

代用電荷法による数値等角写像と ポテンシャル流問題への応用

Numerical Conformal Mappings by the Charge Simulation
Method and Their Application to Potential Flow Analysis

愛媛大学工学部 天野 要 (Kaname Amano)
玉井政行 (Masayuki Tamai)
岡野 大 (Dai Okano)
緒方秀教 (Hidenori Ogata)

Faculty of Engineering, Ehime University

名古屋大学大学院工学研究科 杉原正顯 (Masaaki Sugihara)

Graduate School of Engineering, Nagoya University

1 はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の1つであり、物理学や工学への応用も広い。Riemannの写像定理によれば、(全複素平面である場合を除く) 任意の単連結領域 D は単位円板領域に等角写像することができる。その写像関数 $w = f(z)$ は、 D 内の任意の1点を z_0 とし、条件 $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ の下に一意に定まる。また、 D が滑らかな Jordan 閉曲線で囲まれた有界な領域の場合には、その写像関数は Bergman 核関数や Szegő 核関数を用いて記述することができる [7]¹。しかし、このように等角写像の存在と一意性や理論的な表現形式は知られていても、実際に $f(z)$ の近似関数を高い精度で効率よく構成することは決して簡単ではない。多くの場合、与えられた条件を満たす等角写像を求める問題は数値計算によらなければならない。それ故、等角写像の数値計算法すなわち数値等角写像の方法は数値解析の分野では重要な研究課題の1つである [6, 7, 9, 20]。

このような数値等角写像の方法としては、積分方程式による方法が代表的であり、Symmの積分方程式法 [19] が著名である。これは、等角写像の問題を1対の共役な調和関数のポテンシャル問題に帰着させ、この共役な調和関数を1重層複素対数ポテンシャルで表現して、第1種 Fredholm 型の積分方程式を解いて数値的に求めると、いう方法である。積分方程式法の1つとして、Szegő 核関数が第2種 Fredholm 型の積分方程式の解になることを利用した方法も知られている [8]。

天野 [1] は数値等角写像にポテンシャル問題の高精度高速解法として知られている代用電荷法 [10, 11, 15] を適用した。これは、Symm の積分方程式法と同様に等角写像の問題

¹再生核の理論(核関数の理論)の源は、Riemannの写像関数を具体的に構成するために、計算可能な再生核による表現を求めたことにあるとされている [18]。

を1対の共役な調和関数 $g(x, y)$, $h(x, y)$ のポテンシャル問題に帰着させ、この共役な調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で表現して、その未定係数を数値的に定める、という方法である。具体的には、まず、2次元 Laplace 方程式の解を問題の領域 D の外部に特異点 ζ_i を持つ対数ポテンシャルの1次結合で

$$g(x, y) = g(z) \simeq \sum_{i=1}^N Q_i \log |z - \zeta_i|, \quad z = x + iy \quad (1)$$

と表現する。 Q_i は実未定係数である。すると、共役な調和関数は自然に

$$h(x, y) = h(z) \simeq \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i), \quad z = x + iy \quad (2)$$

と表現できる。結局、問題の等角写像の近似写像関数として、複素対数関数の1次結合

$$g(x, y) + ih(x, y) = g(z) + ih(z) \simeq \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i), \quad z = x + iy \quad (3)$$

を含む表現形式が得られる。そして、未定係数 Q_i の値を問題の等角写像が満たすべき条件を近似的に満たすように決定する。この方法は、原理とプログラミングが簡単で、曲線境界や非有界領域の問題に適している。また、滑らかな境界の問題に対しては精度が高く、誤差の評価も容易である。その後、代用電荷法を適用した数値等角写像の方法は単連結領域の外部問題や2重連結領域の問題 [2]、より一般的な多重連結領域の問題 [3] へと適用範囲を広げて来た。

最近、著者ら [5] は幾つかの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から、平行スリット領域への等角写像 $w = f_p(z)$ 、円弧スリット領域への等角写像 $w = f_c(z)$ 、放射スリット領域への等角写像 $w = f_r(z)$ の近似写像関数の統一的な構成法を条件 $f_p(\infty) = f_c(\infty) = f_r(\infty) = \infty$ の下に提案した。ここに、統一的とはすべての問題が同じ係数行列を持つ連立1次方程式を解くことに帰着し、 $O(N^3)$ の計算量を要する行列の LU 分解は1度行えばよいことを意味する。これらの等角写像によって障害物を伴う一様流、渦流、湧き出し（吸い込み）流の解析が可能であることは広く知られている。しかし、その簡単で精度の高い数値計算法はこれまでほとんど知られていなかった。

ここでは、 v を領域内に与えられた有限な点として、同じ非有界な多重連結領域から円弧スリット領域と放射スリット領域への等角写像の近似写像関数を異なる条件 $f_c(v) = f_r(v) = \infty$, $v \neq \infty$ の下に構成する。このような等角写像によって渦対流や湧き出し・吸い込み対流の直接的な解析が可能になる。

2 円弧スリット領域への数値等角写像の方法

この節では、 $z (= x + iy)$ 平面上の Jordan 閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n の外側の無限遠点を含む非有界な n 重連結領域 D から、 w 平面上の円弧スリット領域への等角写像 $w = f_c(z)$ を考える (図1)。

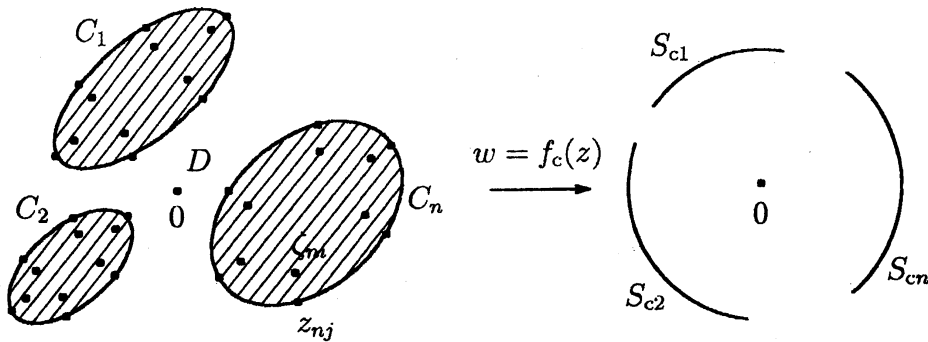


図 1: 代用電荷法による円弧スリット領域への数値等角写像

2.1 写像定理

定理 1. 領域 D 内の任意 2 点を u, v に対して, この等角写像は $f_c(u) = 0, f_c(v) = \infty, v$ における留数 $\text{Res}_{z=v} f_c(z) = 1$ という条件の下に一意に定まる [12].

この 2 点 u, v (ここでは有限な点を考える) を正規化点と呼び, 等角写像を一意に定める条件を正規化条件と呼ぶ. 正規化点 v における条件は $z = v$ の近くで Laurent 級数が

$$f_c(z) = \frac{1}{z-v} + a_0 + a_1(z-v) + a_2(z-v)^2 + \dots \quad (4)$$

となることを意味する. 写像の結果, 曲線 C_1, C_2, \dots, C_n はそれぞれ原点を中心とする半径 r_1, r_2, \dots, r_n なる円弧スリット $S_{c1}, S_{c2}, \dots, S_{cn}$ に移るとする. スリットの位置と長さは正規化条件によって写像関数とともに定まる.

座標系の原点を $u = 0$ にとって (問題の一般性を失わない), この等角写像の写像関数を

$$f_c(z) = \frac{z}{v(z-v)} \exp(g_c(z) + ih_c(z)) \quad (5)$$

と表現する. ここに, $g_c(z), h_c(z)$ ($g_c(x, y), h_c(x, y)$ をこのように略記する) は D で共役な調和関数で, 正規化条件 $\text{Res}_{z=v} f_c(z) = \lim_{z \rightarrow v} (z-v)f_c(z) = 1$, すなわち

$$g_c(v) + ih_c(v) = 0 \quad (6)$$

と, 境界条件 $|f_c(z)| = r_m, z \in C_m$, すなわち

$$\log \left| \frac{z}{v(z-v)} \right| + g_c(z) = \log r_m, \quad z \in C_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

を満たさなければならない. 写像関数 (5) の形から, 正規化条件 $f_c(0) = 0, f_c(v) = \infty$ は自然に満たされる. 等角写像の存在と一意性から, 等角写像の問題は (6), (7) を満たす 1 対の共役な調和関数 $g_c(z), h_c(z)$ のポテンシャル問題に帰着する.

2.2 代用電荷法の適用

この問題に代用電荷法を適用して、共役な調和関数を複素対数関数の1次結合で

$$g_c(z) + ih_c(z) \simeq G_c(z) + iH_c(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \quad (8)$$

と近似する。ここに、 Q_0 は未定の複素数、 Q_{li} は未定の実係数（電荷と呼ぶ）で、対数関数の特異点 ζ_{li} （電荷点と呼ぶ）は領域 D の外部すなわち閉曲線 C_l の内側に N_l 個ずつ配置する。近似関数 (8) に次の3条件を課す。

(i) 1価性条件：複素関数 (8) は一般に無限多価であり、これが D で1価であるためには

$$\int_{C_l} dH_c(z) = \int_{C_l} d \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{N_m} Q_{mi} \arg(z - \zeta_{mi}) = 2\pi \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0,$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

でなければならない。

(ii) 正規化条件：(6) と同様に

$$G_c(v) + iH_c(v) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(v - \zeta_{li}) = 0$$

を課す。したがって、

$$Q_0 = - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(v - \zeta_{li}) \quad (10)$$

で、(8) からこの Q_0 を消去して

$$G_c(z) + iH_c(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \quad (11)$$

を得る。

(iii) 拘束条件： C_m , $m = 1, 2, \dots, n$ 上に電荷と同数の点 z_{mj} （拘束点と呼ぶ）を N_m 個ずつ配置し、これらの点で選点的に境界条件 (7) を課して（この緩和された条件を拘束条件と呼ぶ）

$$\log \left| \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)} \right| + G_c(z_{mj}) = \log R_m,$$

すなわち

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \right| - \log R_m = -\log \left| \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)} \right|,$$

$$z_{mj} \in C_m, j = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

を得る. ここに, R_m は r_m を近似する未定の定数である.

式(9), (12)は電荷 Q_{li} とスリットの半径の対数 $\log R_m$ に関する $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立1次方程式を構成する. これを解いて, (11)で $G_c(z) + iH_c(z)$ を求め, (5)の右辺の $g_c(z) + ih_c(z)$ に代入して問題の等角写像の近似写像関数を構成することができる.

2.3 連続スキームの構成

複素対数関数の数値計算には主値すなわち \arg を $(-\pi, \pi]$ に制限した分枝を用いる. 主値を用いた(11)の $\log((z - \zeta_{li})/(v - \zeta_{li}))$ は v から見た ζ_{li} の背後の半直線 $\{\zeta_{li} + t \exp(i \arg(\zeta_{li} - v)) \mid t \geq 0\}$ 上に $2\pi i$ の不連続を生じる. 我々は領域 D 内にこのような不連続を生じない近似写像関数を構成したい.

ここでは, 閉曲線 $C_l, l = 1, 2, \dots, n$ はそれぞれの内側の1点 ζ_{l0} に対して星形であると仮定する. そして, (9)を用いて(10), (11)を

$$Q_0 = -\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{v - \zeta_{li}}{v - \zeta_{l0}},$$

$$G_c(z) + iH_c(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \left(\log \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}} - \log \frac{v - \zeta_{li}}{v - \zeta_{l0}} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}} + Q_0$$

と変形する. この式では主値を用いた $\log((z - \zeta_{li})/(z - \zeta_{l0}))$ の不連続は2点 ζ_{li}, ζ_{l0} を結ぶ直線上に現れる. したがって, 次のアルゴリズムによって D で連続な近似写像関数(連続スキームと呼ぶ)を構成することができる².

アルゴリズム 1. 上記の仮定の下に, 問題の等角写像の近似写像関数を

$$F_c(z) = \frac{z}{v(z-v)} \exp(G_c(z) + iH_c(z)), \quad (13)$$

$$G_c(z) + iH_c(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}, \quad (14)$$

$$Q_0 = -\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{v - \zeta_{li}}{v - \zeta_{l0}} \quad (15)$$

²一般の場合にも, 簡単な変数変換で連続な近似写像関数を構成することが可能である.

と表現する. 未定の電荷 Q_{li} とスリットの半径の対数 $\log R_m$ は $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立1次方程式

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \right| - \log R_m = -\log \left| \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)} \right|,$$

$$z_{mj} \in C_m, \quad j = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0,$$

$$l = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

を解いて定める.

なお, Q_0 は $F_c(\infty)$ との間に $F_c(\infty) = (1/v) \exp Q_0$ すなわち $Q_0 = \log(vF_c(\infty))$ なる関係がある.

2.4 数値例

半径の異なる3つの円

$$|z - \zeta_{l0}| = \rho_l, \quad \rho_1 = 1.5, \quad \rho_2 = 1.0, \quad \rho_3 = 0.5, \quad \zeta_{l0} = 2 \exp \frac{(2(l-1) + 1)\pi i}{3},$$

$$l = 1, 2, 3$$

の外側を領域 D とし, 正規化点を $u = 0, v = 4$ と取る. また, 拘束点と電荷点を

$$z_{lj} = \zeta_{l0} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \quad \zeta_{lj} = \zeta_{l0} + q\rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N},$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, 3$$

と配置する. ここに, $0 < q < 1$ は電荷配置のパラメータである. 厳密解は知られていないので, 相対誤差

$$E_{Ml} = \max_{1 \leq j \leq N} \left| \frac{|F_c(z_{lj+1/2})|}{R_l} - 1 \right|, \quad E_{Rl} = \left| \frac{R_l}{R_{l,2N}} - 1 \right|, \quad l = 1, 2, 3$$

を精度の指標として計算する. ここに, $z_{lj+1/2}$ は C_l 上の拘束点 z_{lj} , z_{lj+1} ($z_{lN_l+1} = z_{l1}$) の中間点であり, $R_{l,2N}$ は電荷数を N から $2N$ に倍増した場合の R_l の計算値である.

図2, 表1に計算結果を示す. スリットの半径は $R_l - R_{l,2N}$ に零以外の数字が現れる桁までの値であり, $cond$ は連立1次方程式の L_1 条件数である. 図2(a), (b) は, z 平面上の実軸または虚軸に平行な直線群が領域 D から円弧スリット領域への数値等角写像 $w = F_c(z)$ によって写像される様子を示したものである. 半径最大の円 C_1 が原点左下方のスリットに, C_2 が原点右下方のスリットに, 半径最小の円 C_3 が原点上方のスリットに移っている. 図(b)の空白部分は(a)で直線群を描いた正方形領域の外部の像で, \times 印は $F_c(\infty) \simeq 0.30 + 0.086i$ の位置を示している. 図2(c)は閉曲線 C_1, C_2, C_3 を輪郭線とする円形の障害物の周囲の渦対流の流線である. 強さの等しい正負の向きの一対の渦が存在し, 正の向きの渦が正規化点 $u = 0$ に, 負の向きの渦が $v = 4$ に位置している. この流れの複素ポテンシャルは $-\log F_c(z)$ で与えられる. 流線はその虚部 $-\log |F_c(z)|$ の等高線である.

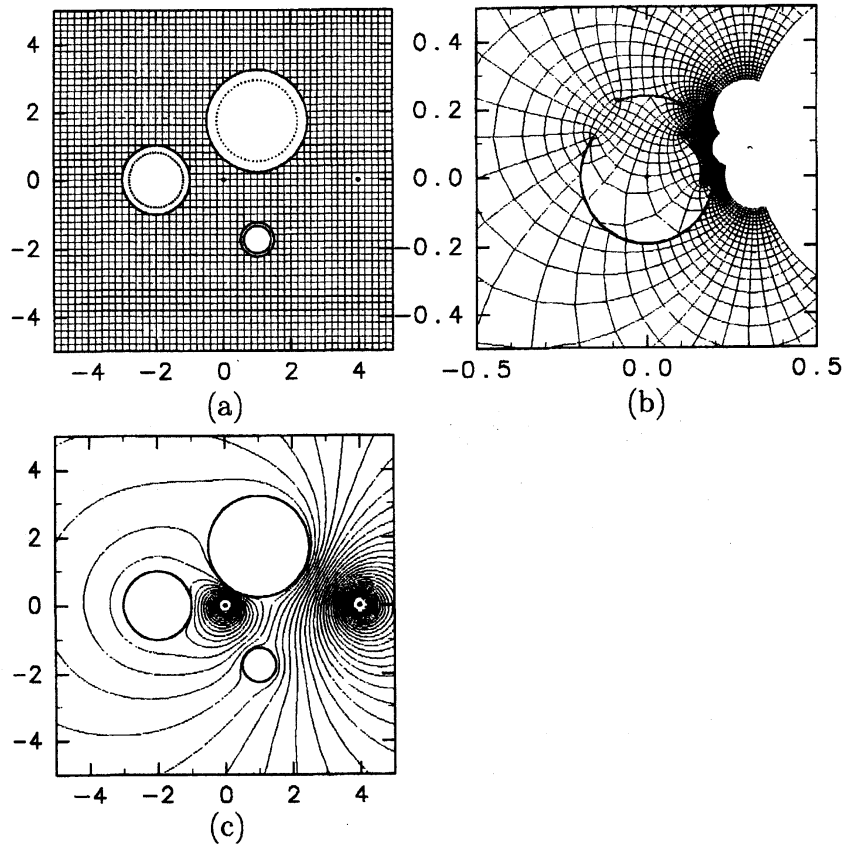


図 2: (a) 問題領域 D から (b) 円弧スリット領域への数値等角写像 $w = F_c(z)$ と (c) 渦対流 (強さの等しい正負の渦が $u = 0, v = 4$ に存在している) の流線

表 1: 誤差評価 ($cond = 1.2 \times 10^5, N = 64, q = 0.8$)

	E_{Ml}	E_{Rl}	R_l
C_1	3.8E-5	9.8E-9	0.194527861
C_2	6.8E-8	1.9E-8	0.159889298
C_3	1.4E-8	1.5E-8	0.237455547

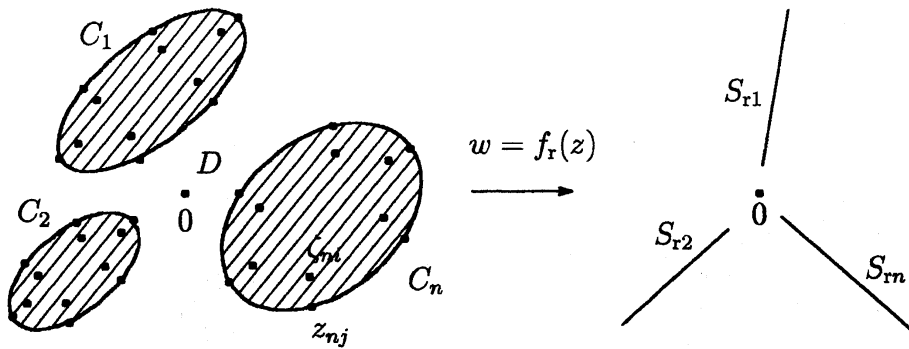


図 3: 代用電荷法による放射スリット領域への数値等角写像

3 放射スリット領域への数値等角写像の方法

前節と同じ非有界な n 重連結領域 D から, w 平面上の放射スリット領域への等角写像 $w = f_r(z)$ を考える (図 3). 前節と同じ構成で簡潔に記述を進めることにする.

3.1 写像定理

定理 2. 領域 D 内の任意の 2 点 u, v に対して, この等角写像は $f_r(u) = 0, f_r(v) = \infty, v$ における留数 $\text{Res}_{z=v} f_r(z) = 1$ という条件の下に一意に定まる [12].

正規化点 v における条件は $z = v$ の近くで Laurent 級数が

$$f_r(z) = \frac{1}{z-v} + b_0 + b_1(z-v) + b_2(z-v)^2 + \dots \quad (18)$$

となることを意味する. 写像の結果, 曲線 C_1, C_2, \dots, C_n はそれぞれ原点を中心とする偏角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ なる放射スリット $S_{r1}, S_{r2}, \dots, S_{rn}$ に移るとする.

座標系の原点を $u = 0$ にとって (問題の一般性を失わない), この等角写像の写像関数を

$$f_r(z) = \frac{z}{v(z-v)} \exp(i(g_r(z) + ih_r(z))) \quad (19)$$

と表現する. ここに, $g_r(z), h_r(z)$ は D で共役な調和関数で, 正規化条件 $\text{Res}_{z=v} f_r(z) = \lim_{z \rightarrow v} (z-v)f_r(z) = 1$, すなわち

$$g_r(v) + ih_r(v) = 0 \quad (20)$$

と, 境界条件 $\arg f_r(z) = \theta_m, z \in C_m$, すなわち

$$\arg \frac{z}{v(z-v)} + g_r(z) = \theta_m, \quad z \in C_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

を満たさなければならない. 写像関数 (19) の形から, 正規化条件 $f_r(0) = 0, f_r(v) = \infty$ は自然に満たされる. 等角写像の問題は (20), (21) を満たす 1 対の共役な調和関数 $g_r(z), h_r(z)$ のポテンシャル問題に帰着する.

3.2 代用電荷法の適用

前節と同様に、この共役な調和関数を複素対数関数の1次結合で

$$g_r(z) + ih_r(z) \simeq G_r(z) + iH_r(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \quad (22)$$

と近似して、次の3条件を課す。

(i) 1価性条件：(22)が D で1価であるためには、(9)と同様に

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

でなければならない。

(ii) 正規化条件：(20)と同様に $G_r(v) + iH_r(v) = 0$ を課して、(10), (11)と同様に

$$Q_0 = - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(v - \zeta_{li}), \quad (24)$$

$$G_r(z) + iH_r(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \quad (25)$$

を得る。

(iii) 拘束条件： C_m , $m = 1, 2, \dots, n$ 上の拘束点 z_{mj} , $j = 1, 2, \dots, N_m$ で選点的に境界条件(21)を課して、

$$\arg \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)} + G_r(z_{mj}) = \Theta_m,$$

すなわち

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \right| - \Theta_m = - \arg \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)},$$

$$z_{mj} \in C_m, \quad j = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

を得る。ここに、 Θ_m は θ_m を近似する未定の定数である。

式(23), (26)は電荷 Q_{li} とスリットの偏角 Θ_m に関する $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立1次方程式を構成する。これを解いて、(25)で $G_r(z) + iH_r(z)$ を求め、(19)の右辺の $g_r(z) + ih_r(z)$ に代入して問題の等角写像の近似写像関数を構成することができる。

3.3 連続スキームの構成

前節と同様、閉曲線 C_l , $l = 1, 2, \dots, n$ はそれぞれの内側の1点 ζ_{l0} に対して星形であると仮定し、次のアルゴリズムによって問題の領域 D で連続な近似写像関数を構成することができる。

アルゴリズム 2. 上記の仮定の下に, 問題の等角写像の近似写像関数を

$$F_r(z) = \frac{z}{v(z-v)} \exp(i(G_r(z) + iH_r(z))), \quad (27)$$

$$G_r(z) + iH_r(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}, \quad (28)$$

$$Q_0 = - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \frac{v - \zeta_{li}}{v - \zeta_{l0}} \quad (29)$$

と表現する. 未定の電荷 Q_{li} とスリットの偏角 Θ_l は $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{v - \zeta_{li}} \right| - \Theta_m = - \arg \frac{z_{mj}}{v(z_{mj} - v)}, \quad (30)$$

$$z_{mj} \in C_m, \quad j = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0, \quad (31)$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

を解いて定める.

なお, Q_0 は $F_r(\infty)$ との間に $F_r(\infty) = (1/v) \exp(iQ_0)$ すなわち $Q_0 = -i \log(vF_r(\infty))$ なる関係がある. また, 解くべき連立 1 次方程式の係数行列は円弧スリット領域の場合の (16), (17) と同じである.

3.4 数値例

前節と同じ問題領域 D から放射スリット領域への等角写像を, 前節と同じ正規化点 u, v に対して, 前節と同じ配置の拘束点 z_{lj} と電荷点 ζ_{lj} を用いて計算する. また, 精度の指標として

$$E_{Al} = \max_{1 \leq j \leq N} |\arg F_r(z_{lj+1/2}) - \Theta_l|, \quad E_{\Theta_l} = |\Theta_l - \Theta_{l,2N}|, \quad (32)$$

$$l = 1, 2, 3$$

を計算する.

図 4, 表 2 に計算結果を示す. 図 4(a), (b) は問題の領域 D から放射スリット領域への数値等角写像 $w = F_r(z)$ の様子を示したものであり, \times 印は $F_r(\infty) \simeq 0.19 - 0.060i$ の位置を示している. 図 4(c) は閉曲線 C_1, C_2, C_3 を輪郭線とする円形の障害物の周囲の湧き出し・吸い込み流の流線である. 強さの等しい湧き出しと吸い込みの対が存在し, 湧き出しが正規化点 $u = 0$ に, 吸い込みが $v = 4$ に位置している. この流れの複素ポテンシャルは $\log F_r(z)$ で与えられる. 流線はその虚部 $\arg F_r(z)$ の等高線である.

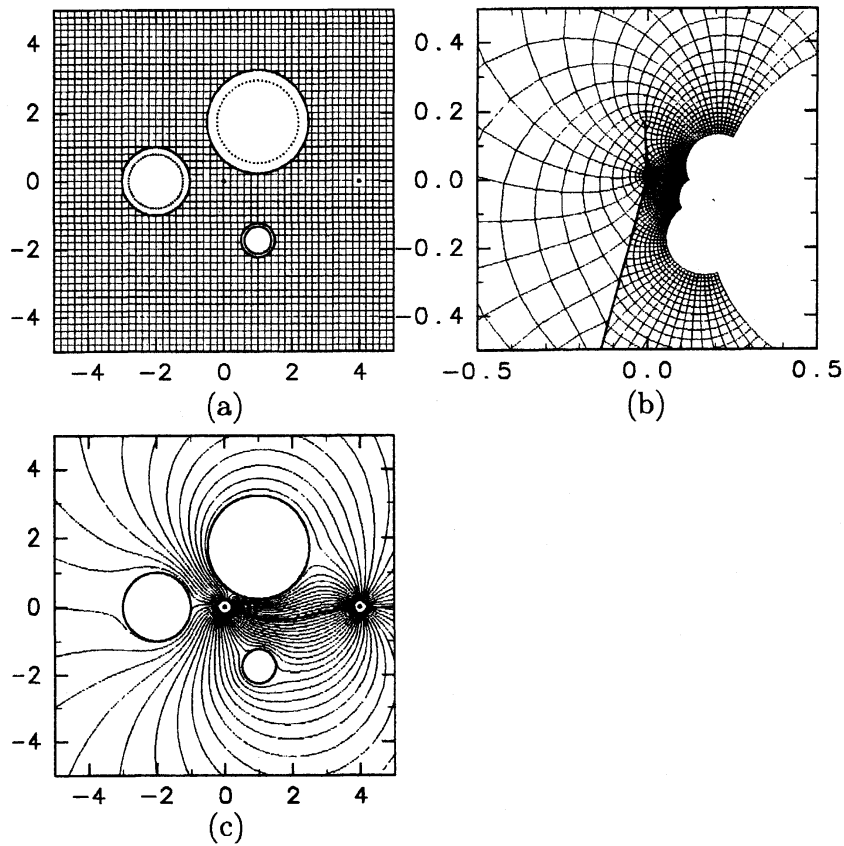


図 4: (a) 問題領域 D から (b) 放射スリット領域への数値等角写像 $w = F_r(z)$ と (c) 湧き出し・吸い込み対流 (強さの等しい湧き出しと吸い込みが $u = 0, v = 4$ に存在している) の流線

表 2: 誤差評価 ($cond = 1.2 \times 10^5, N = 64, q = 0.8$.)

	E_{A_l}	E_{Θ_l}	Θ_l
C_1	2.5E-5	5.1E-9	-1.839006980
C_2	6.1E-8	1.7E-8	-0.39643092
C_3	2.9E-8	5.8E-9	1.615741518

4 おわりに

非有界な多重連結領域から円弧スリット領域への等角写像 $w = f_c(z)$ と放射スリット領域への等角写像 $w = f_r(z)$ の近似写像関数を条件 $f_c(v) = f_r(v) = \infty$, $v \neq \infty$ の下に構成した. 数値実験では境界が円の場合を扱ったが, 楕円や Cassini の楕形等の場合でもその有効性を数値実験的に確認している. これらの等角写像によって, 障害物を伴う渦対流, 湧き出し・吸い込み対流の解析が可能になる. 渦対流, 湧き出し・吸い込み対流は条件 $f_c(\infty) = f_r(\infty) = \infty$ を課した等角写像を用いて複素ポテンシャルの重ね合わせで実現することもできる [4]. しかし, その直接的な計算が可能になることの意義は大きい. 同様な問題は流体力学だけでなく電磁気学, 電気工学等のポテンシャル問題全般に広く現れるからである.

代用電荷法を適用した数値等角写像の利点は表現が簡潔で精度の高い近似写像関数が得られることである. 例えば, 近似写像関数が解析的に微分可能であることを利用して, ポテンシャル流中の障害物の周囲にできる淀み点の位置を簡単に計算することができる [16]. また, 近似写像関数に Blasius の公式を適用して, ポテンシャル流中の物体に働く力を簡単かつ高精度に計算することができる [13]. なお, 最近では, 代用電荷法による数値等角写像の方法は周期領域の問題 [14] や, 問題の領域にスリットを伴うような領域の問題 [17] 等にもその適用範囲を広げている.

謝辞 この研究は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究(B)(2) (課題番号 15340033) の助成を受けている.

参考文献

- [1] 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- [2] Amano, K.: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, J. Comput. Appl. Math., Vol. 53, No. 3, pp. 353-370 (1994).
- [3] Amano, K.: A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 19, No. 4, pp. 1169-1187 (1998).
- [4] Amano, K., Okano, D., Shimohira, H., Okamoto, T. and Igaue, Y.: Potential flow analysis by the numerical conformal mapping, Information, Vol. 3, No. 1, pp.73-88 (2000).
- [5] 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯: 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法, 情報処理学会論文誌, Vol. 42, No. 3, pp. 385-395 (2001).

- [6] Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, Springer, Berlin (1964).
- [7] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, John Wiley & Sons, New York (1986).
- [8] Kerzman, N. and Trummer, M. R.: Numerical conformal mapping via the Szegő kernel, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1-2, pp. 111-123 (1986).
- [9] Kythe, P. K.: *Computational Conformal Mapping*, Birkhäuser, Boston (1998).
- [10] 村島定行 : 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京 (1983).
- [11] 室田一雄 : 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, *情報処理学会論文誌*, Vol. 34, No. 3, pp. 533-535 (1993).
- [12] Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York (1952); Dover, New York (1975).
- [13] Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Computations of the forces on obstacles in two-dimensional potential flows by the charge simulation method, *Information*, Vol. 5, No. 3, pp. 307-318 (2002).
- [14] Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Numerical conformal mapping of periodic structure domains, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol. 19, No. 2, pp. 257-275 (2002).
- [15] 岡本 久, 桂田祐史 : ポテンシャル問題の高速解法, *応用数理*, Vol. 2, No. 3, pp. 2-20 (1992).
- [16] Okano, D., Ogata, H. and Amano, K.: Stagnation point analysis by the numerical conformal mapping using the charge simulation method, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 303-309 (2001).
- [17] Okano, D., Ogata, H. and Amano, K.: A method of numerical conformal mapping of curved slit domains by the charge simulation method, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 152, No. 1-2, pp. 441-450 (2003).
- [18] 斎藤三郎 : 再生核の理論入門, 牧野書店, 東京 (2002).
- [19] Symm, G. T.: An integral equation method in conformal mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- [20] Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam (1986); *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1-2 (1986).