

時間 2 次特性有限要素法の数値積分に関する強靱性

Robustness with respect to Numerical Integration of a Characteristic  
Finite Element Method of Second Order in Time Increment

茨城大学・理学部 (Faculty of Science, Ibaraki University) 藤間 昌一 (Shoichi Fujima)  
九州大学・大学院数理学研究院 (Department of Mathematical Sciences, Kyushu University) 田端 正久 (Masahisa Tabata)

1. 緒言

特性曲線と有限要素法を結合した特性有限要素法は、流れ問題の数値解法として、アルゴリズムが簡明で、解くべき連立一次方程式が対称、という優れた特長を持っている。時間 1 次精度の特性有限要素法では合成関数の積分項に生じる数値積分誤差に対してスキームが脆弱であることが知られていた。本報では、移流拡散方程式を例に取り、時間 2 次精度スキーム [1] はこの誤差に対して強靱であることを示す。

2. 移流拡散方程式

移流拡散方程式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi - \nu \Delta \phi = f, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \phi = 0, & (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \\ \phi(x, 0) = \phi^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

をみたす関数  $\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  を求めよ、を考える。ここに、 $\Omega$  は  $d$  次元 ( $d = 2$  または  $3$ ) 有界領域 (以降の記述を簡単化するために多面体領域とする),  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  はその境界,  $T$  は正定数,  $\nu (> 0)$  は定数 (拡散係数),

$$\begin{aligned} u : \Omega \times (0, T) &\rightarrow \mathbf{R}^d && : \text{既知関数 (流速)}, \\ f : \Omega \times (0, T) &\rightarrow \mathbf{R} && : \text{既知関数 (外力)}, \\ \phi^0 : \Omega &\rightarrow \mathbf{R} && : \text{既知関数 (初期条件)} \end{aligned}$$

である。

3. 特性曲線有限要素法

$X : (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^d$  を常微分方程式  $dX/dt = u(X, t)$  の解とすれば, (1) の第 1 式は,

$$\frac{d}{dt} \phi(X(t), t) - \nu \Delta \phi = f \quad (2)$$

と書ける。

$\Delta t$  を時間刻みとし,  $N_T \equiv [T/\Delta t]$ ,  $t^n \equiv n\Delta t$  とおく。初期条件  $X(t^{n+1}) = x$  に関する時刻  $t^n$  での常微分方程式の解の近似は, Euler 法, 2 次精度 Runge-Kutta 法により, それぞれ次になる。

$$X_1^n(x) = x - u^n(x)\Delta t, \quad (3)$$

$$X_2^n(x) = x - u^{n+1/2}(x - u^n(x)\Delta t/2)\Delta t. \quad (4)$$

次に空間方向の離散化を行う。

$\Omega$  を  $N_e$  個の単体<sup>1</sup>の集合  $\mathcal{T}_h \equiv \{K_1, \dots, K_{N_e}\}$  に分割し,

$$V_h \equiv \{v_h \in H^1(\Omega); v_h \in P_k(K) (\forall K \in \mathcal{T}_h), \quad v_h = 0 (\forall x \in \Gamma)\},$$

とおく。ここに  $P_k$  は  $k$  次以下の多項式全体である。 $\Pi_h: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$  を  $k$  次ラグランジュ補間作用素とする。

時間 1 次精度特性曲線有限要素スキーム F は,

$$\begin{cases} \left( \frac{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_1^n}{\Delta t}, \psi_h \right) + \nu(\nabla \phi_h^{n+1}, \nabla \psi_h) = (f^{n+1}, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad 0 \leq n \leq N_T - 1 \\ \phi_h^0 = \Pi_h \phi^0 \end{cases} \quad (5)$$

である。このスキームは適当な仮定の下に、要素分割の最大辺長  $h$  と  $\Delta t$  によらず,

$$\|\phi\|_{\ell^\infty(L^2)} \equiv \max\{\|\phi^n\|_{L^2}; \quad 0 \leq n \leq N_T\} \quad (6)$$

の意味で無条件安定で、厳密解に  $O(h^k, \Delta t)$  で収束する。

時間 2 次精度特性曲線有限要素スキーム S は,

$$\begin{cases} \left( \frac{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_2^n}{\Delta t}, \psi_h \right) + \frac{\nu}{2}(\nabla \phi_h^{n+1} + \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \psi_h) + \frac{\nu \Delta t}{2}(J^n \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \psi_h) \\ = \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n \circ X_1^n, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad 0 \leq n \leq N_T - 1 \\ \phi_h^0 = \Pi_h \phi^0 \end{cases} \quad (7)$$

ここで,

$$J_{ij}^n = \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, d$$

である。このスキームも  $\ell^\infty(L^2)$  の意味で無条件安定で精度は  $O(h^k, \Delta t^2)$  である [1]。

各離散時刻で解くべき連立 1 次方程式は、スキーム F で (5) の第 1 式での既知項を右辺に移項すると,

$$\frac{1}{\Delta t}(\phi_h^{n+1}, \psi_h) + \nu(\nabla \phi_h^{n+1}, \nabla \psi_h) = \frac{1}{\Delta t}(\phi_h^n \circ X_1^n, \psi_h) + (f^{n+1}, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad (8)$$

となって、流速  $u$  が右辺ベクトルだけに影響するため、得られる係数行列は時間に依存せず、かつ、対称になる。スキーム S においても同じことが言える。これが特性有限要素法の特長である。

#### 4. 数値積分誤差を考慮した安定性解析

要素  $K$  に対して、 $X_i^n(K)$  は一般に風上にあるいくつかの要素にまたがっている。したがって、 $K$  上で合成関数  $\phi_h^n \circ X_i^n$  の積分を厳密に計算することは困難である。数値積分を

<sup>1</sup> $d = 2$  ならば三角形。

用いることが考えられるが、このときは、従来の安定性の議論をそのまま適用することはできず、混入誤差のためスキームは不安定になり得る。

数値積分誤差を考慮して、内積  $(\phi, \psi)$  を近似する  $(\phi, \psi)_h$  を考える。数値積分誤差を考慮した特性曲線有限要素スキーム

$$\frac{1}{\Delta t} \{(\phi_h^{n+1}, \psi_h) - (\phi_h^n \circ X_2^n, \psi_h)_h\} + \frac{\nu}{2} \{(\nabla \phi_h^{n+1}, \nabla \psi_h) + (\nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \psi_h)_h\} \\ + \frac{\nu \Delta t}{2} (J^n \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \psi_h)_h = \frac{1}{2} \{(f^{n+1}, \psi_h) + (f^n \circ X_1^n, \psi_h)_h\}, \quad \forall \psi_h \in V_h \quad (9)$$

を考える。

**仮定 1.** ある定数  $c_3 > 0$  が存在して、任意の  $\phi \in H^1(\Omega)$ ,  $\psi \in L^2(\Omega)$  に対して、

$$|(\phi, \psi)_h - (\phi, \psi)| \leq c_3 h \|\nabla \phi\|_0 \|\psi\|_0. \quad (10)$$

**仮定 2.** 流速  $u$  が  $u \in C^0(W^{1,\infty})$  とする。ある定数  $c_4 > 0$  が存在して、任意の  $\phi \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in L^2(\Omega)$ , 任意の  $\Delta t > 0$  に対して、

$$|(\phi \circ X_1^n, \psi)_h - (\phi \circ X_1^n, \psi)| \leq c_4 \Delta t \|\phi\|_0 \|\psi\|_0, \quad \forall n. \quad (11)$$

このとき、

**定理 1.** 三角形 1 次要素 ( $k = 1$ ) で、 $\Delta t = O(\sqrt{h})$  のとき、(9) は安定である。すなわち、ある定数  $c > 0$  が存在して、

$$\|\phi_h\|_{L^\infty(L^2)}, \sqrt{\nu \Delta t} \|\nabla \phi_h\|_{L^\infty(L^2)}, \sqrt{\nu} \|\phi_h\|'_{L^2(H^1)} \\ \leq c \left( \|\phi_h^0\|_{L^2} + \sqrt{\nu \Delta t} \|\nabla \phi_h^0\|_{L^2} + \|f\|_{L^2(L^2)} \right). \quad (12)$$

ここに、

$$\|\phi\|'_{L^2(H^1)} \equiv \left\{ \Delta t \sum_{n=0}^{N_T-1} \left\| \frac{\nabla \phi^{n+1} + \nabla \phi^n \circ X_1^n}{2} \right\|^2 \right\}^{1/2}. \quad (13)$$

参考文献 [1] の Theorem 1 でスキーム S の安定性が示されている。仮定 1,2 の下で同様の論法により定理 1 を示す。まず、

$$\langle \mathcal{A}_{hh}^{n+1/2} \phi_h, \psi_h \rangle = \frac{1}{\Delta t} \{(\phi_h^{n+1}, \psi_h) - (\phi_h^n \circ X_2^n, \psi_h)_h\} \\ + \frac{\nu}{2} \{(\nabla \phi_h^{n+1}, \nabla \psi_h) + (\nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \psi_h)_h\} + \frac{\nu \Delta t}{2} (J^n \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \psi_h)_h$$

を定義する。次が成立する。

補題 1.  $\Delta t = O(\sqrt{h})$  ならば、

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}_{hh}^{n+1/2} \phi_h, \phi_h^{n+1} \rangle \\ & \geq D_{\Delta t} \left( \frac{1}{2} \|\phi_h^n\|^2 + \frac{\nu \Delta t}{4} \|\nabla \phi_h^n\|^2 \right) + \frac{1}{2\Delta t} \|\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_2^n\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \phi_h^{n+1} + \nabla \phi_h^n \circ X_1^n\|^2 \\ & \quad - c \{ \|\phi_h^n\|^2 + \nu \Delta t (\|\nabla \phi_h^n\|^2 + \|\nabla \phi_h^{n+1}\|^2) \}, \quad (14) \end{aligned}$$

ここで、 $D_{\Delta t}$  は前進差分作用素:  $D_{\Delta t} \psi^n \equiv (\psi^{n+1} - \psi^n) / \Delta t$ ,  $c$  は  $h$  と  $\Delta t$  に依存しない定数である。

補題 1 の証明: 左辺を本質的部分と数値積分誤差に起因する部分に分離する:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{hh}^{n+1/2} \phi_h, \phi_h^{n+1} \rangle &= \frac{1}{\Delta t} \{ (\phi_h^{n+1}, \phi_h^{n+1}) - (\phi_h^n \circ X_2^n, \phi_h^{n+1})_h \} \\ & \quad + \frac{\nu}{2} \{ (\nabla \phi_h^{n+1}, \nabla \phi_h^{n+1}) + (\nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \phi_h^{n+1})_h \} + \frac{\nu \Delta t}{2} (J^n \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \phi_h^{n+1})_h \\ &= \left( \frac{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_2^n}{\Delta t}, \phi_h^{n+1} \right) + \frac{1}{\Delta t} \{ (\phi_h^n \circ X_2^n, \phi_h^{n+1}) - (\phi_h^n \circ X_2^n, \phi_h^{n+1})_h \} \\ & \quad + \nu \left( \frac{\nabla \phi_h^{n+1} + \nabla \phi_h^n \circ X_1^n}{2}, \phi_h^{n+1} \right) + \frac{\nu}{2} \{ (\nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \phi_h^{n+1})_h - (\nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \phi_h^{n+1}) \} \\ & \quad + \frac{\nu \Delta t}{2} (J^n \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \phi_h^{n+1}) + \frac{\nu \Delta t}{2} \{ (J^n \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \phi_h^{n+1})_h - (J^n \nabla \phi_h^n \circ X_1^n, \nabla \phi_h^{n+1}) \} \\ &= I_1 + I_{1h} + I_2 + I_{2h} + I_3 + I_{3h}. \end{aligned}$$

本質的部分  $I_1, I_2, I_3$  は [1] により、

$$\begin{aligned} I_1 &\geq D_{\Delta t} \left( \frac{1}{2} \|\phi_h^n\|^2 \right) - \frac{c_1}{2} \|\phi_h^n\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} \|\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_2^n\|^2, \\ I_2 &\geq D_{\Delta t} \left( \frac{\nu \Delta t}{4} \|\nabla \phi_h^n\|^2 \right) - \frac{c_1 \nu \Delta t}{4} \|\nabla \phi_h^n\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \phi_h^{n+1} + \nabla \phi_h^n \circ X_1^n\|^2, \\ |I_3| &\leq \frac{c_1 \nu \Delta t}{4} \{ (1 + c_1 \Delta t) \|\nabla \phi_h^n\|^2 + \|\nabla \phi_h^{n+1}\|^2 \}, \end{aligned}$$

である。ここで、 $c_1 = c_1(\|u\|_{C^0(W^{1,\infty})})$  は  $h$  と  $\Delta t$  に依存しない定数である。

数値積分誤差部分  $I_{1h}$  は、仮定 1 により、

$$|I_{1h}| \leq \frac{1}{\Delta t} \cdot c_3 h \|\nabla(\phi_h^n \circ X_2^n)\| \cdot \|\phi_h^{n+1}\| \leq \frac{c_3 h}{2\Delta t} (\|\nabla(\phi_h^n \circ X_2^n)\|^2 + \|\phi_h^{n+1}\|^2)$$

ここで、 $J_2$  を変換  $y = X_2^n(x)$  のヤコビアン行列とすると、

$$\begin{aligned} \|\nabla(\phi \circ X_2^n)\|^2 &= \int_{\Omega} \{ \nabla_x \phi(X_2^n(x)) \}^2 dx = \int_{\Omega} \{ J_2 \nabla_y \phi(y) \}^2 (\det J_2) dy \\ &\leq (1 + c_1 \Delta t)^3 \int_{\Omega} \{ \nabla_y \phi(y) \}^2 dy = (1 + c_1 \Delta t)^3 \|\nabla \phi\|^2, \end{aligned}$$

により、

$$|I_{1h}| \leq \frac{c' h}{\Delta t} (\|\phi_h^n\|^2 + \|\phi_h^{n+1}\|^2) \leq c'' \Delta t (\|\phi_h^n\|^2 + \|\phi_h^{n+1}\|^2)$$

である。数値積分誤差部分  $I_{2h}, I_{3h}$  は、仮定 2 により、

$$\begin{aligned} |I_{2h}| &\leq \frac{\nu}{2} \cdot c_4 \Delta t \|\nabla \phi_h^n\| \cdot \|\nabla \phi_h^{n+1}\| \leq \frac{c_4 \nu \Delta t}{4} (\|\nabla \phi_h^n\|^2 + \|\nabla \phi_h^{n+1}\|^2) \\ |I_{3h}| &\leq \frac{\nu \Delta t}{2} \cdot c_4 \Delta t \|J^n \nabla \phi_h^n\| \cdot \|\nabla \phi_h^{n+1}\| \leq \frac{c_4 \nu \Delta t^2}{4} (\|J^n \nabla \phi_h^n\|^2 + \|\nabla \phi_h^{n+1}\|^2) \\ &\leq \frac{c_4 \nu \Delta t^2}{4} (c_1^2 \|\nabla \phi_h^n\|^2 + \|\nabla \phi_h^{n+1}\|^2) \end{aligned}$$

以上により補題 1 が示された。

**定理 1 の証明:** (9) の解  $\phi_h^n$  は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{(f^{n+1}, \phi_h^{n+1}) + (f^n \circ X_1^n, \phi_h^{n+1})_h\} \\ &= \left( \frac{f^{n+1} + f^n \circ X_1^n}{2}, \phi_h^{n+1} \right) + \{-(f^n \circ X_1^n, \phi_h^{n+1}) + (f^n \circ X_1^n, \phi_h^{n+1})_h\} \\ \text{(第 1 項)} &\leq \frac{1}{2} \|\phi_h^{n+1}\|^2 + \frac{1}{4} \{\|f^{n+1}\|^2 + (1 + c_1 \Delta t) \|f^n\|^2\}, \quad ([1] \text{ による}) \\ \text{(第 2 項)} &\leq \frac{c_4 \Delta t}{2} (\|f^n\|^2 + \|\phi_h^{n+1}\|^2), \quad (\text{仮定 2 による}). \end{aligned}$$

補題 1 と合わせて、

$$\begin{aligned} D_{\Delta t} \left( \frac{1}{2} \|\phi_h^n\|^2 + \frac{\nu \Delta t}{4} \|\nabla \phi_h^n\|^2 \right) &+ \frac{1}{2 \Delta t} \|\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_2^n\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \phi_h^{n+1} + \nabla \phi_h^n \circ X_1^n\|^2 \\ &\leq c (\|\phi_h^{n+1}\|^2 + \nu \Delta t \|\nabla \phi_h^{n+1}\|^2 + \|\phi_h^n\|^2 + \nu \Delta t \|\nabla \phi_h^n\|^2) + c (\|f^{n+1}\|^2 + \|f^n\|^2), \end{aligned}$$

となり、離散 Gronwall 不等式により定理 1 が示される。

## 5. 数値実験

### 5.1 数値積分則

以下では 2 次元 3 角形 1 次要素を用いる場合を考える。  $K$  の各辺の  $m$  等分点を基にした  $m^2$  個の小三角形 (図 1) での線形補間積分則:

$$\int_K f dx \cong \frac{|K|}{3} \{f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)\} \quad (15)$$

を用いる。ここに  $K$  は 1 つの小三角形,  $P_1, P_2, P_3$  はその 3 頂点である。スキーム F, S にこの積分則を用いる計算法を、それぞれ、スキーム  $F_m, S_m$  と呼ぶことにする。

### 5.2 Rotating Gaussian hill 問題

用いるスキームによる安定性・収束性の違いを “rotating Gaussian hill” 問題の数値実験により観察する。厳密解は

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{\sigma}{\sigma + 4\nu t} \exp \left\{ -\frac{(\bar{x}_1(t) - x_{1,c})^2 + (\bar{x}_2(t) - x_{2,c})^2}{\sigma + 4\nu t} \right\}, \quad (16) \\ \bar{x}_1(t) &= x_1 \cos t + x_2 \sin t, \quad \bar{x}_2(t) = -x_1 \sin t + x_2 \cos t, \\ (x_{1,c}, x_{2,c}) &= (0.25, 0), \quad \sigma = 0.01 \end{aligned}$$

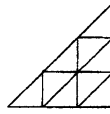


図 1: Subtriangles in the numerical integration of the trapezoidal rule,  $m = 3$

である。流速は  $u = (-x_2, x_1)^T$ , 外力  $f = 0$ , 初期条件は  $\phi^0 = \phi(x, 0)$  である。厳密解の  $\Gamma$  での値はゼロではないが、微小なので (1) の第 2 式をそのまま課す。

離散化は  $\Omega = \{(x_1, x_2) : -1 < x_1, x_2 < 1\}$  の 1 辺を  $N$  ( $N = 96, 128, 192$ ) 分割する規則的三角形分割を用いる。  $h = 2\sqrt{2}/N$  である。

$T = 2\pi$  とし、相対誤差を

$$E \equiv \frac{\|\phi_h - \phi\|_{\ell^\infty(L^2)}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(L^2)}} \quad (17)$$

により測る。また、第  $n$  離散時刻の解が  $\|\phi_h^n\|_{L^\infty} > 100$  の場合には数値解の「発散」と判定する。

この試験問題に時間 1 次精度の特性曲線有限要素スキームを適用する場合、田中ら [2] は、スキーム F, F4, F8, F16, 及び、各三角形要素上で高次精度 (2 次と 5 次) の数値積分を用いるスキームを比較し、スキーム F に厳密な積分を実施することの優位性、及び、スキーム F16 は高次の数値積分を用いるスキームより優れている (スキーム F4, F8 には発散の場合がある) ことを示した。本研究ではこの結果とスキーム S のスキーム F への優位性を念頭に、スキーム S2, S3 の安定性、収束性を調べる。

### 5.3 スキーム S2, S3, F2, F3, F4 の比較

(1)  $\nu = 10^{-3}$  の場合: 精度  $O(h)$  が期待される計算の比較を行なう。すなわち、スキーム  $S_m$  で  $\Delta t = \sqrt{h}$  と選び、スキーム  $F_m$  で  $\Delta t = h$  と選ぶ。数値解の誤差を図 2 に示す。どのスキームでも  $O(h)$  の収束が観察される。数値積分のパラメータ  $m$  による違いは小さい。スキーム  $S_m$  の誤差は  $F_m$  の  $1/4$  以下である。

(2)  $\nu = 5 \times 10^{-4}$  の場合:  $\Delta t$  の選び方は同じである。数値解の誤差を図 2 に示す。 $\nu = 10^{-3}$  のときよりも誤差は増大する。またスキーム  $F_m$  で特に  $m$  の誤差への影響が見られる。

(3)  $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$  の場合:  $\Delta t$  の選び方は同じである。数値解の誤差を表 1 と図 3 に示す。表で 'x' は発散を示す。F2 では  $N = 64, 96, 128$  で発散し、 $N = 192$  でも誤差が大きい。F3 では発散はしないが、 $N = 64, 96$  での誤差が大きい。S2, S3, F4 では安定に計算され、 $O(h)$  の収束が観察される。F4 の誤差は S2 の約 3 倍であるが、S2 から S3 への誤差の減少は約 12% ( $N = 192$ ) である。S2 の  $t = \pi$  での解の立体図を図 4 に示す。また、F2 は発散するが、 $\max |\phi_h| > 2$  となる瞬間の解の立体図を図 4 に示す。

(4)  $\nu = 1.25 \times 10^{-4}$  の場合:  $\Delta t$  の選び方は同じである。数値解の誤差を表 2 と図 3 に示す。F2 と F3 では試みたすべての  $N$  で発散する。

(5) 一律に  $\Delta t = \sqrt{h}$  と選ぶ場合: 時間 1 次精度スキームも  $\Delta t = \sqrt{h}$  と取ると仮定 1, 2 の下で安定になるが、当然ながら、 $F_m$  の精度は  $O(\sqrt{h})$  に低下する。 $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$ ,  $\nu = 1.25 \times 10^{-4}$  の場合の誤差を図 5 に示す。

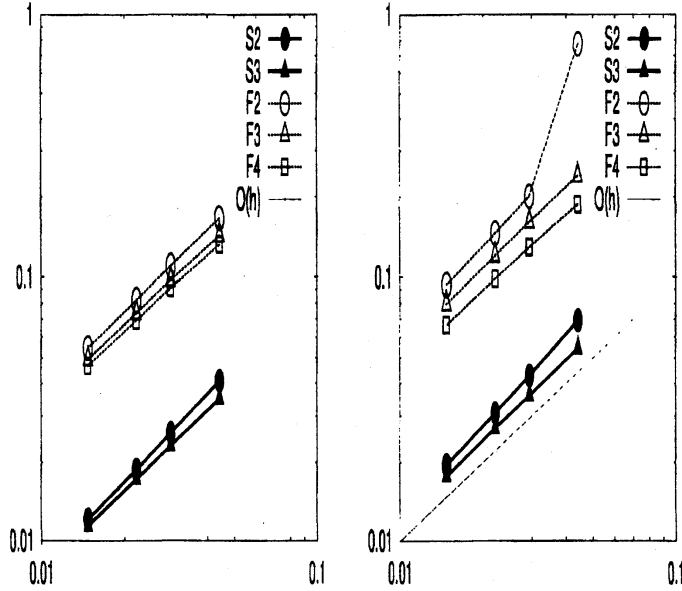


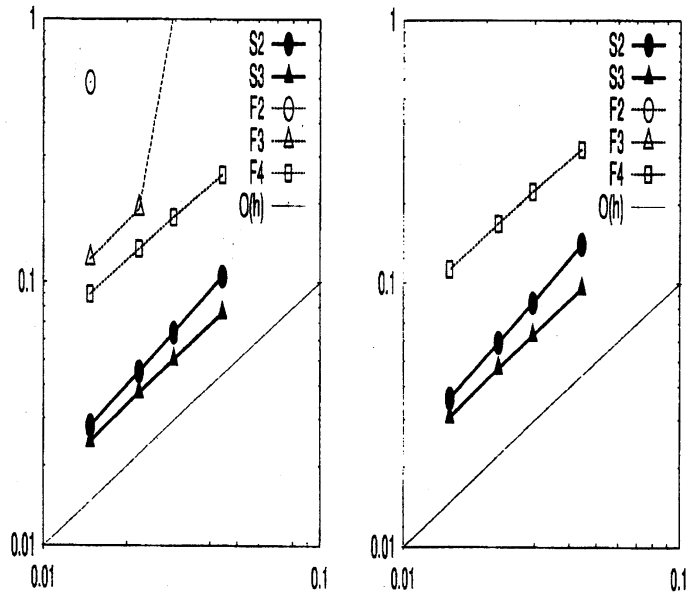
图 2:  $h$  vs.  $E$  ( $\Delta t = \sqrt{h}$  for  $Sm$ ,  $h$  for  $Fm$ )  $\nu = 10^{-3}$  (left),  $5 \times 10^{-4}$  (right)

表 1: Error in the case of  $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$  ( $\Delta t = \sqrt{h}$  for  $Sm$ ,  $h$  for  $Fm$ )

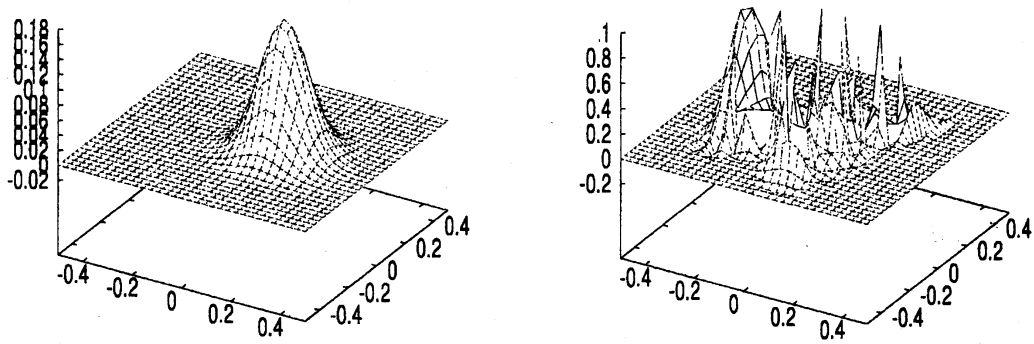
N	S2	S3	F2	F3	F4
64	1.050e-1	7.596e-2	x	2.768e+0	2.548e-1
96	6.371e-2	5.025e-2	x	1.055e+0	1.761e-1
128	4.519e-2	3.757e-2	x	1.890e-1	1.338e-1
192	2.807e-2	2.458e-2	5.753e-1	1.223e-1	9.002e-2

表 2: Error in the case of  $\nu = 1.25 \times 10^{-4}$  ( $\Delta t = \sqrt{h}$  for  $Sm$ ,  $h$  for  $Fm$ )

N	S2	S3	F2	F3	F4
64	1.407e-1	9.530e-2	x	x	3.222e-1
96	8.407e-2	6.305e-2	x	x	2.226e-1
128	5.905e-2	4.705e-2	x	x	1.684e-1
192	3.609e-2	3.062e-2	x	x	1.128e-1



⊠ 3:  $h$  vs.  $E$  ( $\Delta t = \sqrt{h}$  for Sm,  $h$  for Fm),  $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$ (left),  $1.25 \times 10^{-4}$ (right)



⊠ 4:  $\phi_h$  at  $t = 2\pi$  by Scheme S2 (left) and by Scheme F2 (right)



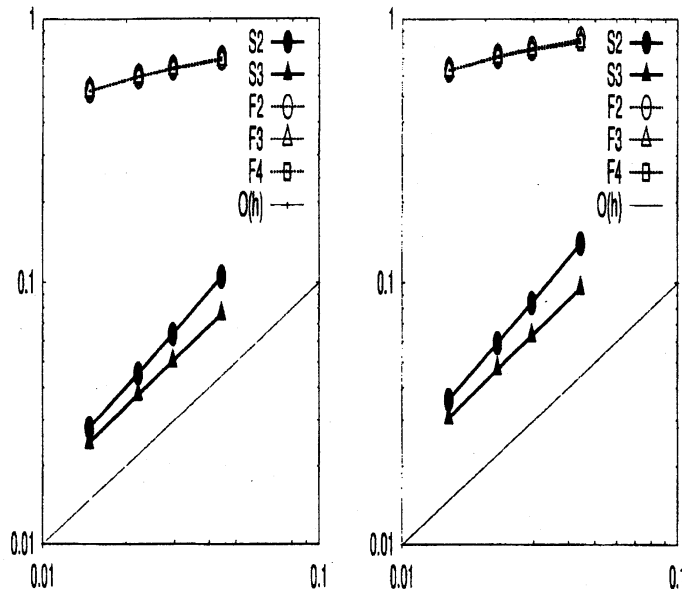


図 5:  $h$  vs.  $E$  ( $\Delta t = \sqrt{h}$ ),  $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$  (left),  $1.25 \times 10^{-4}$  (right)

#### 5.4 スキーム S1, F1

スキーム S1, F1 は、S2, F2 に比べて「発散」と判定される場合が多くなる。そうでない場合でも精度の低下が顕著である [3]。  $m = 1$  では合成関数の数値積分において標本点が三角形要素の頂点だけであり、被積分関数が要素上で折れ面になっていることを全く捉えない。実用的には  $m \geq 2$  が必要である。

#### 6. 結言

三角形 1 次要素 ( $k = 1$ ) の場合、時間 2 次精度特性曲線有限要素法は近似精度  $O(h)$  を保ちながら、合成関数の積分項に生じる数値積分誤差に対して強靱性を備えている。

#### 参考文献

- [1] Rui, H. and Tabata, M., "A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems", *Numer. Math.*, **92**(2002), 161-177.
- [2] 田中 克徳, 鈴木 厚, 田端 正久, 厳密な積分を用いる特性有限要素法, 九州大学情報基盤センター年報, **2**(2002), 11-18.
- [3] 藤間 昌一, 田端 正久, 2 次精度特性曲線有限要素法の数値積分に関する強靱性について, 第 17 回数値流体力学シンポジウム, No.C10-2, 2003.