

脳磁界逆問題で生じる連立代数方程式の数値解法

石井政行 Masayuki Ishii (総合研究大学院大学情報学専攻)

Department of Informatics, The Graduate University for Advanced Studies.

奈良高明 Takaaki Nara (東京大学大学院情報学環)

Interfaculty Initiative in Information Studies, Graduate School of Interdisciplinary

Information Studies, The University of Tokyo

速水謙 Ken Hayami (国立情報学研究所)

National Institute of Informatics.

1 はじめに

脳磁場計測法(MagnetoEnthelophalography:MEG[1])とは、脳内の電流双極子から発生する磁場を検出して、電流双極子の位置とモーメントを同定する技術である。ここで電流双極子とは、脳内における神経活動によって生じる、電流をモデル化したものである。MEG はてんかんの医療診断や脳の機能の解析などに使われる。本論文では、頭部表面での磁場およびその空間微分を観測量とする逆問題アルゴリズムを考える。

ここで、頭部を表す領域 Ω を球と仮定すると、 Ω の境界における磁場の径方向成分は電流双極子が一様無限媒体中に存在する場合の磁場の径方向成分に等しい[1]。そこで、 Ω の中心を原点にとり、 Ω の境界上の磁場の観測点を北極点(z 軸上の点)にとり、そこでの磁場の z 成分 B_z に着目する。すると B_z とその空間高階微分と、双極子の位置やモーメントを関係付ける連立代数方程式が得られる。この連立代数方程式を解けば、推定したい双極子の位置やモーメントに関する情報が得られる。

ところで、観測量として磁場の径方向成分とその空間高階微分に加えて、静電位を用いることにより電流双極子をリーマン球面へ射影した位置を解析的に求める方法を奈良らは提案している[2]。しかし、磁場に関する観測量のみから双極子の位置やモーメントを再構成できれば、実用上の利点は大きい。ここでは近似的な初期解を直接的に求め、ニュートン法の反復法によりその解を改良することにより、双極子の位置やモーメントを同定する手法を検討する[3]。

2 連立代数方程式の導出、各パラメタの幾何学的意味

双極子が N 個あると仮定すると、北極点での磁場の z 成分は、ビオ・サバルの法則により

$$B_z = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k \times \nabla \left. \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|} \right|_{z,r=(0,0,1)^T} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k \times \frac{\mathbf{d}_k}{d_k^3} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、第 k 番目の双極子の位置を $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)^T$, モーメントを

$\mathbf{m}_k = (a_k, b_k, c_k)^T$, μ は透磁率, $\mathbf{d}_k = (x_k, y_k, z_k - 1)^T$, $d_k = \|\mathbf{d}_k\|$, とする。

ここで、観測点において

$$\gamma_n = \frac{1}{(2n+1)!} \frac{4\pi}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n B_z \quad (2) \quad \delta_n = \frac{1}{(2n+3)!} \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n B_z \quad (3)$$

の形式の高階微分を考える。すると、次の χ_k, ψ_k, p_k, q_k ($k=1, 2, \dots, N$) に関する連立代数方程式が得られる。

$$\sum_{k=1}^N q_k \chi_k^n - \frac{n}{2n+1} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} = \gamma_n \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^N q_k \chi_k^n \psi_k - \frac{n}{2n+3} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} \psi_k = \delta_n \quad (5)$$

$$(n=0, 1, \dots, 2N-1)$$

ただし

$$\chi_k = \frac{x_k + iy_k}{d_k^2}, \quad \psi_k = \frac{1 - z_k}{d_k^2}, \quad q_k = \frac{a_k y_k - b_k x_k}{d_k^3}$$

$$p_k = \frac{i(a_k + ib_k)}{d_k^3}, \quad d_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + (1 - z_k)^2}$$

$$(k=1, 2, \dots, N)$$

である。

ここで、 χ は x と y にソース位置に関連した量で、 ψ は z に関連した量であり (Fig 1 参照), q, p はモーメントに関連した量である (Fig 2 参照)。詳しくは文献[4]を参照のこと。

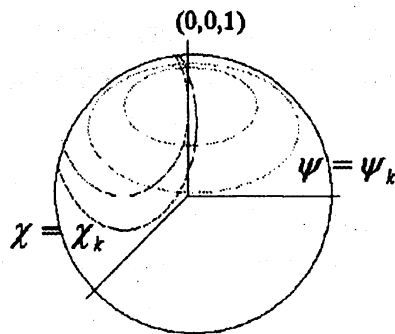
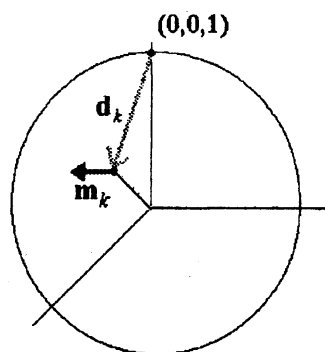


Fig.1 χ, ψ の幾何学的な意味



$$q = \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{d}]_z}{d^3}$$

$$p = \frac{i([m_x] + i[m_y])}{d^3}$$

Fig.2 q, p の幾何学的な意味

そこで、観測値 $\gamma_n, \delta_n (n=0,1,\dots,2N-1)$ より連立代数方程式を解いて、 $\chi_k, \psi_k, p_k, q_k (k=1,\dots,N)$ を求めることにより、双極子の位置やモーメントを同定する問題を考える。

3 ニュートン法のアルゴリズム

双極子が1個($N=1$)の場合は、連立代数方程式(4),(5)は次のようになる。

$$q_1 = \gamma_0 \quad , \quad q_1 \psi_1 = \delta_0$$

$$q_1 \chi_1 - \frac{1}{3} p_1 = \gamma_1, \quad q_1 \chi_1 \psi_1 - \frac{1}{5} p_1 \psi_1 = \delta_1$$

となり、解は

$$q_1 = \gamma_0 \quad , \quad \psi_1 = \frac{\delta_0}{\gamma_0}$$

$$\chi_1 = \frac{5\delta_1}{2\delta_0} + \frac{3\gamma_1}{2\gamma_0} \quad , \quad p_1 = \frac{3}{2} \left(5 \frac{\delta_1 \gamma_0}{\delta_0} + \gamma_1 \right)$$

双極子が2個($N=2$)の場合は、連立代数方程式は

$$q_1 + q_2 = \gamma_0 \quad , \quad q_1 \psi_1 + q_2 \psi_2 = \delta_0$$

$$q_1 \chi_1 + q_2 \chi_2 - \frac{1}{3} (p_1 + p_2) = \gamma_1 \quad , \quad q_1 \chi_1 \psi_1 + q_2 \chi_2 \psi_2 - \frac{1}{3} (p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2) = \delta_1$$

$$q_1 \chi_1^2 + q_2 \chi_2^2 - \frac{2}{5} (p_1 \chi_1 + p_2 \chi_2) = \gamma_2 \quad , \quad q_1 \chi_1^2 \psi_1 + q_2 \chi_2^2 \psi_2 - \frac{2}{5} (p_1 \chi_1 \psi_1 + p_2 \chi_2 \psi_2) = \delta_2$$

$$q_1 \chi_1^3 + q_2 \chi_2^3 - \frac{3}{7} (p_1 \chi_1^2 + p_2 \chi_2^2) = \gamma_3 \quad , \quad q_1 \chi_1^3 \psi_1 + q_2 \chi_2^3 \psi_2 - \frac{3}{7} (p_1 \chi_1^2 \psi_1 + p_2 \chi_2^2 \psi_2) = \delta_3$$

となる。(6)を陽に解くことは困難なので、ニュートン法を用いて数値的に解くことを考える。そこで、ニュートン法のアルゴリズムを説明する。

$$f_n \equiv \sum_{k=1}^N q_k \chi_k^n - \frac{n}{2n+1} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} - \gamma_n \quad (n=0,1,2,3) \quad (7)$$

$$f_{n+2N} \equiv \sum_{k=1}^N q_k \chi_k^n \psi_k - \frac{n}{2n+3} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} \psi_k - \delta_n \quad (n=0,1,2,3) \quad (8)$$

とおくと、解きたい連立方程式は

$$f_i(\chi_1, \chi_2, \psi_1, \psi_2, p_1, p_2, q_1, q_2) = 0 \quad (i=0,1,\dots,7) \quad (9)$$

と表される。そこで、各々のパラメタに適切な初期解を与え、

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{(m+1)} \\ \chi_2^{(m+1)} \\ \vdots \\ q_1^{(m+1)} \\ q_2^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1^{(m)} \\ \chi_2^{(m)} \\ \vdots \\ q_1^{(m)} \\ q_2^{(m)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial \chi_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial q_2} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_7}{\partial \chi_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_7}{\partial q_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_7 \end{pmatrix} \quad (10)$$

という式の反復によって近似解を更新する。各偏導函数は(7),(8)式より手計算で得られる。

ニュートン法が所望の解に収束するためには、初期解を適切に選ぶことが重要である。そこで、(4),(5)式の第1項を無視した連立方程式

$$-\frac{n}{2n+1} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} = \gamma_n, \quad -\frac{n}{2n+3} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} \psi_k = \delta_n \quad (n=0,1,2,3) \quad (11)$$

を考えると、これは

$$\begin{pmatrix} \chi_1 + \chi_2 \\ \chi_1 \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_2 & \Gamma_1 \\ \Gamma_3 & \Gamma_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1 \chi_1 & p_2 \chi_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_n = -\frac{2n+1}{n} \gamma_n, \quad \Delta_n = -\frac{2n+3}{n} \delta_n$$

と陽に解くことが出来るので[4]、これを初期解として用いる。

4 数値実験その1

数値実験として次の場合を考えた。

$$(1) \quad (x_1, y_1, z_1) = (0.2, 0.1, 0.8), \quad (x_2, y_2, z_2) = (0.1, 0.2, 0.8)$$

$$(2) \quad (x_1, y_1, z_1) = (0.1, 0.1, 0.8), \quad (x_2, y_2, z_2) = (-0.1, -0.1, 0.8)$$

$$(3) \quad (x_1, y_1, z_1) = (0.1, 0.3, 0.8), \quad (x_2, y_2, z_2) = (-0.3, -0.1, 0.8)$$

ここで、双極子のモーメントと位置ベクトルをそれぞれ xy 平面に直交射影したベクトルのなす角度を θ とおく。(1)の場合は $\theta = 0^\circ$ 度であり、(2)・(3)の場合は(a) $\theta = 1^\circ$

(b) $\theta = 45^\circ$, (c) $\theta = 90^\circ$ として数値実験を行った, 以下の結果を得た.

以下の結果を得た

- (1) の場合, 初期解は真の値と一致した. これは, この場合は(4),(5)式の第1項が 0 だからである. 結果を下表に示す.

	a_1	b_1	x_1	y_1	z_1
真の値	0.2	0.1	0.2	0.1	0.8
0回反復値	0.2	0.1	0.2	0.1	0.8
	a_2	b_2	x_2	y_2	z_2
真の値	0.1	0.2	0.1	0.2	0.8
0回反復値	0.1	0.2	0.1	0.2	0.8

- (2) の場合, 初期解は 100 回の反復でも, 真の値に収束した. (a)~(c)でも変わらなかった. 下表は(b)の結果を示す.

	a_1	b_1	x_1	y_1	z_1
真の値	0	0.1	0.1	0.1	0.8
初期値	0.0485+0.011i	0.062+0.0141i	0.0445	0.1421	0.792-0.0232i
100 回反復値	0	0.1	0.1	0.1	0.8
	a_2	b_2	x_2	y_2	z_2
真の値	0	-0.1	-0.1	-0.1	0.8
初期値	-0.0485-0.011i	-0.062-0.0141i	-0.0445	-0.1421	0.792+0.0232i
100 回反復値	0	-0.1	-0.1	-0.1	0.8

- (3) の場合, 初期解は 100 回の反復でも, 真の値と異なる値に収束した. (a)~(c)でも変わらなかった. 下表は(b)のとき.

	a_1	b_1	x_1	y_1	z_1
真の値	0	0.1	0.1	0.3	0.8
初期値	0.138-0.015i	3.1E-04-3E-06i	0.1497	0.3296	0.830+0.035i
100 回反復値	0.242-0.01i	-0.135+0.0053i	-0.0093	0.1662	0.7533-0.0170i
	a_2	b_2	x_2	y_2	z_2
真の値	0	-0.1	-0.3	-0.1	0.8
初期値	3.1E-04-3E-06i	0.138-0.015i	0.3296	0.1497	0.830-0.035i
100 回反復値	0.0066+0.0009i	0.538-0.0076i	0.1662	-0.0093	0.7533+0.0170i

5 初期値の改良

前節より、双極子の位置とモーメントによっては真の値に収束しなかった。そこで、ニュートン法の初期解の改良を考える。(4), (5) 式の第一項を無視した近似(11)では、 p_k, ψ_k, χ_k の効果を主に取り入れるのみで q_k の効果を考慮しなかったため、 q_k の効果を取り入れてかつモーメント問題に帰着させることにより、初期値をうまく創生することを考えた。

そこで、式(4), (5)の第2項の分数 $\frac{n}{2n+1}, \frac{n}{2n+3}$ を、 n に依存しない新しい定数パラメ

タ M による分数 $\frac{M}{2M+1}$ で連立代数方程式で置き換えると、次の連立代数方程式を得る。

$$\sum_{k=1}^N q_k \chi_k^n - \frac{M}{2M+1} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} \equiv \sum_{k=1}^N A_k \chi_k^{n-1} = \gamma_n$$

$$\sum_{k=1}^N q_k \chi_k^n \psi_k - \frac{M}{2M+1} \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^{n-1} \psi_k \equiv \sum_{k=1}^N A_k \chi_k^{n-1} \psi_k = \delta_n \quad (n=0,1,\dots,2N-1) \quad (11)$$

を得る。(12)も

$$\begin{pmatrix} \chi_1 + \chi_2 \\ \chi_1 \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_1 \\ \gamma_3 & -\gamma_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 \chi_1 & A_2 \chi_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

のように陽に解くことができ

$$q_k \chi_k - \frac{M}{2M+1} p_k = A_k \quad (k=1,2) \quad (13)$$

より、 q_1, q_2, p_1, p_2 も求まる。

そこで、この解を解きたいもとの連立代数方程式(6)の初期解としてニュートン法を適用する。改良法が真の解に収束するためには、定数パラメタ M を適切に選ぶ必要がある。

6 改良法の数値実験

ここでは、前節で真の値に収束しなかった(3)のケースについて数値実験を行った。代表的な角度として、 $\theta = 1^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ について考えた。

(1) $\theta = 1^\circ$ の場合。 $M = 4, 29$ で所望の解に上表のように収束。下表は $M = 4$ の場合を示す。

	a_1	b_1	x_1	y_1	z_1
真の値	0.0694	0.0719	0.1	0.3	0.8
初期値	0.0141	-0.0050	0.2225	0.1695	0.8603
100回反復値	0.0694	0.0719	0.1	0.3	0.8
	a_2	b_2	x_2	y_2	z_2
真の値	-0.0694	-0.0719	-0.3	-0.1	0.8
初期値	-0.0173	-0.0039	-0.1697	-0.2326	0.8489
100回反復値	-0.0694	-0.0719	-0.3	-0.1	0.8

(2) $\theta = 45^\circ$ の場合。 $M = 4, 5, 12 \sim 30$ で所望の解に上表のように収束。下表は $M = 4$ の場合を示す。

	a_1	b_1	x_1	y_1	z_1
真の値	0	0.1	0.1	0.3	0.8
初期値	-0.0045	-0.0050	0.0522	0.2328	0.9061
100回反復値	0	0.1	0.1	0.3	0.8
	a_2	b_2	x_2	y_2	z_2
真の値	0	-0.1	-0.3	-0.1	0.8
初期値	5.9094	-11.09	-0.3047	-0.1665	0.6065
100回反復値	0	-0.1	-0.3	-0.1	0.8

(3) $\theta = 90^\circ$ の場合。 $M = 14, 22$ で所望の解に下表のように収束した。下表は $M = 14$ の場合である。

	a_1	b_1	x_1	y_1	z_1
真の値	-0.0707	0.0707	0.1	0.3	0.8
初期値	0.3434	0.2473	-0.1753	0.2762	0.7742
100 回反復値	-0.0707	0.0707	0.1	0.3	0.8
	a_2	b_2	x_2	y_2	z_2
真の値	0.0707	-0.0707	-0.3	-0.1	0.8
初期値	0.1108	-0.1433	-0.2762	0.1753	0.7742
100 回反復値	0.0707	-0.0707	-0.3	-0.1	0.8

ところが、 $M = 25$ とした場合には下表のように、真の値とは異なる実数解に下表のように収束した。

	a_1	b_1	x_1	y_1	z_1
真の値	-0.0707	0.0707	0.1	0.3	0.8
初期値	0.3578	0.2560	-0.1753	0.2763	0.7741
100 回反復値	0.5832	0.5832	0.1432	-0.1432	0.5342
	a_2	b_2	x_2	y_2	z_2
真の値	0.0707	-0.0707	-0.3	-0.1	0.8
初期値	0.0107	-0.1440	-0.2763	0.1753	0.7741
100 回反復値	-0.0030	-0.0030	-0.0629	-0.0629	0.9029

以上より、パラメタ M を適切に選べば、改良した初期解から出発したニュートン法は真の値に収束した。しかし、あらかじめ真の値がわかっていない逆問題を解く場合に、いかにして M を適切に選ぶのかの指針は得られなかった。

また、数値解の a_k, b_k, z_k が実数であれば真の値である可能性が高いが、最後の例のように、そうでない場合もあることが判明した。

さらに、各収束値は $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 = 0$ を満たす、しかしこれだけでは真の値(逆問題の解)であることがわからない、すなわち真の解を得るための情報が不足している、今後はここを詳しく吟味する必要があると思われる。

7 結論

本論文では、脳磁界逆問題で生じる連立代数方程式のニュートン法による数値解法を試み、それを達成させるための初期解の生成とその改良を試みた。

今後は電流双極子の位置とモーメントをさらに変化させたときの数値実験を行う。更に、ニュートン法のみならず、また連立代数方程式の変数を消去する方法、より大域的な収束性がよいと思われる、連続変形法(ホモトピー法)などの連立代数方程式の数値解法も、

非線形最小二乗法などの数値解法を試みたい。

謝辞 本研究および本稿に関して有益なコメントを頂いた名古屋大学の三井斌友先生に感謝いたします。

参考文献

- [1] M. Hamalainen et al. : Magnetoencephalography — theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 65, No.2, pp. 413-197, 1993.
- [2] 奈良高明, 安藤繁 : 静電磁場の空間高階微分に基づく電流双極子推定法, 日本応用数理学会2003年度年会予稿集, pp. 48-49.
- [3] 石井政行, 奈良高明, 速水謙 : 脳磁界逆問題で生じる連立代数方程式の数値解法, 日本応用数理学会2003年度年会予稿集, pp. 50-51.
- [4] Takaaki Nara and Shigeru Ando: "A projective method for an inverse source problem of the Poisson equation", *Inverse Problems*, Vol. 19, No. 2, pp. 355-369, 2003.