G_k を G から k 本の枝を
ランダムに除去して作成する.
$S := S + (G_k$中の連結な頂点組の数$)/\binom{n}{2}$.　　$j := j + 1$.
$\bar{s}(k) = S/N$

連結安定関数の分布関数 $F_k(x)$ の推定は, 上記のモンテカルロ法中で毎回の繰返しで計算する S を保存しておき ($S_1, \ldots, S_N$ としよう), それらの経験分布

$$F_k^N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I\{S_i \leq x\} \tag{4}$$

によって行うことができる. ただし, 指示関数 $I(A)$ は A が真ならば 1, 偽ならば 0 をとる.

3 計算例

日本の各都道府県の道路網をネットワークとみて, 上記のモンテカルロ法により, 期待連結安定関数の推定を行った. 図 2 に日本の道路網（高速道路, 一般国道, 主要地方道）を示す. この道路網を各都道府県毎に分割して, それぞれの道路網について数値地図情報より無向グラフを構成し, その期待連結安定関数を推定した.

図??にその中で 6 つの都県の期待連結安定関数を示した. 図中, 東京都と富山県, 宮城県と兵庫県, 福井県と島根県がよく似た関数の形状を示している. 6 都県の各道路網を図??に示す. 図??から読み取れるのは, 東京都や富山県の道路網は, 比較的密な部分があって, その周辺を比較的疎な部分が囲む形をとっているように見える. また, 宮城県と兵庫県は, 密な中心部分はあまり見当たらず, 領域全体に道路網がまんべんなく広がっているようである. 福井県と島根県は, 道路網が細長く広がっている. このような細長く広がっているようなグラフは, 少数の枝が切れるだけで, 比較的容易に小さな部分グラフに分かれてしまう傾向があることを, 期待連結安定関数の形状は示していると考えられる. 一方, 東京や富山のグラフは非連結になりにくく, なったとしても大きな連結要素が残るという性質があるため, 図のような期待連結安定関数の形状を示すと考えられる. 宮城や兵庫は, その中間の性質をもつということであろう.

図??を見ると, 次数 1 の頂点がかなりあることに気づく. 図??に各都県の道路グラフの頂点次数の分布を示した. このように次数 1 の頂点がかなり存在するのは, 計算の処理の都合上県境をまたぐ道路は県境のところで切れてしまうために生じているものがほとんどである. このような次数 1 の頂点が多いと, 必要以上に連結安定性を小さくしてしまうことが考えられる. このような境界上の頂点の影響を除くのは難しい問題だが, 一つの考えとしてグラフからそのような次数 1 の

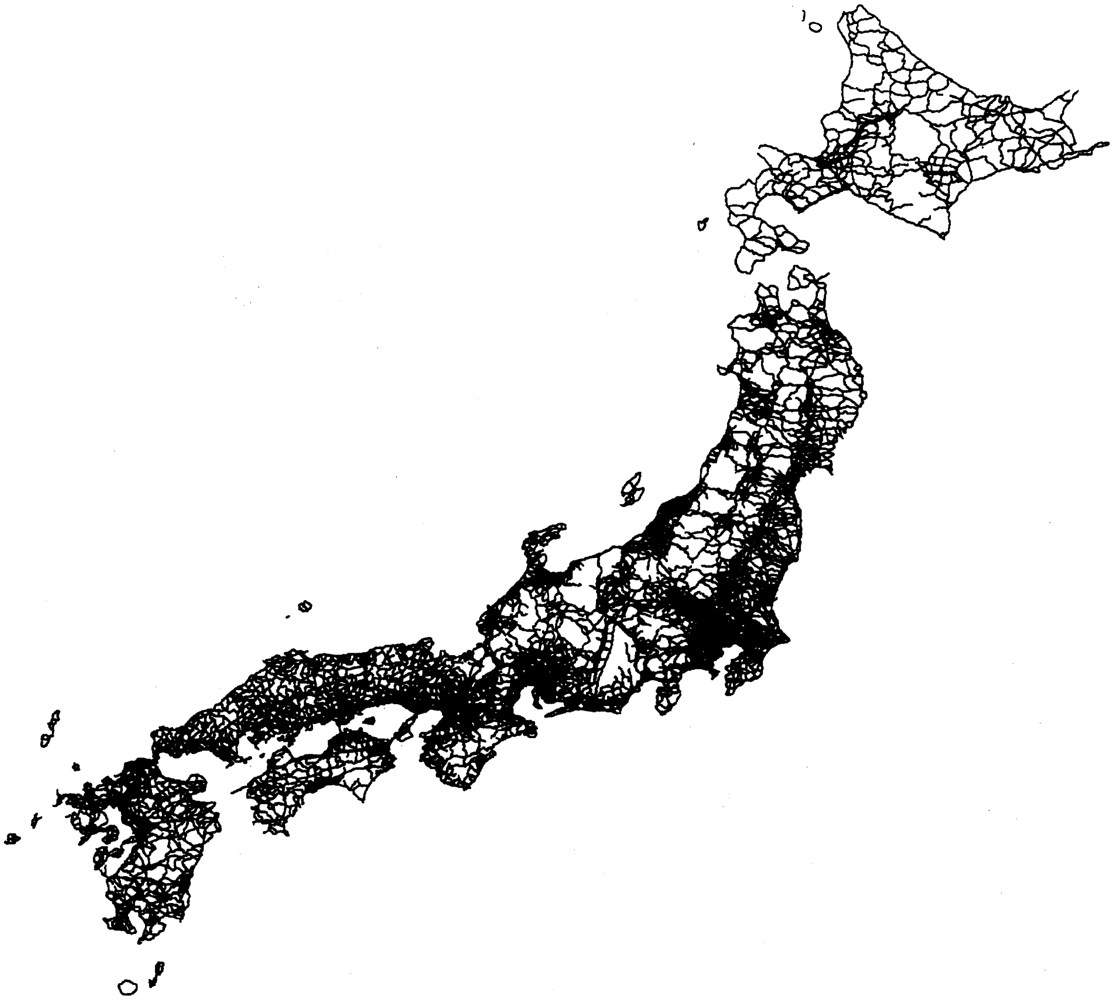


図 2: 日本の道路網

頂点を全て除いてしまい，再び期待連結安定関数を計算してみた.（次数 1 の頂点を除く操作をすると，その結果また次数 1 の頂点が生じる場合があるが，そのような場合は再びその次数 1 の頂点を除き，最終的に次数 1 の頂点がなくなるようにした.）

図??の下が，その結果得られたグラフである．どの場合でも，期待連結安定関数の値は大きくなっているが，各都県の関数の相対的な位置関係はほとんど変わっていない．他の県の計算結果でも，次数 1 の頂点を除くことによって，ある県の期待連結安定関数が他の県の期待連結安定関数を上回って，グラフの上下関係が逆転するような現象は見られなかった.

Remark 図??で次数 2 の頂点が極端に少ないのは，数値地図では道路を線分をつないで表現しているが，グラフを構成するときそれらの線分のつなぎ目は，例外を除き頂点にしなかったためである．除去しない例は図??の右側のような場合である．図中の頂点 b を除去すると，グラフ中に 2 重枝が生じる．今回は，2 重枝の

あるモデルは考慮しないで計算を行ったので b のような頂点はそのまま残した.

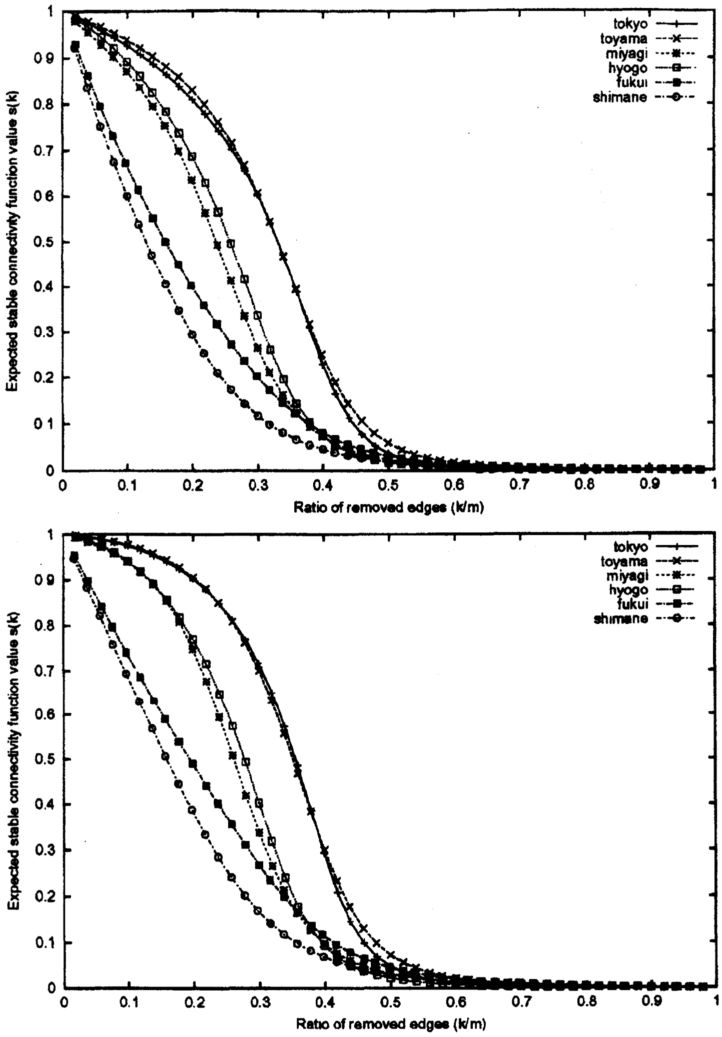


図 3: 6都県（東京都, 富山県, 宮城県, 兵庫県, 福井県, 島根県）の道路網の期待連結安定関数 (上), 次数 1 の頂点を除いたグラフの期待連結安定関数（下）

参考文献

[1] H. Morohosi and T. Oyama: Stable connectivity of networks and its Monte Carlo estimation, in *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing*, H. Niederreiter (ed.), Springer, to be published.

[2] 大山達雄: ネットワーク構造システムの連結安定性の定量的評価法, 日本 OR 学会春季研究発表会, pp. 160–161, 2000.

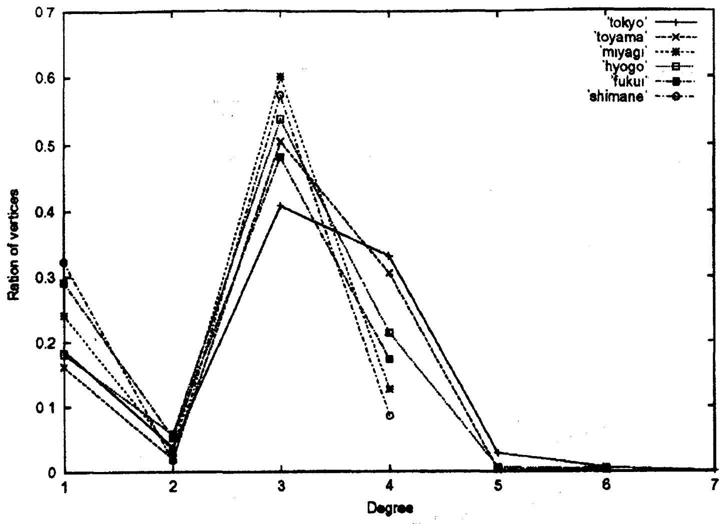


図 4: 6都県（東京都，富山県，宮城県，兵庫県，福井県，島根県）の道路網の次数の分布

[3] T. Oyama and H. Morohosi: A quantitative method for evaluating stable connectedness of the network-structured system, in *Operations Research and Its Applications*, X-S. Zhang and D. Liu(eds.), World Publishing, pp. 54–66, 2002.

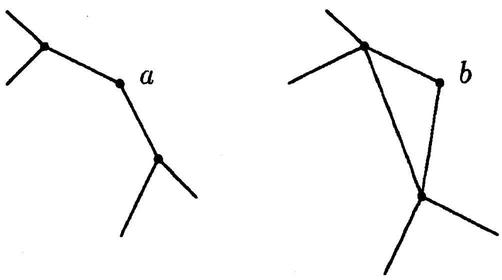
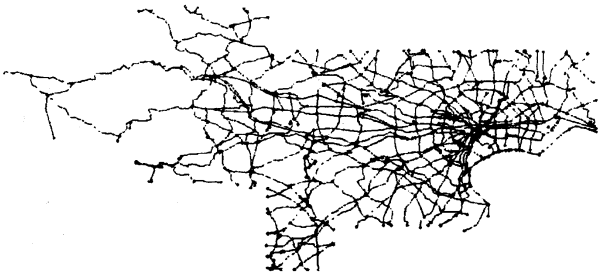
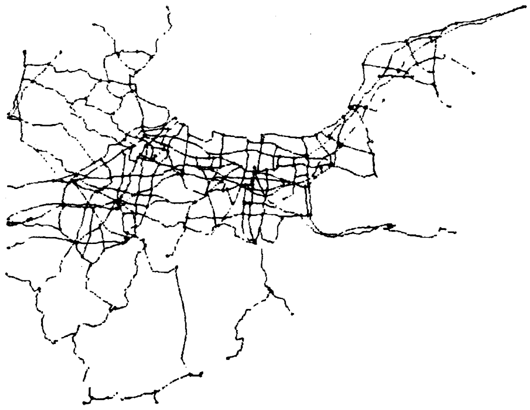


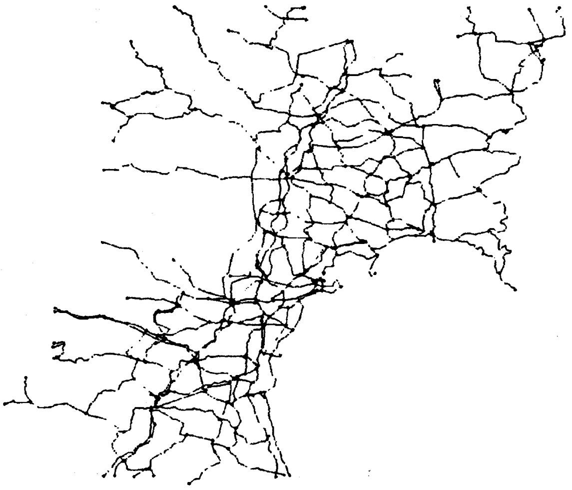
図 5: 次数 2 の頂点の除去．左図の a のような頂点は除去した．右図の b のように除去すると 2 重枝が生じてしまうような場合はその頂点を残した．



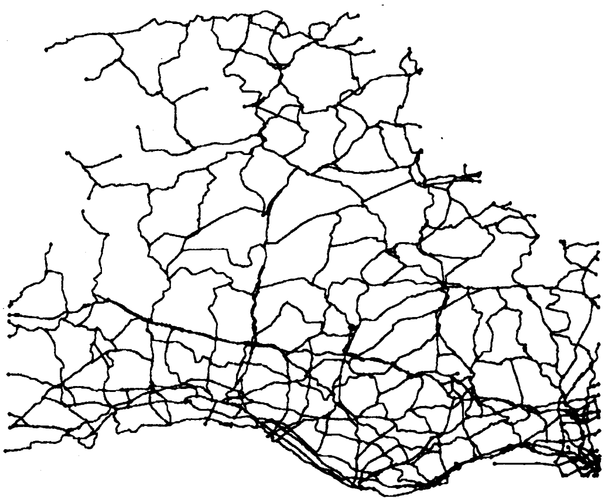
(a) 東京都



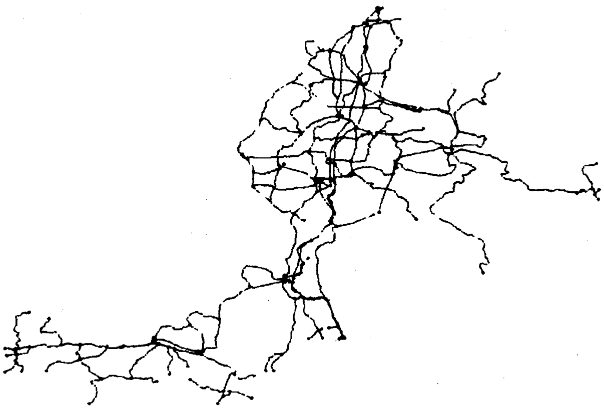
(b) 富山県



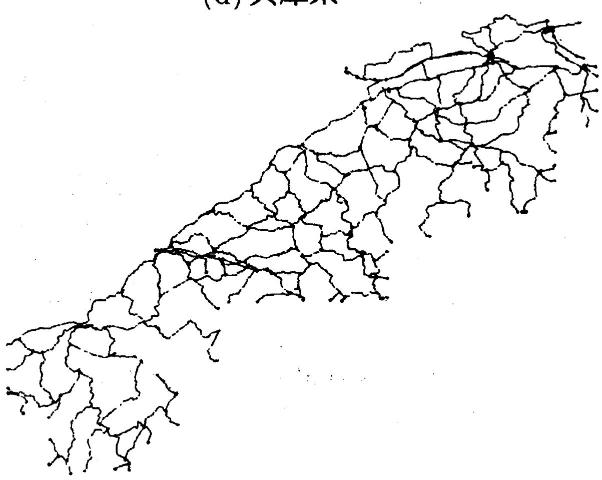
(c) 宮城県



(d) 兵庫県



(e) 福井県



(f) 島根県

図 6: 6 都県の道路網（縮尺はそれぞれ異なる）