数理解析研究所講究録 1360 巻 2004 年 9-23

Nonsplitting subset of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$

薄葉 季路 (Toshimichi Usuba)
名古屋大学大学院情報科学研究科

概要

本稿では Meanas's conjecture, 及び Gitik の定理 [3] の拡張について解説する. なお, 講演では [5] において定式化された club shooting の改良を用いてこれらの結果を得ていたが, その後に更なる改良がえられ, それを用いることによって, consistency strength をおそらく equiconsistency であろうところまで下げることに成功した. 本稿ではその改良型の club shooting についての解説, 及びそれを用いた結果についての解説等を行う.

1 Definition and Notation

特に表記がない限り, この小論を通して κ で inaccessible cardinal, γ で κ 以上の ordinal, λ で κ 以上の cardinal を表す.

μ を cardinal とする. ordinal α に対して, $\mu^{+\alpha}$ で μ から数えて α 番目の cardinal を表す. 例えば, $\mu^{+0}=\mu$, $\mu^{+1}=\mu^{+}$, $\mu^{+2}=\mu^{++}$ 等である.

p.o. $\mathbb{P}$ と ordinal α に対して $\Gamma_\alpha(\mathbb{P})$ で次のような 2 player Game を表すものとする: player I と player II が交互に $\mathbb{P}$ の元を減少列となるようにとっていく. ただし, player I は odd 番目を, player II は even 番目と limit 番目をとる. もしこの列の長さを α まで伸ばせたら player II の勝利, そうでなければ, player I の勝ちとする. $\mathbb{P}$ が κ-strategically closed であるとは, $\Gamma_\kappa(\mathbb{P})$ に関して player II が winning strategy を持つ事と定義する.

$S\subseteq\mathcal{P}_\kappa\gamma$ を stationary set とする. このとき, ほとんど全ての (a.e.) $x\in S$, とは S の non-stationary subset X があり全ての $x\in S\setminus X$, の意味である.

また,$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の stationary, club, saturated ideal, 及び generic ultrapower に関する基本的な事項は [4] の section 25, [6] 等を参照されたし.

2 Menas's conjecture and Gitik's theorem

最初に Menas's conjecture, 及び Gitik の定理について解説する.

Fact 2.1 κ を regular uncountable cardinal, $\lambda \geq \kappa$ とし, $S = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : |x| = |x \cap \kappa|\}$ とする. このとき,

1. S は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set である.
2. κ が successor cardinal ならば S は club を含む.
3. (Baumgartner) 任意の S の stationary subset は λ 個の stationary subset に分割可能である. 従って特に κ が successor cardinal ならば $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set は λ 個の stationary subset に分割可能である.

さて, regular uncountable cardinal κ の任意の stationary set は κ 個の stationary subset に分割可能である, という Solovay の定理の類推, 及び上の Fact を受けて Meanas は次の conjecture を提唱した:

Meanas's conjecture([9]): κ を regular uncountable cardinal, $\lambda \geq \kappa$ を cardinal とする. このとき, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set は $\lambda^{<\kappa}$ 個の stationary subset に分割可能である.

次の Fact より, Menas's conjecture は ZFC と equiconsistent となる:

Fact 2.2 $L \models$ "Menas's conjecture holds."

また, 弱い形での Menas's conjecture の否定も ZFC と equiconsistent となる:

Theorem 2.3 ([1]) G.C.H. を仮定する. このとき, c.c.c. p.o. $\mathbb{P}$ で $\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $\aleph_2^{<\aleph_1} \geq \aleph_4$ かつ $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$ の stationary set で $\aleph_4$ 個に分割不可能なものが存在する" となるものがある.

従って Menas's conjecture は ZFC より独立である.

一方, Gitik は [3] において Menas's conjecture の強い反例を構成した:

Theorem 2.4 ([3]) κ を supercompact, $\lambda > \kappa$ とする. このとき, p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の cardinal を保存する.
2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"κ は inaccessible cardinal",
3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$" $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set で κ^+ 個に分割不可能なものが存在する."

この定理は λ が κ より非常に大きく, 従って $\lambda^{<\kappa}$ が非常に大きい場合でも κ^+ 個にすら分割不可能なものがありうる, ということを示している.

また, Krueger([5]) は, $\lambda = \kappa^+$ の場合は分割不可能となりうる stationary set の中で極大なものが実際に分割不可能となりうる, ということを示した:

Theorem 2.5 ([5]) κ を κ^{+3}-supercompact とする．このとき, p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の cardinal を保存する．

2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$“κ は inaccessible cardinal”,

3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$“ $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\kappa^+ : |x| > |x \cap \kappa|\}$ が κ^+ 個に分割不可能.”

Fact 2.1 より, $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\kappa^+ : |x| > |x \cap \kappa|\}$ が κ^+ 個に分割不可能なものの中で極大なものとなることが容易に分かる．

さて, [3], [5] では $\mathcal{P}_\kappa\kappa^+$ 上の分割不可能な stationary set の存在の consistency を κ^{+3}-supercompact cardinal の存在より導いている．一方, Shioya([11]) はおそらく equiconsistent であろう仮定よりこれを導いている:

Theorem 2.6 ([11]) G.C.H. を仮定し, κ を κ^+-supercompact とする．このとき, p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は全ての cardinal を保存する．

2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$“κ は inaccessible cardinal”,

3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$“ $\mathcal{P}_\kappa\kappa^+$ 上の stationary set で κ^+ 個に分割不可能なものが存在する.”

本稿では [5], [11] の結果の一般化について解説を行う．

3 Club shooting into $\mathcal{P}_\kappa\gamma$

この章では, λ が regular であるとき, 特定の条件を満たす $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して, S の外へ generic な club set を生成する p.o. を定義する．なお, この forcing notion の基本的なアイディアは [10] によるものである．

この章を通して, λ は regular であるとする．

ordinal の集合 x に対して, $\mathrm{cf}(x) = \mathrm{cf}(\mathrm{ot}(x))$ とする．従って x が最大元を持たないときには $\mathrm{cf}(x) = \mathrm{cf}(\sup(x))$ であり, 本論ではこのような x しか取り扱わない．

Definition 3.1 $f \in {}^\kappa\kappa$ に対して

$$T_f(\kappa, \gamma) = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma : x \cap \kappa \in \kappa,\ \mathrm{cf}(x) = f(x \cap \kappa)\}$$

とする．特に, $\alpha < \kappa$ に対して

$$T_\alpha(\kappa, \gamma) = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma : x \cap \kappa \in \kappa,\ \mathrm{cf}(x) = (x \cap \kappa)^{+\alpha}\}$$

とする．従ってこの表記が意味を持つのは α が successor ordinal のときのみである．

B を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の club で任意の $x,\ y\in B$ に対して $x\cap y\in B$ となるものとする. $S\subseteq\mathcal{P}_\kappa\lambda$ として, $\mathcal{P}_\kappa\lambda\setminus(S\cap B)$ へ新しい club を shoot する forcing notion を定式化する.

Definition 3.2 $\mathbb{C}(B,S)$ を次のような p.o. とする; $p\in\mathbb{C}(B,S)\iff$

1. $p: d(p)\times d(p)\to d(p)\cap\kappa$ for some $d(p)\in B$,
2. $|d(p)|<\kappa$,
3. $c(p)\cap S=\emptyset$, where $c(p)=\{x\subseteq d(p): x\in B,\ x$ is closed under p$\}$.

order を $p\le q\iff q\subseteq p$ で定める.

S が特別な条件を満たしているときにはこの p.o. が κ^+-c.c. を持ち, 新しい $<\kappa$-sequence を付け加えないことを示す.

$f\in{}^\kappa\kappa$ で各 $\alpha<\kappa$ に対して $f(\alpha)>\alpha$ となるものを固定する. ここで, $T=\{x\in T_f(\kappa,\lambda): x$ is stationary in $\sup(x)\}$ とする. また, $\vec{A}=\langle A_i: i<\lambda\rangle$ を λ の pairwise disjoint subset の列として, 任意に一つ固定しておく.

ここで, $S\subseteq\mathcal{P}_\kappa\lambda$ が次のような形であるとする;

$$S=\{x\in T:\exists\alpha\in x\,(A_\alpha\cap\sup(x)\text{ is non-stationary in }\sup(x))\}$$

または,

$$S\subseteq\{x\in T:\forall\alpha\in x\,(A_\alpha\cap\sup(x)\text{ is stationary in }\sup(x))\}.$$

以下, S がこのような形をしているとして話を進める. また, $x\in S$ ならば $|x|>|x\cap\kappa|$ であり, $\mathrm{cf}(\sup(x))$ は uncountable となることに注意する.

Lemma 3.3 任意の $x\in\mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して, $\{p\in\mathbb{C}(B,S): x\subseteq d(p)\}$ は dense in $\mathbb{C}(B,S)$ である.

proof $x\in\mathcal{P}_\kappa\lambda$, $p\in\mathbb{C}(B,S)$ とする. $\{x\in\mathcal{P}_\kappa\lambda: x\cap\kappa\in\kappa, \mathrm{cf}(x\cap\kappa)=\omega, |x|=|x\cap\kappa|\}$ は常に $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set であるため, $y\in\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で次を満たすものが取れる;

1. $y\in B$,
2. $y\cap\kappa\in\kappa$ and $\mathrm{cf}(y\cap\kappa)=\omega$,
3. $|y|=|y\cap\kappa|$,
4. $x\cup d(p)\subsetneq y$.

$\{\alpha_n : n < \omega\}$ を $y \cap \kappa$ の cofinal set とする．これらを用いて, function q を次のように定める:

1. $q : y \times y \to y \cap \kappa$,
2. $q \restriction (d(p) \times d(p)) = p$,
3. $\alpha \in y \setminus d(p)$ と $n \in \omega$ に対して, $q(\alpha, n) = \alpha_n$.

上記の条件以外の q の値は任意に定める．このような q が $\mathbb{C}(B, S)$ の元であることを示せば証明は終わる．さて, 自明でない条件は $c(q) \cap S = \emptyset$ であるのでそれを示せばよい．$z \in c(q)$ とする．もし $z \subseteq d(p)$ ならば明らかに $z \in c(p)$ であり $z \notin S$ である．そこで $z \not\subseteq d(p)$ とする．$\alpha \in z \setminus d(p)$ とすると, q の定義より各 $n \in \omega$ に対して $q(\alpha, n) = \alpha_n \in z$ となる．$\{\alpha_n : n \in \omega\}$ は $y \cap \kappa$ の cofinal subset なのでこれは $y \cap \kappa = z \cap \kappa$ を意味する．従って, $|y \cap \kappa| = |z \cap \kappa| \leq |z| \leq |y| = |y \cap \kappa|$ となり, $|z \cap \kappa| = |z|$ となるので $z \notin S$ である．$\square$

Lemma 3.4 $\mathbb{C}(B, S)$ は κ^+-c.c. を持つ．

proof $X = \{p_i : i < \kappa^+\}$ を $\mathbb{C}(B, S)$ の subset とする．X の element で compatible になるものがあることを示せばよい．κ は inaccessible cardinal なので $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, 従って一般性を失うことなく $\{d(p_i) : i < \kappa^+\}$ は root r を持つ Δ-system をなしていると仮定してよい．一方, $|r| < \kappa$ なので, $r \times r$ から κ への function は高々 κ 個しかない．よって, $i, j < \kappa^+$ で $p_i \restriction (r \times r) = p_j \restriction (r \times r)$ となっているものがある．ここで, 補題 3.3 と同様にして $z \in \mathcal{P}_\kappa \lambda$ で

1. $z \in B$,
2. $|z| = z \cap \kappa$,
3. $z \cap \kappa \in \kappa$ and $\mathrm{cf}(z \cap \kappa) = \omega$,
4. $d(p_i) \cup d(p_j) \subsetneq z$.

となるものをとる．$\{\alpha_n : n \in \omega\}$ を $z \cap \kappa$ の cofinal set とする．また, $\delta \in z \setminus (d(p_i) \cup d(p_j))$ を一つ固定する．これらを用いて $q : z \times z \to z \cap \kappa$ を次を満たすように定義する:

1. $q \restriction (d(p_i) \times d(p_i)) = p_i$,
2. $q \restriction (d(p_j) \times d(p_j)) = p_j$,
3. $\alpha \in z \setminus (d(p_i) \cap d(p_j))$ と $n \in \omega$ に対して $q(\alpha, n) = \alpha_n$,

4. $\alpha \in z \setminus d(p_i)$, $\beta \in z \setminus d(p_j)$ に対して $q(\alpha, \beta) = \delta$.

この q が p_i, p_j の common extension となることを示す．そのためには $c(q) \cap S = \emptyset$ を示せばよい．$x \in c(q)$ とする．もし $x \subseteq d(p_i)$ か $x \subseteq d(p_j)$ ならばよい．そうでないとすると，$\alpha \in z \setminus d(p_i)$, $\beta \in z \setminus d(p_j)$ となるものが取れる．このとき，$q(\alpha, \beta) = \delta \in x$，従って $q(\delta, n) = \alpha_n \in x$ となり，$z \cap \kappa = x \cap \kappa$ となる．これより補題3.3と同様にして $x \notin S$ が導かれる．□

Lemma 3.5 $\mathbb{C}(B, S)$ は κ-strategically closed である．

proof まず，λ から λ への partinal function g を $g(\alpha) = \beta \iff \alpha \in A_\beta$ で定める．これを用いて，player II の strategy を次のように定める：$t = \langle p_i : i < \xi \rangle$ を $\mathbb{C}(B, S)$ の decreasing sequence で lower bound を持つものとする．このとき，$p = \bigcup_{i<\xi} p_i$ とすると，p は lower bound であることに注意する．ここで，$z \in \mathcal{P}_\kappa \lambda$ で次を満たすようなものをとる：

1. $z \in B$,

2. z は g に関して閉じている，

3. $|z| = |z \cap \kappa|$,

4. $z \cap \kappa \in \kappa$ and $\mathrm{cf}(z \cap \kappa) = \omega$,

5. $d(p) \cup \lim(d(p)) \cup \{\sup(d(p)\} \subsetneq z$,

$\{\alpha_n^t : n \in \omega\}$ を $z \cap \kappa$ の cofinal subset として，p_t を次のように定める：

1. $p_t : z \times z \to z \cap \kappa$,

2. $p_t \restriction (d(p) \times d(p)) = p$,

3. $\alpha \in z \setminus d(p)$ と $n \in \omega$ に対して $p_t(\alpha, n) = \alpha_n^t$.

player II はこの p_t を次の手として打つ．

このように定めた strategy が実際に winning strategy となることを示す．ξ を limit ordinal として，$t = \langle p_i : i < \xi \rangle$ がこの strategy に沿った play であるとする．t が lower bound を持つことを示せばよい．そのためには，$p = \bigcup_{i<\xi} p_i$ として p が condition となることを示せば十分である．そうでないとして，$x \in c(p) \cap S$ となるものがあるとする．まず，strategy の3番目の条件より，$|d(p)| = |d(p) \cap \kappa|$ となることに注意する．$x \subseteq d(p)$ なので，もし $x \cap \kappa = d(p) \cap \kappa$ ならば $|x| = |x \cap \kappa|$ となり $x \notin S$ である．従って $z \cap \kappa < d(p) \cap \kappa$ となるが，条件5より $d(p) \cap \kappa = \sup\{d(p_i) \cap \kappa : i < \xi\}$ なので，ある $i^* < \xi$ で $x \cap \kappa < d(p_{i^*}) \cap \kappa$ となる．

ここで，$\{\beta_i : i < \xi\}$ を

1. $\beta_{i+1} = \sup(x \cap d(p_i))$,

2. i が limit の時には $\beta_i = \sup\{\beta_j : j < i\}$

とする．明らかに $\beta_i \leq \sup(x)$ かつ $\langle \beta_i : i < \xi \rangle$ は increase continuous sequence である．

Claim 3.5.1 ある $j < \xi$, $i^* \leq j$ で $\beta_j = \sup x$ となる．

proof そうでないと仮定する．このとき，$\{\beta_i : i < \xi\}$ は $\sup(x)$ で unbounded set となる．ここで，$\mu = \mathrm{cf}(\xi)$ とすると，$\{\beta_i : i < \xi\}$ は $\sup(x)$ の unbouded set なので，このとき $\mu = \mathrm{cf}(\xi) = \mathrm{cf}(\sup(x)) = f(x \cap \kappa)$ となる．$f(x \cap \kappa) > \omega$ より，μ は uncountable である．ここで，ξ の club $\langle i_k : k < \mu \rangle$ を次を満たすようにとる:

1. $i_0 \geq i^*$,

2. 任意の $k < \mu$ に対して $i_{k+1} > i_k$ かつ $\beta_{i_{k+1}} > \beta_{i_k}$,

3. k が limit ordinal の時には $i_k = \sup\{i_{k'} : k' < k\}$.

このとき，$\langle \beta_{i_k} : k < \mu \rangle$ もまた $\sup(x)$ の club となる．$x \in S$ より，x は $\sup(x)$ で stationary, よってある limit ordinal $k < \mu$ で $\beta_{i_k} \in x$ となる．また，$\langle \beta_{i_k} : k < \mu \rangle$ は strictly increasing なので，このときには $\beta_{i_k} \notin \bigcup_{j<i_k} d(p_j)$ となる．一方，p_{i_k} は strategy に沿った元なので，このとき $\lim(\bigcup_{j<i_k} d(p_j)) \subseteq d(p_{i_k})$ となる．よって $\beta_{i_k} \in d(p_{i_k}) \setminus \bigcup_{j<i_k} d(p_j)$. また，$p$ は p_{i_k} の拡張となっているので，このとき各 $n \in \omega$ に対して $p(\beta_{i_k}, n) = \alpha_n^{t|i_k} \in x$, 従って $x \cap \kappa \geq d(p_{i_k}) \cap \kappa$. 一方，$x \cap \kappa < d(p_{i^*}) \cap \kappa \leq d(p_{i_k}) \cap \kappa$ となり矛盾が生じる □ of claim

よって，ある ordinal $j < \xi$, $i^* < j$ で $\beta_{j-1} = \sup(x)$ となる．したがって $\sup(x) = \sup(x \cap d(p_j))$, かつ $x \cap \kappa = (d(p_j) \cap x) \cap \kappa$ となるが．ここで，x, $d(p_j) \in B$ より $x \cap d(p_j) \in B$. 従って $x \cap d(p_j) \in T_f(\kappa, \lambda) \cap B$ となる．ここで，j' を j より大きい even ordinal とすると，strategy の条件 5 より $\lim(x \cap d(p_j)) \subseteq \lim(d(p_j)) \subseteq d(p_{j'})$ となる．従って $d(p_{j'})$ は $\sup(x)$ の club を含み，x は $\sup(x)$ で stationary なので，$x \cap d(p_{j'})$ は $\sup(x)$ で stationary となる．よって $x \cap d(p_{j'}) \in T \cap B$ である．また，$x \cap d(p_{j'})$ は明らかに p に関して閉じているので，結局 $x \cap d(p_{j'}) \in c(p) \cap T$ である．ここより，S の取り方に応じて 2 つの cese に分ける．

<u>case1</u> $S = \{x \in T : \exists \alpha \in x\, (A_\alpha \cap \sup(x) \text{ is non-stationary in } \sup(x))\}$ の場合: $\alpha \in x$ で $A_\alpha \cap \sup(x)$ が non-stationary となっているものをとる．このとき，$\alpha \in d(p_{j'})$ と仮定してよい; もし $\alpha \notin d(p_{j'})$ ならば，j' より大きい j'' で $\alpha \in d(p_{j''})$ となるものを取り j' と置き換えばよい．よって，$\alpha \in x \cap d(p_{j'})$ となる．一方，$\sup(x) = \sup(x \cap d(p_{j'}))$ なので，$A_\alpha \cap \sup(x \cap d(p_{j'}))$ は non-stationary. よって

$x \cap d(p_{j'}) \in S \cap B$ となる．しかし，$x \cap d(p_{j'}) \subseteq d(p_{j'})$ なので $x \cap d(p_{j'}) \in c(p_{j'})$．よって $S \cap c(p_{j'}) \neq \emptyset$ となり矛盾である．

<u>**case2**</u> $S \subseteq \{x \in T : \forall \alpha \in x\,(A_\alpha \cap \sup(x) \text{ is stationary in } \sup(x))\}$ の場合：このときには $x \subseteq d(p_{j'})$ となることを示す．strategy の条件より $d(p_{j'})$ は g に関して閉じていることを思い出す．$\alpha \in x$ とする．このとき，$A_\alpha \cap \sup(x)$ は stationary．一方，$d(p'_j)$ は $\sup(x)$ の club を含んでいるので $d(p_{j'}) \cap A_\alpha \neq \emptyset$．$\beta \in d(p_{j'}) \cap A_\alpha$ とすると，g の定義より $\alpha = g(\beta) \in d(p_{j'})$ である．従って $x \subseteq d(p_{j'})$ となるが，このとき $x \in c(p_{j'}) \cap S$ となり矛盾が生じる．

従ってどちらの場合も矛盾が生ずるので，結局 $c(p) \cap S = \emptyset$ となる．よって，$\langle p_i : i < \xi \rangle$ は lower bound を持ち，game を続けることが可能である．□

Lemma 3.6 G を $(V, \mathbb{C}(B,S))$-generic filter とする．このとき，$\bigcup G$ は $\lambda \times \lambda$ から κ への function であり，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \in B, x \text{ is closed under } \bigcup G\} \cap S = \emptyset$ となり，S は non-stationary になる．

proof まず，$\mathbb{C}(B,S)$ は κ-strategically closed なので，$\mathcal{P}_\kappa^V\lambda$ と $\mathcal{P}_\kappa^{V[G]}\lambda$ は同じものであり，また B は依然として $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の club set となることに注意する．$\bigcup G$ が $\lambda \times \lambda$ から κ への function となることは補題3.3より明らか．

さて，$C = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \in B, x \text{ is closed under } \bigcup G\}$ が club となることは明らか．従って $C \cap S = \emptyset$ となることを示せばよい．$x \in C$ とする．このとき，補題3.3より $p \in G$ で $x \subseteq d(p)$ となるものがある．このとき明らかに $x \in c(p)$ であり，$c(p) \cap S = \emptyset$ なので $x \notin S$ である．□

4 Maximal nonsplitting subset of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$

この club shooting を [11] と同様に iterate することにより，次のような定理がえられる．詳細は [12] を参照されたし．

Theorem 4.1 G.C.H. を仮定する．$\kappa < \lambda$ で κ は λ-supercompact，λ は regular cardinlal とする．このとき，p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する：

1. $\mathbb{P}$ は全ての cardinal を保存する．

2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"κ は inaccessible cardinal"，

3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"ある $f \in {}^\kappa\kappa$ で $\{x \in T_f(\kappa, \lambda) : x \text{ is stationary in } \sup(x)\}$ が κ^+ 個の stationary subset に分割不可能．" 特に，$\alpha < \kappa$ で $\lambda = \kappa^{+\alpha+1}$ ならば，$T_{\alpha+1}(\kappa, \lambda)$ が κ^+ 個に分割不可能となる．

定理 4.1 は次の意味で最適なものになっている．

Theorem 4.2 ([3] または [11]) κ を regular uncountable cardinal, $\lambda \geq \kappa$ を cardinal とする．このとき, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set は κ 個の stationary subset に分割可能である．

Lemma 4.3 $\alpha < \kappa$ で $\lambda = \kappa^{+\alpha+1}$ とする．もし $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subset X が κ^+ 個に分割不可能なものならば, $X \setminus T_{\alpha+1}(\kappa, \lambda)$ は non-stationary である．

proof $I = \mathrm{NS}_{\kappa\lambda} \restriction X$ とし, $\mathbb{P}_I$ を I による標準的な generic ultrapower forcing nortion とする．X が κ^+ 個に分割不可能なので, I は κ^+-saturated, 即ち $\mathbb{P}_I$ は κ^+-c.c. であることに注意する．G を $(V, \mathbb{P}_I)$-generic filter とし, $j : V \prec M \approx \mathrm{Ult}(V, G)$ とする．$\mathbb{P}_I$ は κ^+-c.c. なので $\lambda = (\kappa^{+\alpha+1})^{V[G]}$ であるが, I が κ^+-saturated なので ${}^\lambda M \cap V[G] \subseteq M$ が成立する．従って $M \models$ "$\lambda = \kappa^{+\alpha+1}$" となる．即ち, $M \models$ "$\mathrm{cf}(j''\lambda) = \lambda = \kappa^{+\alpha+1} = (j''\lambda \cap j(\kappa))^{+\alpha+1}$"．また, $\alpha < \kappa$ なので $j(T_{\alpha+1}(\kappa, \lambda)) = T_{\alpha+1}(j(\kappa), j(\lambda))$, よって $M \models$ "$j''\lambda \in j(T_{\alpha+1}(\kappa, \lambda))$" である．$G$ は任意の取ったのでこれは $\Vdash_{\mathbb{P}_I}$ "$j''\lambda \in j(T_{\alpha+1}(\kappa, \lambda))$" を意味し, 従ってほとんど全ての $x \in X$ に対して $x \in T_{\alpha+1}(\kappa, \lambda)$ となることを意味する．ゆえに $X \setminus T_{\alpha+1}(\kappa, \lambda)$ は non-stationary である．□

ここで, 定理 4.1 中に出てくる "x は $\sup(x)$ で stationary" という条件は, ある程度は本質的な縛りであることを示しておく．

Lemma 4.4 λ を regular cardinal, I を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の λ-saturated normal ideal とする．このとき, $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \text{ is stationary in } \sup(x)\} \in I^*$ となる．ここで, I^* は I の dual filter である．

proof $p \in \mathbb{P}_I$, $\dot{C}$ を $\mathbb{P}_I$-name で $p \Vdash_{\mathbb{P}_I}$ "$\dot{C}$ is a club in $\sup(j''\lambda)$" なるものとする．inductive に $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$, $\langle \dot{\beta}_n : n < \omega \rangle$ をとっていく．$\dot{\beta}_0$ を $\mathbb{P}_I$-name で $p \Vdash_{\mathbb{P}_I}$ "$\dot{\beta}_0 \in \dot{C}$" なるものとする．$j''\lambda$ は $\sup(j''\lambda)$ で unbounded であり, $\mathbb{P}_I$ は λ-c.c. を満たすので $\alpha_0 < \lambda$ で $p \Vdash_{\mathbb{P}_I}$ "$j(\alpha_0) \geq \dot{\beta}_0$" となるものが取れる．$\dot{\beta}_1$ を $p \Vdash_{\mathbb{P}_I}$ "$j(\alpha_0) < \dot{\beta}_1 \in \dot{C}$" なる name とし, 同様に $\alpha_1 < \lambda$ を $p \Vdash_{\mathbb{P}_I}$ "$j(\alpha_1) \geq \dot{\beta}_1$" となるようにとる．同じようにして α_n, $\dot{\beta}_n$ をとっていく．$\alpha = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$ とすると,

$$p \Vdash_{\mathbb{P}_I} \text{"} j(\alpha) = \sup\{j(\alpha_n) : n < \omega\} = \sup\{\dot{\beta}_n : n < \omega\} \in \dot{C} \text{"}$$

となり, $p \Vdash_{\mathbb{P}_I}$ "$j''\lambda \cap \dot{C} \neq \emptyset$" である．□

また, 定理 4.1 を応用すると次のような結果が得られる．やはり詳細は [12] を参照されたし．

Definition 4.5 $S(\kappa, \lambda) = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \cap \kappa \in \kappa,\ |x| > |x \cap \kappa|\}$.

Theorem 4.6 G.C.H. を仮定する．$\kappa < \lambda$ で κ は λ-supercompact, λ はある $\alpha < \kappa$ で $\lambda = \kappa^{+\alpha+2}$ となっているとする．このとき, p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の cardinal を保存する．
2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"κ は inaccessible cardinal",
3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$" $S(\kappa,\lambda)$ は λ 個の stationary subset に分割不可能."

定理 4.6 は次の意味で最適なものとなっている．

Lemma 4.7 $S(\kappa,\lambda)$ が stationary とする．$\nu < \lambda$ ならば, $S(\kappa,\lambda)$ は ν 個に分割可能である．従って特に, λ が singular cardinal ならば $S(\kappa,\lambda)$ は λ 個に分割可能である．

proof λ が singular の場合, もし $S(\kappa,\lambda)$ が λ 個に分割不可能ならばある $\nu < \lambda$ ですでに ν 個に分割不可能となることは良く知られている．従って lemma の前半のみを示せばよい．まず, 次の claim を示す．

Claim 4.7.1 $\kappa < \nu < \mu$ とする．もし $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\nu : |x| = |x \cap \kappa|^+\}$ が $\mathcal{P}_\kappa\nu$ で stationary ならば, $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\mu : |x| = |x \cap \kappa|^+\}$ も $\mathcal{P}_\kappa\mu$ で stationary である．

proof ν と μ が両方とも cardinal である場合を示せば十分である．さて, θ を十分大きい regular cardinal とする．任意の $R \subseteq H_\theta$ に対して, $M \prec \langle H_\theta, \in, R\rangle$ で $|M| < \kappa$, $|M \cap \mu| = |M \cap \kappa|^+$ となるものが取れることを示せばよい．まず, $M_0 \prec \langle H_\theta, \in, R\rangle$ で $\nu \subseteq M_0$ かつ $|M_0| = \nu$ となるものをとる．$f : \nu \to M_0 \cap \mu$ を bijection とする．$\nu \subseteq M_0$ であり $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\nu : |x| = |x \cap \kappa|^+\}$ が stationary なので, $M \prec \langle M_0, \in, R, f\rangle$ で $|M| < \kappa$, $|M \cap \nu| = |M \cap \kappa|^+$ となるものが取れる．このとき elementarity より $f\restriction(M \cap \nu) : M \cap \nu \to M \cap \mu$ は bijection となり, 従って $|M \cap \mu| = |M \cap \nu| = |M \cap \kappa|^+$ である．□ of claim

lemma の証明に戻る．$\nu < \lambda$ が cardinal で $S(\kappa,\lambda)$ が ν 個に分割不可能として矛盾を出す．$\nu \leq \kappa$ ならば定理 4.2 より明らか．よって $\nu > \kappa$ とする．$I = \mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction S(\kappa,\lambda)$ とし, $\mathbb{P}_I$ を I の標準的な generic ultrapower forcing notion とする．G を $(V, \mathbb{P}_I)$-generic filter とし, $j : V \prec M \approx \mathrm{Ult}(V, G)$ とする．

$S(\kappa,\lambda)$ が ν 個に分割不可能なので $\mathbb{P}_I$ は ν-c.c., 従って $V[G]$ 上で $\lambda > \kappa^+$ となる．よって $M \vDash$"$|j''\lambda| > \kappa^+ = (j''\lambda \cap j(\kappa))^+$". 即ちほとんど全ての $x \in S(\kappa,\lambda)$ に対して $|x| > |x \cap \kappa|^+$ である．

ここで, $f : S(\kappa,\lambda) \to \lambda$ を $f(x) = \alpha \iff \alpha \in x$ かつ $\mathrm{ot}(x \cap \alpha) = |x \cap \kappa|^+$ で定義する．Fodor の lemma より, ある $\delta < \lambda$ で $\{x \in S(\kappa,\lambda) : f(x) = \delta\}$ は stationary となる．従って $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\delta : \mathrm{ot}(x) = |x \cap \kappa|^+\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\delta$ で stationary になる．よって先の claim より $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : |x| = |x \cap \kappa|^+\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set であり, 明らか

に $S(\kappa,\lambda)$ の stationary subset になる．しかしほとんど全ての $x \in S(\kappa,\lambda)$ に対して $|x| > |x \cap \kappa|^+$ となるはずなのでこれは矛盾である．□

また，次のような補題もえられる．これらは $S(\kappa,\lambda)$ が分割不可能という状況に対する制限を与える:

Lemma 4.8 $S(\kappa,\lambda)$ が λ 個に分割不可能とする．このとき，

1. $\kappa \leq \nu < \lambda$ なる ν に対して，$S(\kappa,\nu)$ は $\mathcal{P}_\kappa\nu$ で non-stationary である．
2. ほんど全ての $x \in S(\kappa,\lambda)$ に対して $\mathrm{ot}(x) = |x \cap \kappa|^+$ となる．

この証明のために，まず次の補題を示す．

Lemma 4.9 $\nu = \min\{\mu \geq \kappa : S(\kappa,\mu)$ is stationary in $\mathcal{P}_\kappa\mu\}$ とする．このとき，ほとんど全ての $x \in S(\kappa,\nu)$ に対して $\mathrm{ot}(x) = |x \cap \kappa|^+$ が成立する．

proof claim 4.7.1 の証明の後半と同様に議論する．まず，$x \in S(\kappa,\nu)$ ならば $\mathrm{ot}(x) \geq |x \cap \kappa|^+$ に注意する．さて，補題が成り立たないとすると，$S = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\nu : \mathrm{ot}(x) > |x \cap \kappa|^+\}$ が $\mathcal{P}_\kappa\nu$ で stationary になる．$f : S \to \nu$ を $f(x) = \alpha \iff \alpha \in x$ かつ $\mathrm{ot}(x \cap \alpha) = |x \cap \kappa|^+$ で定義する．Fodor's lemma より，ある $\delta < \nu$ で $\{x \in S : f(x) = \delta\}$ が stationary となり，したがって $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\delta : \mathrm{ot}(x) = |x \cap \kappa|^+\}$ が $\mathcal{P}_\kappa\delta$ で staitonary となる．故に $S(\kappa,\delta)$ も stationary となるが，これは ν の最小性に反する．□

ここで，補題 4.8 の証明をする．

proof 2. は 1. と補題 4.9 より明らか．よって 1. のみ示す．最初に，$S(\kappa,\lambda)$ が λ 個に分割不可能であることから λ は regular である．また，generic ultrapower forcing notion が λ-c.c. となることから generic ultrapower 上で $\mathrm{ot}(j''\lambda) = \lambda = \mathrm{cf}(j''\lambda)$，即ちほとんど全ての $x \in S(\kappa,\lambda)$ に対して $\mathrm{ot}(x) = \mathrm{cf}(x)$ が成立することに注意する．

Claim 4.9.1 $\kappa < \nu < \mu$ で $\mathrm{cf}(\nu) \leq \mathrm{cf}(\mu)$ とする．$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\nu : \mathrm{cf}(x) = |x \cap \kappa|^+\}$ が $\mathcal{P}_\kappa\nu$ で stationary ならば，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\mu : \mathrm{ot}(x) > \mathrm{cf}(x) = |x \cap \kappa|^+\}$ が $\mathcal{P}_\kappa\mu$ で stationary である．

proof claim4.7.1 と同様に議論する．$M_0 \prec \langle H_\theta, \in, R\rangle$ で $\nu \subseteq M_0$, $\mathrm{cf}(M_0 \cap \mu) = \mathrm{cf}(\nu)$ となるものをとる．$\nu \leq \mathrm{cf}(\mu)$ よりこれは可能．$\pi : \mathrm{cf}(\nu) \to M_0 \cap \mu$ を cofinal map とする．さて，仮定より $M \prec \langle M_0, \in, R, \pi\rangle$ で $\mathrm{cf}(M \cap \nu) = |M \cap \kappa|^+$ となるものがとれる．このとき，elementarity より $\pi\restriction(M \cap \mathrm{cf}(\nu)) : M \cap \mathrm{cf}(\nu) \to M \cap \mu$ は cofinal map であり，$\mathrm{cf}(M \cap \mu) = \mathrm{cf}(M \cap \mathrm{cf}(\nu)) = \mathrm{cf}(M \cap \nu) = |M \cap \kappa|^+$ である．また，このとき $\mathrm{ot}(M \cap \mu) > \mathrm{ot}(M \cap \nu)$ かつ $\mathrm{ot}(M \cap \nu) \geq \mathrm{cf}(M \cap \nu) = \mathrm{cf}(M \cap \mu)$ なので $\mathrm{ot}(M \cap \mu) > \mathrm{cf}(M \cap \mu)$ である．□ of claim

補題の証明に戻る．そうでないとすると，ある $\nu < \lambda$ で $S(\kappa, \nu)$ が stationary となる．ν' をそのようなものの中で最小なものとすると，補題 4.9 よりほとんど全ての $x \in S(\kappa, \nu')$ に対して $\mathrm{ot}(x) = |x \cap \kappa|^+$ が成立し，従って $\{x \in \mathcal{P}_\kappa \nu' : \mathrm{ot}(x) = |x| = \mathrm{cf}(x) = |x \cap \kappa|^+\}$ が stationary となる．このとき，先の claim より $\{x \in \mathcal{P}_\kappa \lambda : \mathrm{ot}(x) > \mathrm{cf}(x) = |x \cap \kappa|^+\}$ が $\mathcal{P}_\kappa \lambda$ で stationary となり，明らかにこれは $S(\kappa, \lambda)$ の stationary subset であるので矛盾である．□

定理 4.6 は λ は singular の successor cardinal ではない場合である．λ が singular cardinal の successor の場合は次のような結果が得られる．

Theorem 4.10 G.C.H. を仮定する．$\kappa < \lambda$ で κ は λ-supercompact, λ はある limit ordinal $\alpha < \kappa$ で $\lambda = \kappa^{+\alpha+1}$ となっているとする．このとき，p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の cardinal を保存する．
2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$“κ は inaccessible cardinal ”,
3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$“ $\{x \in S(\kappa, \lambda) : \mathrm{cf}(x \cap \kappa) < x \cap \kappa\}$ は λ 個の stationary subset に分割不可能.”

ここで，“$\mathrm{cf}(x \cap \kappa) < x \cap \kappa$” はある程度本質的な縛りであることを示すが，そのために，次の定理を用いる:

Theorem 4.11 ([2]) μ を singular cardinal とする．p.o. $\mathbb{P}$ が μ^+ の stationary set を全て保存するものならば，$\mathbb{P}$ の generic extension に於いて $\mathrm{cf}(|\mu|) = \mathrm{cf}(\mu)$ が成立する．

Lemma 4.12 $\lambda = \nu^+$ で $\mathrm{cf}(\nu) < \kappa$ とする．もし $S(\kappa, \lambda)$ が λ 個に分割不可能ならば，ほとんど全ての $x \in S(\kappa, \lambda)$ に対して $\mathrm{cf}(x \cap \kappa) = \mathrm{cf}(\nu)$ となる．

proof $I = \mathrm{NS}_{\kappa\lambda} \restriction S(\kappa, \lambda)$ とし，G を $(V, \mathbb{P}_I)$-generic で $j : V \prec M \approx \mathrm{Ult}(V, G)$ とする．補題 4.8 より $V[G]$ と M 上では $\lambda = \kappa^+$ となる．よって $|\nu| = \kappa$. また，$\mathbb{P}_I$ は λ-c.c. なので λ の全ての stationary set は保存される．よって定理 4.11 より $\mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(|\nu|) = \mathrm{cf}(\nu)$ となる．また，κ 未満の cardinal の regularity は全て保存されるので $\mathrm{cf}(\nu) = \mathrm{cf}^V(\nu)$. 即ち，$M \models$“$\mathrm{cf}(j''\lambda \cap j(\kappa)) = \mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}^V(\nu) = j(\mathrm{cf}^V(\nu))$”. G は任意に取っていたので，これはほとんど全ての $x \in S(\kappa, \lambda)$ に対して $\mathrm{cf}(x \cap \kappa) = \mathrm{cf}(\nu)$ が成立することを示している．□

この補題は $S(\kappa, \lambda)$ が λ 個に分割不可能ならば，ほとんど全ての $x \in S(\kappa, \lambda)$ に対して $x \cap \kappa$ が singular となることを示している．一方，定理 4.6 は $\{x \in S(\kappa, \lambda) : x \cap \kappa \text{ is singular }\}$ が λ 個に分割不可能となりうることを示しているに過ぎず，その

model で $\{x \in S(\kappa,\lambda) : x \cap \kappa \text{ is regular }\}$ が non-stationary となっているかは分からない.

5 G.C.H., Nonsplitting set and Saturation

Gitik が [3] で注意しているように, 定理 2.4, 2.5, 2.6, 4.1, 4.6, 4.10 のいずれの場合も, generic extension ではいたるところで G.C.H. は成立していない. 実際, λ が singular cardinal の場合は G.C.H. と分割不可能な stationary set の存在は両立不可能である:

Theorem 5.1 ([8]) κ を regular uncountable cardinal, $\lambda > \kappa$ を strong limit singular cardinal とする. このとき, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set X に対して $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ は precipitous にならない. 特に, $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ は λ^+-saturated にならず, X は $\lambda^{<\kappa}$ 個に分割可能である.

また, κ 未満で G.C.H. が成立している場合も分割不可能な stationary set の存在は両立不可能となる:

Lemma 5.2 κ 未満で G.C.H. が成立しているとする. このとき, $\lambda > \kappa$ が singular cardinal ならば $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set X に対して $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ は λ-saturated にならない. また, もし $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ ならば $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ は λ^+-saturated にならない.

proof λ は singular ゆえ, $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ が λ-saturated ならば, ある $\mu < \lambda$ で μ-saturated になっている. このとき, λ が strong limit となることを示す.

$j : V \prec M \approx \mathrm{Ult}(V, G)$ を generic ultrapower とする. V 上では κ 未満で G.C.H. が成立しているので, M 上では $j(\kappa)$ 未満で G.C.H. が成立している. 一方, $\lambda < j(\kappa)$ なので λ 未満で G.C.H. が成立し, 従って M 上で λ は strong limit cardinal である. ここで ${}^\lambda M \cap V[G] \subseteq M$ ゆえ, λ は $V[G]$ 上でも strong limit singular cardinal となる. 従って λ は V 上でも strong limit singular cardinal である. しかしこれは定理 5.1 に反する.

次に, $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ の場合を考えるが, そのために次の定理を使う:

Theorem 5.3 ([7]) κ を regular uncountable cardinal, $\lambda > \kappa$ で $\kappa^{<\kappa} < \lambda^{<\kappa} = 2^\lambda$ とする. このとき, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set は $\lambda^{<\kappa}$ 個に分割可能である.

$\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ が λ^+-saturated であることから $2^\lambda = \lambda^+$ となることを示せばよい. λ^+-saturatedness より, λ^+ は $V[G]$ 上でも cardinal である. また, $\lambda^+ < j(\kappa)$ かつ M 上 $j(\kappa)$ 未満で G.C.H. が成立するので, M と $V[G]$ の closure property より $V[G]$ 上でも $2^\lambda = \lambda^+$ である. 従って, V 上でも $2^\lambda = \lambda^+$ が成立する. □

これより特に, 次のような問題が生じてくる:

Open Problem: λ を regular cardinal とする. このとき, G.C.H. と "$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の stationary set X で $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ が $\kappa^+(\lambda$, または $\lambda^+)$ -saturated となるものが存在する" は consistent か?

これに対して, 限定的な結果が得られた:

Theorem 5.4 G.C.H. を仮定する. $\lambda > \kappa$ で λ は regular, κ は λ-supercompact とする. このとき, p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の cardinal を保存する.

2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"κ は inaccessible cardinal ",

3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"ある stationary set X で $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ が λ^+-saturated となる.

4. κ 未満で G.C.H. が成立する.

また, 補題 5.2 がある意味で best possible であることを主張する次の結果が得られた:

Theorem 5.5 G.C.H. を仮定する. $\lambda > \kappa$ で λ は $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$ となる singular cardinal, κ は supercompact とする. このとき, p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の cardinal を保存する.

2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"κ は inaccessible cardinal ",

3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"ある stationary set X で $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ が λ^+-saturated となる.

4. κ 未満で G.C.H. が成立する.

Theorem 5.6 G.C.H. を仮定する. $\lambda > \kappa$ で λ は $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ となる singular cardinal, κ は supercompact とする. このとき, p.o. $\mathbb{P}$ で次のようなものが存在する:

1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の cardinal を保存する.

2. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"κ は inaccessible cardinal ",

3. $\Vdash_{\mathbb{P}}$"ある stationary set X で $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}\restriction X$ が λ^{++}-saturated かつ precipitous となる.

4. κ 未満で G.C.H. が成立する.

参考文献

[1] J. E. Baumgartner, A. D. Taylor, *Saturation properties of ideals in generic extensions.* I, Trans. Amer. Math. Soc., 270 (1982), no. 2.

[2] J. Cummings, *Collapsing successors of singulars*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 9.

[3] M. Gitik, *Nonsplitting subset of* $\mathcal{P}_\kappa(\kappa^+)$, J. Symbolic Logic, 50(1985), no. 4.

[4] A. Kanamori, *The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings*, Springer-Verlag, 1994.

[5] J. Krueger, *Destroying stationary sets*, preprint.

[6] Y. Matsubara, *Menas' conjecture and generic ultrapowers*, Ann. Pure Appl. Logic 36 (1987), no. 3.

[7] Y. Matsubara, *Consistency of Meanas's conjecture*, J. Math. Soc. Japan 42 (1990), no. 2.

[8] Y. Matsubara, S. Shelah, *Nowhere precipitousness of the non-stationary ideal over* $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, J. Math. Log. 2 (2002), no. 1.

[9] T. K. Menas, *On strong compactness and supercompactness*, Ann. Math. Logic 7 (1974/75).

[10] H. Sakai, *Shooting club with strategically closed forcing notion*, circulated notes.

[11] M. Shioya, *A saturated stationary subset of* $\mathcal{P}_\kappa\kappa^{\prime}$, Math. Res. Lett. 10 (2003), no. 4.

[12] T. Usuba, *Maximal nonsplitting subset of* $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, in preparation.