数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 1-9

On Hochschild Cohomology Rings of Group Algebras

速水 孝夫　東京理科大学 理学研究科
Takao Hayami　Faculty of Science, Science Univ. of Tokyo

Introduction

可換環上の多元環に対する cohomology 論は Hochschild [8], MacLane [10], Cartan-Eilenberg [2] らによって体系化され，特に近年は体上の有限次元多元環の Hochschild cohomology について，表現論との関わりで様々な研究が行なわれている．R を可換環，Λ を R 上有限生成で射影的な R 上の多元環，M を両側 Λ-加群としたとき，各次元 $n\geq 0$ に対する Hochschild cohomology $H^n(\Lambda, M)(=\mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M))$ が定義される．さらに M が R 上の多元環 Γ であるとき，$H^*(\Lambda,\Gamma):=\bigoplus_{n\geq 0}H^n(\Lambda,\Gamma)$ に cup 積によって次数付き環としての構造を導入することができ，これを一般に Λ の Hochschild cohomology 環とよぶ．しかしながら，個々の多元環に対して Hochschild cohomology 環の構造を決定することは一般にかなり困難である．

G を有限群とする．群環 RG の Hochschild cohomology 環は興味深い対象の一つであり，特に $\Lambda=\Gamma=RG$ としたときの Hochschild cohomology 環 $H^*(RG,RG)$ を $HH^*(RG)$ とかく．以下，群環 RG の Hochschild cohomology 環についてこれまで知られていることをいくつか述べる．G がアーベル群の場合，Holm [9] 及び Cibils-Solotar [4] によって環同型 $HH^*(RG)\simeq RG\otimes_R H^*(G,R)$ が示された．しかし，G がアーベル群でないときはこのような明確な記述を得ることは難しいと思われる．また，環同型 $HH^*(RG)\simeq H^*(G,{}_\psi RG)(=\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{Ext}^n_{RG}(R,{}_\psi RG))$ が存在することから，これを通して有限群の cohomology に帰着することができる．ここで，${}_\psi RG$ は共役によって RG を G-加群とみなしたものである．実際，巡回群および一般四元数群については，周期がそれぞれ 2, 4 の resolution が存在することが知られており，これらを用いればその cohomology を計算することが原理的には可能である．この有限群の cohomology において加群の生成元の cup 積を計算し，環構造を決定したものとしては位数 $4t$ の一般四元数群 Q_t の整係数群環 $\mathbb{Z}Q_t$ の Hochschild cohomology 環 $HH^*(\mathbb{Z}Q_t)$ がある ([5])．また，加群としての同型 $HH^*(RG)\simeq\bigoplus_j H^*(G_j,R)$ は以前から知られていたが ([1, Theorem 2.11.2])，Siegel-Witherspoon はこの加法群としての同型が環同型になるように，右辺に特別な積が入れられることを示した ([13])．ここで，G_j は G の共役類の代表元の centralizer を表す．同時に彼らはこの特別な積を用いて，$\mathbb{F}_3S_3, \mathbb{F}_2A_4$, $\mathbb{F}_2D_{2^n}$ の Hochschild cohomology 環の構造を決定している．

今回は Siegel-Witherspoon によって証明された環同型 (Product Formula) 及びこれを用いた計算例について紹介する．

1.　Preliminaries

Hochschild cohomology

R を可換環，Λ を R 上有限生成で射影的な R 上の多元環とし，M を左 Λ^e-加群 (即ち両側

Λ-加群) とする．このとき Λ の Hochschild cohomology 環が定義される:

$$H^n(\Lambda, M) := \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M).$$

さらに N を両側 Λ-加群とするとき，Hochschild cohomology には cup 積が定義される:

$$\smile : H^p(\Lambda, M) \otimes_R H^q(\Lambda, N) \longrightarrow H^{p+q}(\Lambda, M \otimes_\Lambda N).$$

この写像による $\alpha \otimes \beta$ の像を $\alpha \smile \beta$ で表すと，これは α 及び β に関して双線形写像になっている．さらに，L を両側 Λ-加群としたとき，associativity を満たす: $\alpha \in H^p(\Lambda, M)$, $\beta \in H^q(\Lambda, N), \gamma \in H^r(\Lambda, L)$ に対し $(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma)$. Γ を R 上の多元環とし，Λ から Γ への R-準同型が存在するものとする．このとき，Γ を両側 Λ-加群とみなし，$H^*(\Lambda, \Gamma) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(\Lambda, \Gamma)$ に cup 積によって次数付き環としての構造を導入することができ，これを一般に Λ の Hochschild cohomology 環とよぶ．特に，$\Gamma = \Lambda$ としたときの Hochschild cohomology 環を $HH^*(\Lambda)$ とかく．$HH^*(\Lambda)$ は anti-commutative，つまり $\alpha \in HH^p(\Lambda), \beta \in HH^q(\Lambda)$ に対し $\alpha\beta = (-1)^{pq}\beta\alpha$ が成立する．

Group cohomology

G を有限群，R を可換環，A を G-加群とする．このとき，G の A を係数加群とする group cohomology が定義される: $H^n(G, A) := \mathrm{Ext}^n_{RG}(R, A)$. また，group cohomology にも cup 積が定義される:

$$\smile : H^p(G, A) \otimes H^q(G, B) \longrightarrow H^{p+q}(G, A \otimes B).$$

この写像による $\alpha \otimes \beta$ の像を $\alpha \smile \beta$ で表すと，これは α 及び β に関して双線形写像になっている．さらに，associativity も成立する．G-加群 A が環であり，さらに条件 $\sigma \cdot (ab) = (\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) \quad (\sigma \in G, a, b \in A)$ を満たすとき，cup 積によって，$H^*(G, A) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(G, A)$ に次数付き環としての構造を導入することができ，これを G の cohomology 環とよぶ．次に，conjugation, restriction, corestriction について述べる．H を G の部分群，$g \in G$ とする．このとき，$\phi : gHg^{-1} \to H; h' \mapsto g^{-1}h'g$ 及び $f : A \to A; a \mapsto ga$ から誘導される cohomology の写像

$$g^* : H^n(H, A) \longrightarrow H^n(gHg^{-1}, A)$$

を conjugation とよぶ．また，埋め込み写像 $\iota : H \hookrightarrow G$ 及び $\mathrm{Id} : A \to A$ から誘導される cohomology の写像

$$\mathrm{res}^G_H : H^n(G, A) \longrightarrow H^n(H, A)$$

を restriction とよぶ．さらに，(Z, d) を RG-projective resolution，G の H による左剰余類分解を $G = \bigcup_{i=1}^m \sigma_i H$ とする．このとき，

$$S_{H \to G} : \mathrm{Hom}_{RH}(Z_n, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(Z_n, A)$$
$$S_{H \to G}(f)(x) = \sum_{i=1}^m \sigma_i f(\sigma_i^{-1} x) \qquad (x \in Z_n)$$

から引き起こされる cohomology の写像

$$\mathrm{cor}_H^G : H^n(H, A) \longrightarrow H^n(G, A)$$

を corestriction とよぶ.

群環の Hochschild cohomology

特に，群環 RG の Hochschild cohomology は group cohomology との間に密接な関係がある．M, N を両側 RG-加群とし，これを共役によって G-加群とみなしそれぞれ $_\psi M$, $_\psi N$ と記す．このとき，加法群としての同型 $H^n(RG, M) \simeq H^n(G, {}_\psi M)$ が存在し，これは cup 積を保存する．つまり，次の図式は可換となる:

$$\begin{array}{ccc} H^p(RG, M) \otimes H^q(RG, N) & \xrightarrow{\smile} & H^{p+q}(RG, M \otimes_{RG} N) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ H^p(G, {}_\psi M) \otimes H^q(G, {}_\psi N) & \xrightarrow[\smile_\mu]{} & H^{p+q}(G, {}_\psi(M \otimes_{RG} N)). \end{array}$$

ただし，$\smile_\mu$ は RG-準同型 $\mu : M \otimes N \to M \otimes_{RG} N; a \otimes b \mapsto a \otimes_{RG} b$ から引き起こされる写像と通常の (group cohomology における) cup 積との合成写像を表す．したがって，特に環同型 $HH^*(RG) \simeq H^*(G, {}_\psi RG)$ が成り立つ ([13, Proposition 3.2], [12, Section 1], [11] などを参照).

2. Product Formula

§2.1 では Siegel-Witherspoon によって証明された環同型 (Product Formula) について少し一般の場合にこれを紹介し，§2.2 ではこの Product Formula を用いた計算例を述べる．なお，Product Formula は Cibils [3] 及び Cibils-Solotar [4] らによって予想されていたものであり，1999 年に Siegel-Witherspoon [13] によって証明されたものである．

2.1. Product Formula

Additive Decomposition

まず，Product Formula を述べるための準備として，加群レベルでの同型写像を具体的に記述する．R を可換環，G, H を有限群とし H は G に自己同型として作用しているものとする．そして $g \in G$ を固定し，次の $R(\mathrm{Stab}_H(g))$-準同型

$$\theta_g : R \longrightarrow RG;\ \lambda \longmapsto \lambda g,$$
$$\pi_g : RG \longrightarrow R;\ \sum_{a \in G} \lambda_a a \longmapsto \lambda_g$$

を考える．$W \leq \mathrm{Stab}_H(g)$ とするとき，これらの写像は cohomology の写像

$$\theta_g^* : H^n(W, R) \longrightarrow H^n(W, RG),$$
$$\pi_g^* : H^n(W, RG) \longrightarrow H^n(W, R)$$

を誘導する．そして H-軌道の代表元を $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_r (\in G)$，$H_i = \mathrm{Stab}_H(g_i)$ とおき，

$$\gamma_i : H^n(H_i, R) \longrightarrow H^n(H, RG); \alpha \longmapsto \mathrm{cor}_{H_i}^H \theta_{g_i}^*(\alpha)$$

と定める．このとき，次の加法群としての同型 (Additive Decomposition) を得る:

$$\Phi : H^n(H, RG) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i H^n(H_i, R); \zeta \longmapsto \left(\pi_{g_i}^* \mathrm{res}_{H_i}^H(\zeta)\right)_i$$

なお，逆写像は $\Phi^{-1}(\alpha) = \gamma_i(\alpha) \quad (\alpha \in H^n(H_i, R))$ によって与えられる．(詳しくは [13, §4] 参照)

特に，G が G 自身に共役で作用している場合を考えると，加法群としての同型

$$HH^n(RG) \simeq \bigoplus_j H^n(G_j, R) \qquad (G_j \text{ は } G \text{ の各共役類の代表元の centralizers})$$

を得る．これを用いれば，$HH^n(RG)$ の加群の構造を求めることができる．

Product Formula

先程と同様に R を可換環，G, H を有限群とし H は G に自己同型として作用しているものとする．また，H-軌道の代表元を $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_r (\in G)$ とし，$H_i = \mathrm{Stab}_H(g_i)$ とおく．そして，H の元 a の $g \in G$ への作用を ${}^a g$，H の部分群 K の共役部分群を ${}^a K = aKa^{-1} \quad (a \in H)$ と記す．D を両側分解 $H_i \backslash H / H_j$ の代表元全体の集合とすれば，各 $a \in D$ に対して，ある $b \in H$ が存在し，$g_k = {}^b g_i {}^{ba} g_j$ を満たす $k = k(a)$ が一意的に定まる．このとき，Siegel-Witherspoon により，次の等式が証明された (詳しくは [13, §5] 参照):

定理 (Product Formula)

$\alpha \in H^*(H_i, R)$，$\beta \in H^*(H_j, R)$ とするとき，$H^*(H, RG)$ において

$$\gamma_i(\alpha) \smile \gamma_j(\beta) = \sum_{a \in D} \gamma_k \left(\mathrm{cor}_W^{H_k} \left(\mathrm{res}_W^{{}^b H_i} b^* \alpha \smile \mathrm{res}_W^{{}^{ba} H_j} (ba)^* \beta \right) \right)$$

が成立する．ただし，$k = k(a), b = b(a)$ は $g_k = {}^b g_i {}^{ba} g_j$ を満たすものとし，$W = {}^{ba} H_j \cap {}^b H_i$ とする．

特に，G が G 自身に共役で作用している場合を考えると，加法群としての同型

$$HH^*(RG) \simeq \bigoplus_j H^*(G_j, R) \quad (G_j \text{ は } G \text{ の各共役類の代表元の centralizers})$$

が環同型になるように，右辺に特別な積が入れられることが示された．

また，G がアーベル群のときは $G_m = G \ (\forall m)$ であり，

$$\gamma_i(\alpha) \smile \gamma_j(\beta) = \gamma_k(\alpha \smile \beta)$$

が成立．ただし，$\alpha \in H^*(G_i, R)$，$\beta \in H^*(G_j, R), g_k = g_i g_j$ である．これにより，Holm [9] 及び Cibils-Solotar [4] らによって証明された環同型を確認することができる．

2.2. Product Formulaを用いた計算例

以下，Product Formulaを用いた計算例を述べる．位数8の四元数群を

$$Q_2 := \langle x, y | x^4 = 1, x^2 = y^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

とする．ここでは位数8の四元数群 Q_2 の整係数群環 $\mathbb{Z}Q_2$ の Hochschild cohomology 環 $HH^*(\mathbb{Z}Q_2)(\simeq H^*(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2))$ の構造を Product Formula を用いて決定することを目標にする．なお Introduction でも述べたように，位数 $4t$ の一般四元数群 Q_t の整係数群環 $\mathbb{Z}Q_t$ の Hochschild cohomology 環については，以前周期4の resolution を用いて計算したものであるが ([5])，これを今回は "位数8の場合に Product Formula を用いて積の計算" を行う．

まず，Q_2 の共役類の代表元として，

$$g_1 = 1,\ g_2 = x^2,\ g_3 = x,\ g_4 = y,\ g_5 = xy$$

をとり，対応する共役類の代表元の中心化群をそれぞれ

$$G_1 = Q_2,\ G_2 = Q_2,\ G_3 = \langle x \rangle,\ G_4 = \langle y \rangle,\ G_5 = \langle xy \rangle$$

とおく．

四元数群及び巡回群の cohomology 環

四元数群の周期4の resolution を用いて $H^n(Q_2, \mathbb{Z})$ を計算すると

$$H^n(Q_2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ \mathbb{Z}/(8) & n \equiv 0\ (4),\ n \neq 0, \\ 0 & n \equiv 1\ (2), \\ \mathbb{Z}(1,0)/2 \oplus \mathbb{Z}(0,1)/2 & n \equiv 2\ (4). \end{cases}$$

となる．そして，生成元を $A := (1,0), B := (0,1) \in H^2(Q_2, \mathbb{Z})$, $C := 1 \in H^4(Q_2, \mathbb{Z})$ とおき，周期4の resolution 上の diagonal approximation を用いて cup 積を計算すると次が得られる ([6, §4] 参照):

$$H^*(Q_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[A, B, C]/(2A, 2B, 8C, A^2, B^2, AB - 4C).$$

次に，H を位数 $m(\geq 2)$ の巡回群とする．巡回群の周期2の resolution を用いて $H^n(H, \mathbb{Z})$ を計算すると

$$H^n(H, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ \mathbb{Z}/(m) & n \equiv 0\ (2),\ n \neq 0, \\ 0 & n \equiv 1\ (2). \end{cases}$$

となる．そして，生成元を $D := 1 \in H^2(H, \mathbb{Z})$ とおき cup 積を計算すると

$$H^*(H, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[D]/(mD)$$

を得る ([2, Chapter XII, §7] 参照).

Hochschild cohomology の加群の構造

Additive decomposition を用いると Hochschild cohomology の加群の構造が得られる:

$$HH^n(\mathbb{Z}Q_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^5 & \text{for } n=0, \\ (\mathbb{Z}/8)^2 \oplus (\mathbb{Z}/4)^3 & \text{for } n \equiv 0\ (4),\ n \neq 0, \\ 0 & \text{for } n \equiv 1\ (2), \\ (\mathbb{Z}/2)^4 \oplus (\mathbb{Z}/4)^3 & \text{for } n \equiv 2\ (4). \end{cases}$$

res, cor 等の計算

以下では,

$$\begin{aligned} H^*(G_r,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[A,B,C]/(2A,2B,8C,A^2,B^2,AB-4C) \\ &\qquad\qquad (\deg A = \deg B = 2, \deg C = 4), \\ H^*(G_3,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\lambda]/(4\lambda) \qquad (\deg\lambda = 2), \\ H^*(G_4,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\mu]/(4\mu) \qquad (\deg\mu = 2), \\ H^*(G_5,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\nu]/(4\nu) \qquad (\deg\nu = 2), \\ H^*(\langle x^2\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\sigma]/(2\sigma) \qquad (\deg\sigma = 2) \end{aligned}$$

とおく. ただし, $r=1,2$ とする. Product Formula を用いて積を計算するためには, restriction や corestriction などの計算が必要になる. これらの計算は, 四元数群及び巡回群の周期的な resolution と standard resolution の間の chain transformation を構成し ([6, §2], [7, §2.1]), standard resolution を用いて表示される cochain level での写像 ([14, §2-5] 参照) を用いて生成元の像を直接計算することにより得られる. 計算結果を表示すると次の通り:

$$\begin{gathered} \mathrm{res}^{Q_2}_{G_3}A = 0,\ \mathrm{res}^{Q_2}_{G_3}B = 2\lambda,\ \mathrm{res}^{Q_2}_{G_3}C = \lambda^2,\ \mathrm{res}^{Q_2}_{G_4}A = \mathrm{res}^{Q_2}_{G_4}B = 2\mu,\ \mathrm{res}^{Q_2}_{G_4}C = \mu^2, \\ \mathrm{res}^{Q_2}_{G_5}A = 2\nu,\ \mathrm{res}^{Q_2}_{G_5}B = 0,\ \mathrm{res}^{Q_2}_{G_5}C = \nu^2,\ \mathrm{res}^{G_3}_{\langle x^2\rangle}\lambda = \mathrm{res}^{G_4}_{\langle x^2\rangle}\mu = \mathrm{res}^{G_5}_{\langle x^2\rangle}\nu = \sigma, \\ \mathrm{cor}^{Q_2}_{G_3}\lambda = A,\ \mathrm{cor}^{Q_2}_{G_3}\lambda^2 = 2C,\ \mathrm{cor}^{Q_2}_{G_4}\mu = A+B,\ \mathrm{cor}^{Q_2}_{G_4}\mu^2 = 2C, \\ \mathrm{cor}^{Q_2}_{G_5}\nu = B,\ \mathrm{cor}^{Q_2}_{G_5}\nu^2 = 2C,\ \mathrm{cor}^{G_3}_{\langle x^2\rangle}\sigma = 2\lambda,\ \mathrm{cor}^{G_4}_{\langle x^2\rangle}\sigma = 2\mu,\ \mathrm{cor}^{G_5}_{\langle x^2\rangle}\sigma = 2\nu, \\ y^*(\lambda) = -\lambda,\ x^*(\mu) = -\mu,\ x^*(\nu) = -\nu. \end{gathered}$$

Product Formula を用いた計算

まず, $H^0(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の生成元の間の cup 積を計算する. これは $\mathbb{Z}Q_2$ の中心における通常の積に一致する. 計算結果を表示すると次の通り (以下では $\smile$ を省略する) :

$$\begin{gathered} \gamma_2(1)^2 = 1,\ \gamma_2(1)\gamma_s(1) = \gamma_s(1),\ \gamma_s(1)^2 = 2(1+\gamma_2(1)), \\ \gamma_3(1)\gamma_4(1) = \gamma_5(1),\ \gamma_3(1)\gamma_5(1) = \gamma_4(1),\ \gamma_4(1)\gamma_5(1) = \gamma_3(1). \end{gathered}$$

ただし, $s=3,4,5$ とし, $\gamma_m : H^n(G_m,\mathbb{Z}) \to H^n(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ とする (§2.1 を参照).

次に, $H^0(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の生成元と $H^2(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の生成元との間の cup 積を計算する. これは Product Formula を用いる. 実際に必要なデータを表にまとめてみた.

Table

i	j	a	${g_i}^a g_j$	b	k	${}^bG_i$	${}^{ba}G_j$	$W = {}^bG_i \cap {}^{ba}G_j$
1	r $(1 \le r \le 5)$	1	g_r	1	r	Q_2	G_r	G_r
2	2	1	1	1	1	Q_2	Q_2	Q_2
2	3	1	x^{-1}	y	3	Q_2	$\langle x\rangle$	$\langle x\rangle$
2	4	1	x^2y	x	4	Q_2	$\langle y\rangle$	$\langle y\rangle$
2	5	1	$x^{-1}y$	x	5	Q_2	$\langle xy\rangle$	$\langle xy\rangle$
3	3	1	x^2	1	2	$\langle x\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle x\rangle$
		y	1	1	1	$\langle x\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle x\rangle$
3	4	1	xy	1	5	$\langle x\rangle$	$\langle y\rangle$	$\langle x^2\rangle$
3	5	1	x^2y	x	4	$\langle x\rangle$	$\langle xy\rangle$	$\langle x^2\rangle$
4	4	1	x^2	1	2	$\langle y\rangle$	$\langle y\rangle$	$\langle y\rangle$
		x	1	1	1	$\langle y\rangle$	$\langle y\rangle$	$\langle y\rangle$
4	5	1	x	1	3	$\langle y\rangle$	$\langle xy\rangle$	$\langle x^2\rangle$
5	5	1	x^2	1	2	$\langle xy\rangle$	$\langle xy\rangle$	$\langle xy\rangle$
		x	1	1	1	$\langle xy\rangle$	$\langle xy\rangle$	$\langle xy\rangle$

そして積の計算は，例えば

$$\gamma_2(1)\gamma_3(\lambda) = \gamma_3\Big(\mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{\langle x\rangle}\big(\mathrm{res}_{\langle x\rangle}^{Q_2} y^*(1)\cdot \mathrm{res}_{\langle x\rangle}^{\langle x\rangle} y^*(\lambda)\big)\Big) = -\gamma_3(\lambda)$$

となる．$H^0(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の生成元と $H^2(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の生成元との間の積は次の通り:

$$\begin{gathered}
\gamma_2(1)\gamma_1(A) = \gamma_2(A),\ \gamma_2(1)\gamma_1(B) = \gamma_2(B),\\
\gamma_2(1)\gamma_3(\lambda) = -\gamma_3(\lambda),\ \gamma_2(1)\gamma_4(\mu) = -\gamma_4(\mu),\ \gamma_2(1)\gamma_5(\nu) = -\gamma_5(\nu),\\
\gamma_3(1)\gamma_1(A) = 0,\ \gamma_3(1)\gamma_1(B) = 2\gamma_3(\lambda),\ \gamma_3(1)\gamma_3(\lambda) = \gamma_1(A)(1+\gamma_2(1)),\\
\gamma_3(1)\gamma_4(\mu) = 2\gamma_5(\nu),\ \gamma_3(1)\gamma_5(\nu) = 2\gamma_4(\mu),\\
\gamma_4(1)\gamma_1(A) = \gamma_4(1)\gamma_1(B) = 2\gamma_4(\lambda),\ \gamma_4(1)\gamma_3(\lambda) = 2\gamma_5(\nu),\\
\gamma_4(1)\gamma_4(\mu) = \gamma_1(A+B)(1+\gamma_2(1)),\ \gamma_4(1)\gamma_5(\nu) = 2\gamma_3(\lambda),\\
\gamma_5(1)\gamma_1(A) = 2\gamma_5(\nu),\ \gamma_5(1)\gamma_1(B) = 0,\ \gamma_5(1)\gamma_3(\lambda) = 2\gamma_4(\mu),\\
\gamma_5(1)\gamma_4(\mu) = 2\gamma_3(\lambda),\ \gamma_4(1)\gamma_5(\nu) = \gamma_1(B)(1+\gamma_2(1)).
\end{gathered}$$

ここで，$\mathrm{res}_{G_3}^{Q_2} C = \lambda^2$, $\mathrm{res}_{G_4}^{Q_2} C = \mu^2$, $\mathrm{res}_{G_5}^{Q_2} C = \nu^2$ と Product Formula より $\gamma_1(C) \in H^4(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ との cup 積は periodicity isomorphism を引き起こす:

$$\gamma_1(C) \smile - : H^r(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2) \xrightarrow{\sim} H^{r+4}(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2).$$

したがって，$H^4(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の生成元は $\gamma_1(C)$ と $\gamma_s(1) \in H^0(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の積によりすべて表示できる:

$$\gamma_2(C) = \gamma_1(C)\gamma_2(1),\ \gamma_3(\lambda^2) = \gamma_1(C)\gamma_3(1),\ \gamma_4(\mu^2) = \gamma_1(C)\gamma_4(1),\ \gamma_5(\nu^2) = \gamma_1(C)\gamma_5(1).$$

最後に，$H^2(Q_2, {}_\psi\mathbb{Z}Q_2)$ の生成元の間の cup 積を Product Formula を用いて計算する．例えば，

$$\gamma_3(\lambda)\gamma_4(\mu) = \gamma_5\Big(\mathrm{cor}_{\langle x^2\rangle}^{\langle xy\rangle}\big(\mathrm{res}_{\langle x^2\rangle}^{\langle x\rangle}(\lambda)\cdot \mathrm{res}_{\langle x^2\rangle}^{\langle y\rangle}(\mu)\big)\Big) = 2\gamma_5(\nu^2)(= 2\gamma_1(C)\gamma_5(1))$$

である．同様な計算により，次が得られる:

$$\begin{gathered}\gamma_1(A)^2 = \gamma_1(A)\gamma_3(\lambda) = \gamma_1(B)^2 = \gamma_1(B)\gamma_5(\nu) = 0,\\ \gamma_1(A)\gamma_1(B) = 4\gamma_1(C),\ \gamma_1(B)\gamma_3(\lambda) = \gamma_4(\mu)\gamma_5(\nu) = 2\gamma_1(C)\gamma_3(1),\\ \gamma_1(A)\gamma_4(\mu) = \gamma_1(B)\gamma_4(\mu) = \gamma_3(\lambda)\gamma_5(\nu) = 2\gamma_1(C)\gamma_4(1),\\ \gamma_1(A)\gamma_5(\nu) = \gamma_3(\lambda)\gamma_4(\mu) = 2\gamma_1(C)\gamma_5(\nu),\\ \gamma_3(\lambda)^2 = \gamma_4(\mu)^2 = \gamma_5(\nu)^2 = 2\gamma_1(C)\big(\gamma_2(1)-1\big).\end{gathered}$$

以上で必要な関係は全て得られた．ここで，

$$\begin{gathered}A_0 = 1,\ B_0 = \gamma_2(1),\ (C_1)_0 = \gamma_3(1),\ D_0 = \gamma_4(1),\ E_0 = \gamma_5(1);\\ (A_\alpha)_2 = \gamma_1(A),\ (A_\beta)_2 = \gamma_1(B),\ (B_\alpha)_2 = \gamma_1(A)\gamma_2(1),\\ (B_\beta)_2 = \gamma_1(B)\gamma_2(1),\ (C_1)_2 = \gamma_3(\lambda),\ D_2 = \gamma_4(\mu),\ E_2 = \gamma_5(\nu);\\ A_4 = \gamma_1(C)\end{gathered}$$

とおくと，これは以前周期 4 の resolution を用いて cup 積を計算したものと同じ結果である ([5, §3.3 Table 3] 参照).

謝辞

今回の研究集会での発表の機会を与えて下さった佐々木洋城先生には大変にお世話になりました．心よりお礼申し上げます．

参考文献

[1] D. J. Benson, *Representations and cohomology II: cohomology of groups and modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1956.

[3] C. Cibils, *Tensor product of Hopf bimodules over a group*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1315–1321.

[4] C. Cibils and A. Solotar, *Hochschild cohomology algebra of abelian groups*, Arch. Math. **68** (1997), 17–21.

[5] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the generalized quaternion group*, SUT J. Math. **38** (2002), 83–126.

[6] T. Hayami and K. Sanada, *Cohomology ring of the generalized quaternion group with coefficients in an order*, Comm. Algebra **30** (2002), 3611–3628.

[7] T. Hayami and K. Sanada, *On cohomology rings of a cyclic group and a ring of integers*, SUT J. Math. **38** (2002), 185–199.

[8] G. Hochschild, *On the Cohomology Groups of an Associative Algebra*, Ann. of Math. **46** (1945), 58–67.

[9] T. Holm, *The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra: the commutative case*, Comm. Algebra **24** (1996), 1957–1969.

[10] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

[11] T. Nozawa and K. Sanada, *Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 545–556.

[12] K. Sanada, *Remarks on cohomology rings of the quaternion group and the quaternion algebra*, SUT J. Math. **31** (1995), 85–92.

[13] S. F. Siegel and S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 131–157.

[14] E. Weiss, *Cohomology of groups*, Academic Press, New York-London, 1969.