数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 48-67

I-method with application to damped forced KdV equation

東北大学大学院理学研究科　　津川　光太郎
Mathematical Institute, Tohoku University　　Kotaro Tsugawa

1 Introduction

近年，非線形双曲型偏微分方程式の初期値問題の研究において，調和解析的手法が注目を浴びている．初期値問題においてもっとも基本になる問題が，時間局所適切性（解の一意存在、初期値に対する連続依存性）である．十分に滑らかな初期値に対しては，一般論により，時間局所適切性を示す事が出来るが，出来るだけ広い関数空間の初期値に対して時間局所適切性を示す事が目標である．特に，初期値の関数空間としてはソボレフ空間 H^s を考えるのが一般的である．1993 年に Bourgain は 時空間 Fourier 空間上で定義され，方程式の線形部分に対応する独特の重みを持つノルム（Fourier restriction norm 第 4 章参照）を利用して，KdV 方程式や非線形 Schrödinger 方程式の適切性の問題に大きな発展をもたらした ([2])．この手法は Fourier restriction norm method と呼ばれ，その後，Kenig-Ponce-Vega らによって改良され，その後，多くの研究に応用されている ([9])．

時間局所適切性が示されると，次に問題となるのが，解の時間大域

的振る舞いである．つまり，得られた時間局所解は，時間大域的に存在するのか？それとも，有限時間で爆発するのか？解の漸近挙動は？などの問題である．物理に現れる多くの方程式は，エネルギーなどの保存量を持つことが多く，H^1 ノルムに相当するものが保存される．よって，$s=1$ において時間局所適切性が示されていれば，通常，解の存在時間は初期値の大きさのみに依存するので，保存則より，繰り返し解く事が出来て，時間大域解の存在が示せる。その他，多くの時間大域的振る舞いの研究に保存則が使われる．しかし、$s<1$ の場合には，時間局所適切性が示されても，エネルギーが存在しないため，時間大域的振る舞いを研究するのは難しいと思われていた．1997年に Bourgain は Fourier 空間上で低周波成分と高周波成分に分割し，近似的にそれらが満たす方程式のシステムを考え，低周波と高周波の間でのエネルギーの移動を計算することによって，$s<1$ の場合に対しても，時間大域解の存在を示す事に成功した ([3])．しかし，この手法では，方程式がある種の smoothing effect を持たなければ利用出来ないなど，いくつか制限があった．これに対して、Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Tao のチームは低周波成分と高周波成分を単純には分割せずに，より滑らかに近似し，擬保存量を計算する手法を編み出した [4],[5]．この手法は I-method と呼ばれ，エネルギーより広い空間での時間大域的振る舞いの研究に利用され，現在も発展中の手法である．はじめに，摩擦項と外力項を持つ KdV 方程式に応用しグローバルアトラクターの存在を示した結果を紹介し ([12])，その証明の概略として I-method を紹介する．

2 Main results

KdV 方程式は浅い水路の水面上の一次元波動を表す方程式として導入され、後に、多くの物理モデルを表すことが示された。しかし、現実には、多くの場合において、外力や摩擦などの影響を無視できない ([1],[10],[14]). よって，以下のようなダンピング項と外力項を持つ KdV 方程式を考えるのが自然である.

$$\partial_t u + \gamma u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2) = f, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \dot{H}^s(\mathbb{T}), \tag{2}$$

ここで，$\mathbb{T}$ は1次元トーラスとし、未知関数 u は $\mathbb{T}\times[0,\infty)$ から $\mathbb{R}$ への写像とし, ダンピングパラメーター γ は正の定数とし，外力項は $f \in \dot{L}^2(\mathbb{T})$ で，時間に依らないものとする．ここで、 $\dot{L}^2(\mathbb{T}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}); \widehat{u}(0) = 0\}$, $\dot{H}^s(\mathbb{T}) = \{u \in H^s(\mathbb{T}); \widehat{u}(0) = 0\}$ であり，$\widehat{u}$ は u の x 変数に対する Fourier 変換である．初期値問題 (1)–(2) に対するグローバルアトラクターの存在は $s \geq 0$ という条件下で，多くの研究がなされている．ここで既知の結果について述べる．古典解, つまり初期値として $H^2(\mathbb{T})$ の関数を与え $f \in H^2$ という条件下では, Ghidaglia ([6]) が弱グローバルアトラクターの存在（つまり，ある H^2 の有界集合が flow によって不変であり $t \to +\infty$ としたとき，すべての解が H^2-弱位相で引き付けられる）を示した．さらに，このアトラクターが H^1 で有限のハウスドルフ次元を持つことも示した．次に [7] において，この弱アトラクターは H^2 強位相においてもアトラクターであることが示された．

次にアトラクターの滑らかさについて，次の結果がある．Moise-Rosa は [13] において，初期値が H^3 で $f \in H^{3+k}$ のとき, H^3 位相でのグローバルアトラクターが存在し，それは H^{3+k} のコンパクトな部分集合で

ある事を示した（kは正の整数）．トーラス上のKdV方程式は平滑化作用を持たない事が知られているが，この結果は，初期値よりアトラクターの方が滑らかになっている事を示している．この性質は漸近的平滑化作用と呼ばれている．

次に，滑らかさの低い解について考える．Bourgainは[2]において，Fourier restriction norm methodと呼ばれる手法を考え出し，ダンピング項と外力項を持たない通常のKdV方程式が$L^2(\mathbb{T})$のクラスで時間局所適切である事を示した。KdV方程式はL^2保存則をもつので，この結果を用いて繰り返し解くことによって時間大域解に延長することが出来る．Kenig-Ponce-Vegaはこの手法を改良し，$s > -1/2$の条件下で$H^s(\mathbb{T})$のクラスで時間局所適切である事を示した([9])．これらの手法を用いて，Goubetは初期値が$\dot{L}^2(\mathbb{T})$のクラスのときに，初期値問題(1)–(2)はL^2の位相でグローバルアトラクターを持ち，これがH^3のコンパクトな部分集合になっている事を示した([8])．ここでは，時間大域的評価を得るために，KdV方程式のL^2保存則を利用している．

KdV方程式は無限個の保存量を持ち、それらは$H^j(j \in \mathbb{Z}, j \geq 0)$上で定義される．しかし，$s < 0$のときは$H^s$上で定義可能な保存量は存在しない．よって，負の指数を持つソボレフ空間上で時間大域的な解の振る舞いを研究するのは難しいと思われる．しかも，トーラス上のKdV方程式は平滑化作用を持たないので，$s < 0$という条件下では(1)–(2)の解は可測関数になるかどうかも判らない．[4]において，Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Taoはあるregularizing Fourier multiplier operator Iを導入し，負の指数を持つソボレフ空間上で定義される擬保存量を計算することによって，通常のKdV方程式が$s \geq -1/2$で時間大域的適切である事を示した．この手法は“I-method”と

呼ばれている.

保存量は解の振る舞いを司る重要な要因の一つなので，保存量の存在しない $s<0$ での解の時間大域的振る舞いと保存量の存在する $s\geq 0$ での解の時間大域的振る舞いは違ってくるかもしれない．それゆえ，通常の KdV 方程式にダンピング項と外力項をつけた (1)–(2) に対しても "I-method" が適用できるか？そして，アトラクターの存在が示せるか？もし示せたら，$s<0$ でのアトラクターと $s\geq 0$ でのアトラクターは同じか? というような疑問が自然に湧いてくる．これらの疑問に対して以下のような結果が得られた．

THEOREM 2.1 *We assume* $0\geq s>-3/8$ *and* $u_0\in \dot{H}^s$. *Then, there exist a semigroup* $S(t)$ *and maps* M_1 *and* M_2 *such that* $S(t)u_0$ *is the unique solution of* (1)–(2) *and*

$$S(t)u_0 = M_1(t)u_0 + M_2(t)u_0, \tag{3}$$

$$\sup_{t>T_1} \|M_1(t)u_0\|_{L^2} < K, \tag{4}$$

and for $t>T_1$

$$\|M_2(t)u_0\|_{H^s} < K\exp\left(-\gamma(t-T_1)\right) \tag{5}$$

where the constant K *depends only on* $\|f\|_{L^2}$ *and the constants* γ *and* T_1 *depends only on* $\|f\|_{L^2}$, γ *and* $\|u_0\|_{H^s}$.

$M_1(t)$ は compact mapping であり， $M_2(t)$ は H^s ノルムで一様に 0 に収束する．せれゆえ $S(t)$ asymptotically compact であり，[11] の Theorem 1.1.1 を適用すると，初期値が $\dot{H}^s$ に対して，(1)–(2) の H^s におけるグローバルアトラクター $\mathcal{A}$ の存在，および，それが $\dot{L}^2$ の有界集合であることが得られる．明らかに，$\mathcal{A}$ は $\dot{L}^2$ におけるアトラクター

でもある．$\mathcal{A}'$ を [8] において得られた $\dot{L}^2$ でのアトラクターとすると，上で述べた様に，$\mathcal{A}'$ は H^3 のコンパクトな部分集合であり，アトラクターの一意性より，$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ なので，以下の corollary が得られる．

COROLLARY 2.1 *Let* $0 \geq s > -3/8$. *Then, equations* (1)–(2) *possess a global attractor in* H^s, *that is a compact subset of* H^3.

REMARK 1 $f = 0$ の場合，$v = u \exp(\gamma t)$ と置き換えると，初期値問題 (1)–(2) は以下のように変形される

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x(v^2)\exp(-\gamma t) = 0,$$
$$v(x,0) = v_0(x) = u_0(x) \in \dot{H}^s(\mathbb{T}).$$

ここで $\exp(-\gamma t) \leq 1$ であり滑らかなので，この項を無視すると，通常の *KdV* 方程式になる．[4] における通常の *KdV* 方程式に対する結果を適用すると，$s \geq -1/2$, $\epsilon > 0$ に対して

$$\|v(t)\|_{H^s} \leq C t^{1/2+\epsilon} \|v_0\|_{H^s}$$

が得られる．よって容易に以下の評価式が得られる．

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq C t^{1/2+\epsilon} \exp(-\gamma t) \|u_0\|_{H^s}$$

これより，グローバルアトラクター $\mathcal{A}$ は $\{0\}$ の一点である．しかしながら，$f \neq 0$ の場合には，このタイプの評価式は明らかではない．実際，$f \neq 0$ の場合の評価式は $f = 0$ の場合より複雑で，Theorem 2.1 の証明における難しい点は，外力項 f の影響を上手く評価する点にある．

REMARK 2 簡単のため，非線形項 $\frac{1}{2}\partial_x(u^2)$ を無視し，$f = 0$ と仮定する．方程式 (1) に $D^s \exp(\gamma t)$ を掛けると

$$\partial_t \left(D^s u \exp(\gamma t)\right) + \partial_x^3 \left(D^s u \exp(\gamma t)\right) = 0, \tag{6}$$

がえられる．ただし，$D^s = \mathcal{F}_k^{-1}(1+|k|)^s\mathcal{F}_x$ である．(6) に $D^s u \exp(\gamma t)$ を掛けて $\mathbb{T}\times[0,t]$ 上で積分すると，

$$\|u(t)\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}\exp(-\gamma t).$$

が得られる．これは，評価式 (5) における $\|M_2(t)u_0\|_{H^s}$ の *decay rate* と同じである．この意味において，評価式 (5) は *optimal* である．

第3章において，時間大域的な a priori estimate を述べ，それを用いて Theorem 2.1 を証明する．第4章及び第5章で a priori estimate の証明の概略を述べる．第6章においていくつかの未解決問題について述べる．この論文では，スペースの都合により，定理の厳密な証明は行わない．特に，scaling を用いる部分と時間局所的な multilinear estimate 証明については，省略した．詳しくは，[12],[4] を参照して頂きたい．

3 a priori estimate

この章では Theorem 2.1 を示すためのアプリオリ評価式について述べる．そのために，まず，"I-method" において重要な役割を果たす，Fourier multiplier operator "I" の定義をする．

$\phi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ を滑らかな実数値単調関数で以下を満たすものとする．

$$\phi(k) = \begin{cases} 1, & |k|<1 \\ |k|^s, & |k|>2 \end{cases}.$$

そして，$m(k)=\phi(k/N)$ と定義すると，明らかに，

$$m(k) = \begin{cases} 1, & |k|<N \\ N^{-s}|k|^s, & |k|>2N \end{cases}.$$

が得られる．これを用いて作用素 “I” を以下の様に定義する．

$$\widehat{If(k)} = m(k)\widehat{f}(k).$$

すると，任意の関数 f 及び実数 $s<0$ に対して，以下のような評価式が成り立つ．

$$\|f\|_{H^s} \le \|If\|_{L^2} \le N^{-s}\|f\|_{H^s}. \tag{7}$$

また，$\widehat{g_1} = \widehat{f}\,\big|_{|k|<N}$,$\widehat{g_2} = \widehat{f}\,\big|_{|k|>N}$ と定義すると，以下のような評価式が成立する．

$$\|g_1\|_{L^2} \le \|If\|_{L^2}, \qquad \|g_2\|_{H^s} \le 2^{-s}N^s\|If\|_{L^2}.$$

これらの作用素 “I” の性質が成り立つことは，$m(k)$ のグラフを書けば明らかである．これらの性質は後の計算で頻繁に用いられる．この作用素を用いて以下のような，時間大域的な a priori estimate が得られる．

PROPOSITION 3.1 *Let* $0 \ge s \ge -1/2$, $T>0$ *be given,* $\epsilon > 0$ *be sufficiently small and* u *be a solution of* (1)–(2) *on* $t \in [0,T]$. *We assume* $N^{3(1-\epsilon)/4} \ge \gamma$, $N^{\epsilon-} \ge C_1T$ *and*

$$\|Iu_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\|If\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T) \le N^{3(1-\epsilon)/4}C_2, \tag{8}$$

then we have

$$\|Iu(T)\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T) \le C_3\left(\|Iu_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\|If\|_{L^2}^2\exp(2\gamma T)\right). \tag{9}$$

REMARK 3 この Proposition は $s \ge -1/2$ という条件で成り立っているが，実際に定理の証明に用いる時には (12) の右辺における N のオーダー $3(1-\epsilon)/4$ が重要な役割を果たす．これより，定理においては $s > -3/8$ が必要になる．逆に，(12) の右辺における N のオーダーを大きくする事が出来れば，定理の条件を緩める事が出来る．(第4,5章参照)

Proposition 3.1 の証明の概略は次章にまわし，ここではこの Proposition を用いて，Theorem 2.1 を証明する．

(Proof of Theorem 2.1) ϵ を $0 < \epsilon < 8s/3 + 1$ を満たすように選ぶ．また，$T_1 > 0$ を以下の式が成立するように選ぶ．

$$\exp(2\gamma T_1) > \|u_0\|_{H^s}^2 \|f\|_{L^2}^{-2} \max\Big\{\gamma^{-8s/3(1-\epsilon)}, (C_1 T_1)^{-2s/(\epsilon-)}, \\ \left((C_2/2)\|u_0\|_{H^s}^{-2}\right)^{8s/(8s+3(1-\epsilon))}, \left(2\gamma^{-2}C_2^{-1}\|f\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T_1)\right)^{-8s/3(1-\epsilon)}\Big\}, \tag{10}$$

実際そのように選ぶことは$-8s/3(1-\epsilon) < 1$ より十分大きなT_1 を取れば可能であり，T_1 は $\|f\|_{L^2}$ と γ と $\|u_0\|_{H^s}$ にしか依存しない．ここで，

$$N = \max\Big\{\gamma^{4/3(1-\epsilon)}, (C_1 T_1)^{1/(\epsilon-)}, \\ \left((C_2/2)\|u_0\|_{H^s}^{-2}\right)^{-4/(8s+3(1-\epsilon))}, \left(2\gamma^{-2}C_2^{-1}\|f\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T_1)\right)^{4/3(1-\epsilon)}\Big\}. \tag{11}$$

と置くと，

$$N^{3(1-\epsilon)/4} \geq \gamma, \qquad N^{\epsilon-} \geq C_1 T_1,$$
$$\|Iu_0\|_{L^2}^2 \leq N^{-2s}\|u_0\|_{H^s}^2 = N^{3(1-\epsilon)/4} N^{-2s-3(1-\epsilon)/4}\|u_0\|_{H^s}^2 \leq C_2 N^{3(1-\epsilon)/4}/2,$$
$$\gamma^{-2}\|If\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T_1) \leq C_2 N^{3(1-\epsilon)/4}/2.$$

が得られる．よって，Proposition 3.1 より，

$$\|u(T_1)\|_{H^s}^2 \leq \|Iu(T_1)\|_{L^2}^2 < C_3\left(N^{-2s}\|u_0\|_{H^s}^2 \exp(-2\gamma T_1) + \gamma^{-2}\|f\|^2\right),$$

が得られる．(10) と (11) より

$$N^{-2s}\exp(-2\gamma T_1) < \|u_0\|_{H^s}^{-2}\|f\|_{L^2}^2,$$

が成り立つ．従って

$$\|u(T_1)\|_{H^s}^2 < C_3(1+\gamma^{-2})\|f\|_{L^2}^2 < K_1$$

が得られる．ただし K_1 は $\|f\|_{L^2}$ と γ のみに依存する定数である．次に $T_2>0$ を固定し，初期値 $u(T_1)$ に対し (1)–(2) を $[T_1, T_1+T_2]$ で解く．$K_2>0$ を以下の式が任意の $t>0$ に対して成り立つように十分大きくとる．

$$K_2\exp(2\gamma t) > \max\Big\{\gamma^{-8s/3(1-\epsilon)}, (C_1t)^{-2s/(\epsilon-)},$$
$$2\big(C_2^{-1}K_1\big)^{-8s/3(1-\epsilon)}, 2\big(\gamma^{-2}C_2^{-1}\|f\|_{L^2}^2\exp(2\gamma t)\big)^{-8s/3(1-\epsilon)}\Big\} \quad (12)$$

これは，$-8s/3(1-\epsilon)<1$ であることにより，実際に可能であり，しかも K_2 は $\|f\|_{L^2}$ と γ にしか依存しない定数である．ここで $N^{-2s}=K_2\exp(2\gamma T_2)$ と置くと，(12) より Proposition 3.1 の仮定が満たされるので，

$$\|Iu(T_1+T_2)\|_{L^2}^2 \le C_3\left(N^{-2s}\|u(T_1)\|_{H^s}^2\exp(-2\gamma T_2)+\gamma^{-2}\|f\|_{L^2}^2\right)$$
$$< C_3\left(K_1K_2+\gamma^{-2}\|f\|_{L^2}^2\right) < K_3,$$

が得られる．ただし，K_3 は $\|f\|_{L^2}$ と γ にしか依存しない定数である．任意の $t>T_1$ に対し写像 $M_1(t)$ と $M_2(t)$ を

$$\widehat{M_1(t)u_0} = \widehat{S(t)u_0}\Big|_{|k|<N}, \quad \widehat{M_2(t)u_0} = \widehat{S(t)u_0}\Big|_{|k|>N},$$

と定める．ただし，$S(t)u_0=u(t)$ とし，$N=\big(K_2\exp(2\gamma(t-T_1))\big)^{-1/2s}$ とする．このとき，$t>T_1$ に対して

$$\|M_1(t)u_0\|_{L^2}^2 \le \|Iu(t)\|_{L^2}^2 < K_3,$$
$$\|M_2(t)u_0\|_{H^s}^2 \le N^{2s}\|Iu(t)\|_{L^2}^2 < K_2^{-1}K_3\exp(-2\gamma(t-T_1))$$

が得られる．よって $K=\max\{K_3^{1/2}, K_2^{-1/2}K_3^{1/2}\}$ と置くことにより，(4) と (5) が示された．

4 Outline of the proof of a priori estimate

この章では前章で述べた a priori estimate の証明の概略について述べる．初めに時間局所的評価について述べる．(1)–(2) に左から operator "I" を掛けると，

$$\partial_t Iu + \gamma Iu + \partial_x^3 Iu + \frac{1}{2}\partial_x I(u^2) = If, \tag{13}$$

$$Iu(x,0) = Iu_0(x) \in \dot{L}^2(\mathbb{T}), \tag{14}$$

となる．Introduction で述べたように，"I-method" を用いるのは，既に時間局所適切性が示されている場合であり．この場合も通常の KdV 方程式に対しては，[4] において既に示されている．これと同様の議論を (13)–(14) に対して適用すると，以下の Proposition4.1 が得られる．

PROPOSITION 4.1 *If $s \geq -1/2$, the initial value problem* (13)–(14) *is time locally well-posed for data u_0 satisfying $Iu_0 \in \dot{L}^2(\mathbb{T})$ and $If \in \dot{L}^2(\mathbb{T})$. Moreover, a unique solution exists on a time interval $[0,\delta]$ with the lifetime*

$$\delta \sim (\|Iu_0\|_{L^2} + \|If\|_{L^2} + \gamma)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

and the solution satisfies the estimates

$$\|Iu\|_{Y^0}(\mathbb{T}\times[0,\delta]) \lesssim \|Iu_0\|_{L^2} + \|If\|_{L^2},$$
$$\sup_{0\leq t\leq\delta} \|Iu(t)\|_{L^2} \lesssim \|Iu_0\|_{L^2} + \|If\|_{L^2}.$$

ここで，$\|\cdot\|_{Y^0}$ は Fourier restriction norm のバージョンの一つであり，以下のように定義される．$\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上の関数 $u = u(x,t)$ に対して，時空

間 Fourier 変換 $\widetilde{v}(k,\tau)$ を次のように定める.

$$\widetilde{u}(k,\tau) = \int\int_0^1 e^{-2\pi ikx}e^{-2\pi i\tau t}v(x,t)\,dxdt,$$

ただし，$k \in \mathbb{Z}, \tau \in \mathbb{R}$ である．$X_{s,b}$ のノルムを次のように定める.

$$\|u\|_{X_{s,b}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} = \|\langle k\rangle^s\langle\tau - 4\pi^2k^3\rangle^b\widetilde{u}(k,\tau)\|_{L^2(dkd\tau)}.$$

[2], [9] における $s > -1/2$ での periodic KdV の研究は $X_{s,1/2+\epsilon}$ ノルムを用いてなされているが，$s = -1/2$ も含めた，つまり $s \geq -1/2$ を扱うためには，以下の Y^s ノルムが必要である.

$$\|u\|_{Y^s} = \|u\|_{X_{s,1/2}} + \|\langle k\rangle^s\widetilde{u}(k,\tau)\|_{L^2(dk)L^1(d\tau)}.$$

このノルムの性質として，もし $u \in Y^s$ ならば $u \in L_t^\infty H_x^s$ である．また，時間局所的評価のために，いかのように時間局所化したノルムも必要である．任意の区間 $[t_1,t_2]$ に対し，$X_{s,b}(\mathbb{T}\times[t_1,t_2])$ 及び $Y^s(\mathbb{T}\times[t_1,t_2])$ をいかのように定義する.

$$\|u\|_{X_{s,b}(\mathbb{T}\times[t_1,t_2])} = \inf\{\|U\|_{X_{s,b}} : U|_{\mathbb{T}\times[t_1,t_2]} = u\},$$
$$\|u\|_{Y^s(\mathbb{T}\times[t_1,t_2])} = \inf\{\|U\|_{Y^s} : U|_{\mathbb{T}\times[t_1,t_2]} = u\}.$$

次に時間大域的評価を得るための概略について述べる．(13) に Iu を掛けてて次の式を得る.

$$Iu\partial_tIu + \gamma IuIu + Iu\partial_x^3Iu + \frac{1}{2}Iu\partial_xI(u^2) = IuIf,$$

これを空間積分すると第三項は消えて，以下のようになる.

$$\frac{d}{dt}\|Iu\|^2 + 2\gamma\|Iu\|^2 = -\int Iu\partial_xI(u^2)\,dx + 2\int IuIf\,dx.$$

ただし，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$ である．次に，$E(t) = \|Iu\|^2 \exp(2\gamma t)$ と置いて，$[0,T]$ 区間で時間積分すると，

$$
\begin{aligned}
E(T) - E(0) = &- \int_0^T \exp(2\gamma t) \int Iu\partial_x I(u^2)\,dxdt \\
&+ 2\int_0^T \exp(2\gamma t) \int IuIf\,dxdt.
\end{aligned} \tag{15}
$$

ここで，右辺第一項を誤差項として考えて，無視できるものと仮定すると，シュワルツの不等式より，

$$
\begin{aligned}
E(T) - E(0) &\le 2\|If\| \sup_{0\le t\le T} \|Iu\| \int_0^T \exp(2\gamma t)dt \\
&\le \frac{1}{2} \sup_{0\le t\le T} \|Iu\|^2 \exp(2\gamma T) + \frac{C}{\gamma^2}\|If\|^2 \exp(2\gamma T)
\end{aligned}
$$

これより，(9) を得る．よって，(15) の右辺第一項を評価する事が重要である．これには，Proposition4.1 の時間局所的評価を使う．そのために，整数 j を $T = j\delta$ とし，j についての数学的帰納法を用いる．ただし，この δ は Proposition4.1 における存在時間である．この部分を厳密な証明は [12],[4] を見て頂きたい．本質的に，以下の三次評価式を使う．

$$
\left|\int_0^\delta \int Iu\partial_x I(u^2)\,dxdt\right| \le CN^{-1/2}\|Iu\|^3_{Y^0(\mathbb{T}\times[0,\delta])}. \tag{16}
$$

これは，Proposition4.1 の証明中に現れる時間局所評価式のバリエーションであるが，右辺に $N^{-1/2}$ という負冪の項が現れる点が特徴である．(16) の右辺は，Poppositon4.1 の結果より，$CN^{-1/2}\|Iu_0\|^3$ で評価出来て，N を大きくとることによって，この項を誤差項として扱える事を示す事が目標である．しかし，作用素 “I” の性質 (7) より得られるのは，$\|Iu_0\| \le N^{-s}\|u_0\|$ であり，こちらは N を増加させると増大する項なので，ここから，s に対して条件が付く．また，存在時間を

分割しているため，(16) の $j = T/\delta$ 個の和を，考えなければいけないが，これも $1/\delta$ が $\|Iu_0\|$ に依存しており，増大する項である．実際に証明する時には，Proposition 4.1 の指数 α を正確に求める事が難しいため，scaling を利用して証明すが，ここでは，省略する．いづれにせよ，$N^{-1/2}$ というオーダーが重要であり，実は，このオーダーでは，定理の $s > -3/8$ という値での証明は出来無い．よって次章で説明する high order の近似を行う．

5 high order approximation

保存則が H^{s_1} で成立し，$a \geq s_2$ に対し時間局所適切性が H^a で成立するとき．$s_1 > s \geq s_2$ を満たすある s に対し，H^s での時間大域的評価を得るのが "I-method" の目的であるが，前章で述べた手法だけでは，通常，この s を s_2 の近くまで下げることは出来ない．しかし，KdV 方程式のように完全可積分系の場合，代数的対称性から，より良い近似が得られ，s_2 まで下げられる．この章では，その概略を述べる．初めに，いくつかの記号の定義をする．

DEFINITION 5.1 *A j-multiplier is a function $M : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. A j-multiplier is symmetric if $M(k) = M(\sigma(k))$ for all $\sigma \in S_n$, the group of all permutations on n objects. The symmetrization of a j-multiplier M is the multiplier*

$$[M]_{sym}(k) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} M(\sigma(k)).$$

この定義では，M の領域は $\mathbb{R}^j$ であるが，ここでは超局面 $k_1 + \cdots + k_j = 0$ 上しか取り扱わない．

DEFINITION 5.2 *A j-multiplier generates a j-linear functional or j-form acting on j functions* $u_1, \dots, u_j$,

$$\Lambda_j(M; u_1, \dots, u_j) = \int_{k_1+\cdots+k_j=0} M(k_1, \dots, k_j)\widehat{u_1}(k_1)\dots\widehat{u_j}(k_j)\,(dk_1)_\lambda \dots (dk_{j-1})_\lambda.$$

$u_1 = \cdots = u_j = u$の場合を扱うことが頻繁にあるので，$\Lambda_j(M; u, \dots, u)$を単に$\Lambda_j(M)$と省略して表記する．もし，$M$ が symmetric ならば，$\Lambda_j(M)$ も symmetric j-linear functional になる．

uの満たすべき偏微分方程式が与えられれば，a symmetric j-linear functional の微分はライプニッツルールを用いることにより直接計算出来る．(13) の場合には以下の Proposition が得られる．

PROPOSITION 5.1 *Suppose u satisfies* (13) *and that M is a symmetric j-multiplier. Then*

$$\frac{d}{dt}\Lambda_j(M) = -j\gamma\lambda^{-3}\Lambda_j(M) + \Lambda_j(M\alpha_j) + j\lambda^{-3}\Lambda_j(M; u, \dots, u, f) - i\frac{j}{2}\Lambda_{j+1}(M(k_1, \dots, k_{j-1}, k_j + k_{j+1})\{k_j + k_{j+1}\}), \tag{17}$$

where

$$\alpha_j = i(k_1^3 + \cdots + k_j^3).$$

ただし，(17) の右辺第四項は symmetrized されている．

擬保存量$E^2(t)$ を以下のように定義する．

$$E^2(t) = \|Iu(t)\|_{L^2}^2.$$

m と u は実数値なので，$\sigma_2 = m(k_1)m(k_2)$ と置くと，Plancherel の Lemma より

$$E^2(t) = \Lambda_2(\sigma_2),$$

となる．(17) より，

$$\frac{d}{dt}E^2(t) = -2\gamma\Lambda_2(\sigma_2) + \Lambda_2(\sigma_2\alpha_2) + 2\Lambda_2(\sigma_2; u, f) \\ - i\Lambda_3(\sigma_2(k_1, k_2+k_3)\{k_2+k_3\}).$$

右辺第二項は消えてなくなり．右辺第四項を symmetrize して，

$$\frac{d}{dt}E^2(t) = -2\gamma E^2(t) + 2\Lambda_2(\sigma_2; u, f) \\ + \Lambda_3(-i[\sigma_2(k_1, k_2+k_3)\{k_2+k_3\}]_{sym}).$$

となる．

$$M_3 = -i[\sigma_2(k_1, k_2+k_3)\{k_2+k_3\}]_{sym}. \tag{18}$$

と置き，以下の様に新しい擬保存量を定義する．

$$E^3(t) = E^2(t) + \Lambda_3(\sigma_3),$$

ここに出てくる symmetric 3-multiplier σ_3 は，すぐ後に上手くキャンセル出来るように選ぶ．(17) より，

$$\frac{d}{dt}E^3(t) = -2\gamma E^2(t) + \Lambda_3(M_3) + 2\Lambda_2(\sigma_2; u, f) \\ - 3\gamma\Lambda_3(\sigma_3) + \Lambda_3(\sigma_3\alpha_3) + 3\Lambda_3(\sigma_3; u, u, f) \\ + \Lambda_4(-\frac{3}{2}i[\sigma_3(k_1, k_2, k_3+k_4)\{k_3+k_4\}]_{sym}).$$

ここで，

$$\sigma_3 = \frac{M_3}{-\alpha_3 + 3\gamma}. \tag{19}$$

とすると，

$$\frac{d}{dt}E^3(t) = -2\gamma E^3(t) + 2\Lambda_2(\sigma_2; u, f) \\ + 3\Lambda_3(\sigma_3; u, u, f) + \Lambda_4(M_4), \tag{20}$$

となる．ただし，$M_4 = -\frac{3}{2}i[\sigma_3(k_1, k_2, k_3+k_4)\{k_3+k_4\}]_{sym}$ である．ここで，(20) の右辺第二項，第三項は第四章で行ったのと同様に，*Schwartz* の不等式を用いて評価できる．第四項に対しては以下の評価式が成立する．

$$\left| \int_0^\delta \Lambda_4(M_4; u_1, u_2, u_3, u_4)\, dt \right| \le CN^{-1} \prod_{j=1}^{4} \|Iu_j\|_{Y^0}. \tag{21}$$

ここで，(21) の右辺に現れる N^{-1} というオーダーは前章の (16) の $N^{-1/2}$ より良くなっている点が重要である．これにより，$s > -3/8$ という条件で定理を証明する事が出来る．

6 open problems

"I-method" による通常の periodic KdV の時間大域適切性は $s \ge -1/2$ という条件で示されている．これに対してこのアトラクター存在定理は $s > -3/8$ でしか得られていない．これは，(19) の σ_3 の計算において，$\gamma \neq 0$ の場合には上手く約分できない項が現れ，計算が複雑になるためであった．しかし，大阪大学の久保英夫氏の助言による，この γ に関係する項を非斉次項として扱うというアイデアを用いれば，Theorem2.1 及び Corollary2.1 の条件を $s \ge -1/2$ に改善出来ると思われる．

ここでは，初期値と外力項に対して，$\widehat{u_0}(0) = \widehat{f}(0) = 0$ という条件を仮定した．これに対して Bourgain の，[2] における証明では $\widehat{u_0}(0) = c \neq 0$ の場合には $\widehat{u}(0)$ が保存される事を利用して，$\widehat{v} = \widehat{u} - c = 0$ と置き換え，この v が満たすべき方程式を考えることによって，$\widehat{u_0}(0) = 0$ という条件をはずしている．ダンピングと外力項がある場合に対しても，この手法を応用すれば，$\widehat{u_0}(0) = \widehat{f}(0) = 0$ という条件をはずす事

が出来ると思われるが，この場合には $\widehat{u}(0)$ は保存されず，$c = c(t)$ と t の関数として表せるため，計算がより複雑になる．

興味深い未解決問題としては，外力項 f が負冪のソボレフ空間の場合にアトラクターが存在するか？というものがある．実は，時間大域適切性のみならば，今回用いた手法で，$f \in \dot{H}^a$ ただし $0 > a \geq s$ という条件で示す事が出来る．しかし，物理的には $f = \delta'$（ディラックのデルタ関数の微分）の場合が重要であり，そのためには，a の値を $-3/2$ まで下げる必要がある．

また，別の問題としては，f を時間に依存する関数（ただし周期関数とする）とした場合が興味深い．連続性程度の滑らかさが有れば今回の証明を適用できると思われるが，ホワイトノイズのような外力項を扱うためには，より滑らかさの低い場合を扱う必要がある．

参考文献

[1] T.R. Akylas, *On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution*, J. Fluid Mech. **141** (1984), 455–466.

[2] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 3, 209–262.

[3] J. Bourgain, *Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 5, 253–283.

[4] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{T}$, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 705–749.

[5] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Multi-linear estimates for periodic KdV equations, and applications*, to appear in J. Funct. Anal.

[6] J.M. Ghidaglia, *Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite-dimensional dynamical system in the long time*, J. Differential Equations **74** (1988), no. 2, 369–390.

[7] J.M. Ghidaglia, *A note on the strong convergence towards attractors of damped forced KdV equations*, J. Differential Equations **110** (1994), no. 2, 356–359.

[8] O. Goubet, *Asymptotic smoothing effect for weakly damped forced Korteweg-de Vries equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems **6** (2000), no. 3, 625–644.

[9] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 573–603.

[10] E. Ott, R.N. Sudan, *Damping of solitary wave*, Phys. Fluids **13** (1970), 1432–1434.

[11] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer Verlag, Second Edition, 1997.

[12] K. Tsugawa, *Existence of the global attractor for weakly damped, forced KdV equation on Sobolev spaces of negative index*, to appear in Comm. on Pure and Applied Analysis.

[13] I. Moise and R. Rosa *On the regularity of the global attractor of a weakly damped, forced Korteweg-de Vries equation*, Adv. Differential Equations **2** (1997), no. 2, 257–296.

[14] T.Y. Wu, *Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances*, J. Fluid Mech. **184** (1987), 75–99.