数理解析研究所講究録 1364 巻 2004 年 138-154

Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields

東京工業大学大学院理工学研究科　野村　祐司 (Yuji Nomura)
Graduate School of Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology

本稿は F. Klopp, S. Nakamura, F. Nakano, Y. Nomura [20] の共同研究の結果に基づく。

1 Introduction

まず $\mathbb{Z}^2$ 上の magnetic Schrödinger operator を定義しよう。

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}^2, |x-y| = 1\}$$

を $\mathbb{Z}^2$ 上の向き付けられた辺の集合とし、ベクトルポテンシャル[1]を

$$A : \mathcal{E} \to \mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$$

で

$$A((x,y)) = -A((y,x)) \quad \text{for } (x,y) \in \mathcal{E}$$

を満たすものとする。このとき $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上の有界自己共役作用素

$$H(A)u(x) = \sum_{|x-y|=1} \left(u(x) - e^{iA((x,y))}u(y)\right), \quad x \in \mathbb{Z}^2,$$

を離散的 magnetic Schrödinger operator と呼ぶことにする。任意のベクトルポテンシャル A に対して

$$0 \le H(A) \le 8$$

となるので、特に $H(A)$ のスペクトル $\sigma(H(A))$ については

$$\sigma(H(A)) \subset [0,8]$$

[1]微分作用素の magnetic Schrödinger operator のベクトルポテンシャルとの対応でこのように呼ぶことにする。

が成り立つことが分かる。

次にベクトルポテンシャル A から定まる磁場を定義する。

$$\mathcal{F} = \left\{ \{x_1, x_1+1\} \times \{x_2, x_2+1\} \subset \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

とし、$f \in \mathcal{F}$ に対して、境界 ∂f を

$$\partial f_x = \left\{ (x, x+e_1), (x+e_1, x+e_1+e_2), (x+e_1+e_2, x+e_2), (x+e_2, x) \right\} \subset \mathcal{E}$$

と決める。ただし $f_x = \{x_1, x_1+1\} \times \{x_2, x_2+1\}$, $x = (x_1, x_2)$、$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \in \mathbb{Z}^2$ とする。このときベクトルポテンシャル A から定まる磁場 $B = dA$ を

$$B(f) = \sum_{e \in \partial f} A(e), \quad B \,:\, \mathcal{F} \to \mathbb{T}.$$

と定義する。

$dA_1 = dA_2$ ならば、ゲージ変換により $H(A_1)$ と $H(A_2)$ とはユニタリ同値になり、即ち magnetic Schrödinger operator のスペクトルの性質はベクトルポテンシャルではなく磁場にのみよることになる。

離散的 magnetic Schrödinger operator の例として、定数磁場、即ち f によらない定数 $b \in \mathbb{T}$ があって全ての $f \in \mathcal{F}$ に対して、$B(f) = b$ の場合、この作用素は Harper operator と呼ばれ、b の値によってまったく異なったスペクトル構造を持つことが知られている。例えば、$\frac{b}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ ならばスペクトルは有限個の閉区間の和になり、c が Liouville 数の時はスペクトルは Cantor 集合になる。興味のある方は [12]、[5]、[1]、[2]、[13] 等を参照されたい。

さて、我々はここで磁場 B をランダムにしてみる。そのときスペクトルにその影響がどのように現れるかを調べたい。

Assumption A. (1) $\left\{ B^\omega(f_{(2n,m)}) \;\middle|\; n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ は、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ 上の独立同分布な確率変数の族であり、ν をその分布とすると、ν は有界な密度関数 $g(\lambda)$ を持つ。さらに、ある $c > 0$ が存在し、

$$\mathrm{supp}\, g \subset (\mathbb{T} \setminus (-c, c))、\ \pm c \in \mathrm{supp}\, g$$

かつ g は $\mathbb{T} \setminus (-c, c)$ 上 Lipshitz 連続である。

(2) $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$B^\omega(f_{(2n+1,m)}) = -B^\omega(f_{(2n,m)})$$

とする。

この仮定のもとで、

$$\sigma(H(A^\omega)) = [4(1-\cos(c/4)), 4(1+\cos(c/4))] \quad \text{a.s.}$$

が成り立つことが分かる。ここでスペクトルの下端を

$$E_0 = \inf \sigma(H(A^\omega)) = 4(1-\cos(c/4))$$

とする。

さて、上の仮定に与えた磁場を実現するベクトルポテンシャル A_ω を一つ挙げておこう。

$$A^\omega(e) = \begin{cases} B^\omega(f_{(2n,m)}), & \text{if } e = ((2n+1,m),(2n+1,m+1)), \\ -B^\omega(f_{(2n,m)}), & \text{if } e = ((2n+1,m+1),(2n+1,m)), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とすればよい。

次が我々の主定理である。

Theorem 1.1 (Anderson localization). *Assumption A* を仮定する。すると、スペクトルの下端の近傍において、アンダーソン局在が生じる。即ち $E_\ell > E_0$ が存在して、ほとんど確実に（確率 1 で）$H(A^\omega)$ は $[E_0, E_\ell]$ において *dense pure point spectrum* を持ち、対応する固有関数は $|x| \to \infty$ で指数関数的に減衰する。

証明において重要な役割をする二つの評価が、Lifshitz tail (Theorem 1.2) と Wegner estimate (Theorem 1.3) である。それら自身も興味深い主張である。これらを述べるために、integrated density of states (IDS) という量を導入しよう。$L > 0$ に対して、

$$\Lambda_L = [-L, L]^2 \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$$

とする。格子点の個数を $|\Lambda_L|$ で表すと、$|\Lambda_L| = (2L+1)^2$ である。$H(A^\omega)$ を Λ_L に制限した magnetic Scrödinger operator を $H_{\Lambda_L}(A^\omega)$ と書く。（正確な定義は Section 2 で与える。）$E \in \mathbb{R}$ に対して

$$k(E) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} \sharp\{\text{eigenvalues of } H_{\Lambda_L}(A^\omega) \le E\}$$

を integrated density of states と呼ぶ。ほとんど確実に右辺の極限は存在し、かつその値は $\omega \in \Omega$ によらないことが分かる。（[23] の Appendix C を参照。）$k(E)$ は非負値単調増加関数で

$$0 \le k(E) \le 1, \quad \operatorname{supp} dk = \sigma(H(A^\omega)) \ a.s.$$

が成り立つことに注意する。

$k(E)$ のスペクトルの下端での挙動を表すのが以下の Lifshitz tail である。(物理学者の I.M.Lifshitz により最初に指摘された。[22])

Theorem 1.2 (Lifshitz tail). *Assumption A* を仮定する。 すると

$$\overline{\lim}_{E\downarrow E_0} \log(-\log k(E))/\log(E-E_0) \le -1$$

が成り立つ。

直感的に言えば(正確ではないが)

$$k(E) \lesssim e^{-(E-E_0)^{-1}} \quad \text{as } E \downarrow E_0,$$

であること表している。一方 $\mathbb{Z}^d$ 上の $\Delta = H(0)$ の IDS を $k_0^d(E)$ とすると

$$k_0^d(E) \sim E^{\frac{d}{2}} \quad \text{as } E \downarrow 0 = \inf \sigma(\Delta)$$

が成り立つ。次元 $d=2$ としてみると、ランダムな磁場のある場合の IDS は Δ の場合に比べて、非常に"薄い"、即ち、スペクトルの下端近くのエネルギーをもつ状態は非常に少ないことを主張している。

Theorem 1.3 (Wegner estimate). *Assumption A* を仮定する。 すると $E_1 > E_0$ と $C > 0$ が存在して、任意の $E \in [E_0, E_1]$, $L > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{dist}(\sigma(H_{\Lambda_L}(A^\omega)), E) < \varepsilon\big) \le C\varepsilon|\Lambda_L|$$

が成り立つ。

Wegner estimate から $H_{\Lambda_L}(A)$ の固有値の分布が低エネルギー領域において密度関数を持つことが分かる。特に IDS は Lipschitz 連続になることが導かれる。

Theorem 1.1 は Lifshitz tail と Wegner estimate を援用して、multiscale analysis によって証明される。具体的には、大きな領域のグリーン関数をそれに含まれる小さな領域のグリーン関数により展開し、帰納的にその指数関数的評価を導き出す方法である。その帰納法の第一段階に当たるのが Lifshitz tail であり、帰納法を遂行するうえで必要な命題が Wegner estimate に対応する。ここでは multiscale analysis には、これ以上は触れないことにする。詳しくは [9], [7], [27] 及びそこにある文献を参照されたい。

ランダムなポテンシャルを持つ Schrödinger operator のスペクトルについては多くの研究がなされてきた。(例えば [4], [8], [27] とそこにある文

献を参照。）しかし、ランダムな磁場を持つ Schrödinger operator の研究は現段階では、非常に少ない。上木（[29]）は、あるガウス型ランダム磁場の場合に Lifshitz tail を示した。中村（[23]、[24]）は Lifshitz tail を 2 次元の離散的な場合と連続的（微分作用素）な場合にそれぞれ示した。Hislop と Klopp は連続的な場合にスペクトルの下端の近傍で Wegner estimate を示し、[24] の結果を援用して、Anderson localization を示唆したが、両方の条件を満たすエネルギー領域の存在は明らかではない。最近上木（[30]）がランダムポテンシャルとそれと独立でないランダム磁場を持った Schrödinger operator に対して Anderson localization を証明した。

ランダム磁場を持つ Schrödinger operator に関する物理学の文献はたくさんあるが、その多くは数値計算によるものである（[10]、[21]、[15]、[26]、[14]、[25]）。エネルギーの中間領域において連続スペクトルが存在するかどうかは、一致した見解はないようである。しかし、エネルギー領域の両端の近傍において Anderson localization が生じることは広く信じられてきた。これが今回我々が証明した事実である。ランダム磁場をどのように実験的に実現するか、アンダーソン局在の物理的意味等、非一様磁場中の量子現象について興味を持たれた方は例えば [25]、[14] を参照されたい。

2 The Lifshitz tail

最初に $\ell^2(\Lambda_L)$ 上の自己共役作用素 $H_{\Lambda_L}(A)$ を定義しよう。$H(A)$ の定める 2 次形式は以下のように local な Hamiltonian の 2 次形式に分解（サイクル分解またはフェイス分解と呼ぶ。）される。

$$\begin{aligned}\langle u|Hu\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}}\left|u(i(e)) - e^{iA(e)}u(t(e))\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{f\in\mathcal{F}}\sum_{e\in\partial f}\left|u(i(e)) - e^{iA(e)}u(t(e))\right|^2,\end{aligned}$$

ここで $i(e)$ と $t(e)$ はそれぞれ 有向辺 e の始点と終点とを表す。即ち、

$$i(e) = x, \quad t(e) = y \quad \text{for } e = (x, y)$$

である。そこで $H_{\Lambda_L}(A)$ を以下の 2 次形式から定まる自己共役作用素として定義しよう。

$$\langle u|H_{\Lambda_L}u\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ f\subset\Lambda_L}}\sum_{e\in\partial f}\left|u(i(e)) - e^{iA(e)}u(t(e))\right|^2 + \sum_{x\in\partial\Lambda_L}|u(x)|^2,$$

ただし

$$\partial\Lambda_L = \{x \in \Lambda_L \mid |x_i| = L \text{ for } i = 1 \text{ or } 2\}$$

とする。項 $\sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2$ は境界に乗せたポテンシャルに対応するが、この作用素のランクは $8L << |\Lambda_L|$ であるから IDS には影響しない。Theorem 1.2 を [23] に従って証明するが、$\inf\sigma(H(A^\omega)) > 0$ であることにより、より精密な ocal energy estimate が必要になる。

$$0 < \alpha < 1 - 1/\sqrt{2}$$

を満たす α をひとつ固定し、

$$\beta(t) = \min(1 - \cos(t/4), \alpha), \quad \text{for } t \in \mathbb{T} \cong [-\pi, \pi)$$

とおく。さらに

$$W_B(x) = \sum_{x \in f} \beta(B(f)), \quad x \in \mathbb{Z}^2.$$

と定義すると、以下が成り立つ。

Theorem 2.1. $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ に対して

$$\langle u|Hu\rangle \geq \langle u|W_B u\rangle + \gamma\langle |u|\big|H_0|u|\rangle$$

が成立する。ここで

$$\gamma = \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \alpha\Big) > 0$$

であり、H_0 は $\mathbb{Z}^2$ 上の *free discrete Schrödinger operator* である。

Proof. $\ell^2(f) \cong \mathbb{C}^4$ 上の作用素 H_f を

$$\langle u_f|H_f u_f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{e \in \partial f}\big|u_f(i(e)) - e^{iA(e)}u_f(t(e))\big|^2 \quad \text{for} \quad u_f \in \ell^2(f)$$

によって定義する。

$$f = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}, \quad e_j = (y_j, y_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, 3$$

(ただし $y_4 = y_0$) とすると、

$$\langle u_f|H_f u_f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\big|u_f(y_j) - e^{iA(e_j)}u_f(y_{j+1})\big|^2$$

と書ける。ゲージ変換により、$A(e_j)=B/4$ としてよい。ここで $B=B(f)$ とする。即ち $\{g_j\}_{j=0}^3$ 、 $|g_j|=1$ $(j=0,1,2,3)$ が存在して

$$\tilde{u}_f(y_j)=g_j u_f(y_j)$$

とおけば

$$\langle u_f|H_f u_f\rangle=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\left|\tilde{u}_f(y_j)-e^{iB/4}\tilde{u}_f(y_{j+1})\right|^2$$

が成り立つ。$\ell^2(f)$ 上の作用素 $\tilde{H}_f$ を

$$\langle u_f|H_f u_f\rangle=\langle\tilde{u}_f|\tilde{H}_f\tilde{u}_f\rangle$$

と定める。すると

$$\sigma(H_f)=\sigma(\tilde{H}_f)=\{\lambda_j\mid j=0,1,2,3\}、$$

ただし

$$\lambda_j=1-\cos((B+2\pi j)/4)$$

となり、$\tilde{H}_f$ の固有ベクトルは

$$\mathbf{v}_j=\frac{1}{2}(1,e^{i\pi j/2},e^{2i\pi j/2},e^{3i\pi j/2}),\quad j=0,1,2,3.$$

によって与えられる。Π_j を固有値 λ_j の固有空間への直交射影とする。$\beta(t)$ と γ の定義と、$j=1,2,3$ に対して

$$\lambda_j\geq 1-1/\sqrt{2}$$

という事実から

$$\begin{aligned}
\langle u_f|H_f u_f\rangle&=\sum_{j=0}^{3}\lambda_j\|\Pi_j\tilde{u}_f\|^2\\
&\geq\beta(B)\|\Pi_0\tilde{u}_f\|^2+\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\|\Pi_j\tilde{u}_f\|^2\\
&=\beta(B)\|\tilde{u}_f\|^2+\sum_{j=1}^{3}(\lambda_j-\beta(B))\|\Pi_j\tilde{u}_f\|^2\\
&\geq\beta(B)\|u_f\|^2+4\gamma\|(1-\Pi_0)\tilde{u}_f\|^2
\end{aligned}$$

を得る。右辺の第二項を評価しよう。$v \in \ell^2(f)$ に対して、

$$\|(1-\Pi_0)v\|^2 = \sum_{j=0}^{3} |v(y_j) - \bar{v}|^2 \geq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} |v(y_j) - v(y_{j+1})|^2$$
$$\geq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} \big||v(y_j)| - |v(y_{j+1})|\big|^2$$

が導かれる。ここで $\bar{v} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} v(y_j)$ は v の平均である。よって

$$\|(1-\Pi_0)\tilde{u}_f\|^2 \geq \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} \big||\tilde{u}_f(y_j)| - |\tilde{u}_f(y_{j+1})|\big|^2$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} \big||u_f(y_j)| - |u_f(y_{j+1})|\big|^2 = \frac{1}{4}\big\langle |u_f| \big| H_{0,f} |u_f| \big\rangle$$

が分かる。ただし $H_{0,f}$ は $\ell^2(f)$ 上の free Schrödinger operator である。以上から、

$$\langle u_f | H_f u_f \rangle \geq \beta(B(f))\|u_f\|^2 + \gamma\big\langle |u_f| \big| H_{0,f} |u_f| \big\rangle$$

が従う。$u_f = u\big|_f$ とし、この不等式を $f \in \mathcal{F}$ について足し上げれば,

$$\langle u | Hu \rangle = \sum_{f\in\mathcal{F}} \beta(B(f))\|u_f\|^2 + \gamma \sum_{f\in\mathcal{F}} \big\langle |u_f| \big| H_{0,f} |u_f| \big\rangle$$
$$= \big\langle u \big| W_B u \big\rangle + \gamma\big\langle |u| \big| H_0 |u| \big\rangle$$

を得る。 □

H_{Λ_L} に対する以下の評価も上と同様にして得られる。

Theorem 2.2. $u \in \ell^2(\Lambda_L)$ に対して、

$$\langle u | H_{\Lambda_L} u \rangle \geq \big\langle u \big| W_{B,\Lambda_L} u \big\rangle + \gamma\big\langle |u| \big| H_{0,\Lambda_L} |u| \big\rangle$$

が成り立つ。ここで

$$W_{B,\Lambda_L}(x) = \sum_{x\in f\subset\Lambda_L} \beta(B(f))$$

であり、H_{0,Λ_L} は

$$\langle u | H_{0,\Lambda_L} u \rangle = \frac{1}{2}\sum_{f\in\mathcal{F}}\sum_{e\in\partial f} |u(i(e)) - u(t(e))|^2$$

で定義される $\ell^2(\Lambda_L)$ 上の *free Schrödinger operator* である。

[23] における方法と大偏差原理とにより、Theorem 2.2 から Theorem 1.2 が導かれる。詳細は省略しよう。

3 The Wegner estimate

以下、Assumption A を仮定し、ベクトルポテンシャル $A^{\omega}(e)$ を Section 1 で与えたものに固定して考えよう。$u_f = u|_f \in \ell^2(f) \cong \mathbb{C}^4$ とし、Section 2 で得られた H のサイクル分解を

$$\langle u|Hu\rangle = \sum_{f\in\mathcal{F}} \langle u_f|H_f u_f\rangle, \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$$

とする。H_f は $\ell^2(f)$ 上の自己共役な行列である。その固有値を

$$\lambda_j(B(f)) = 1 - \cos((B(f) + 2\pi j)/4) \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

とすると、対応する正規化された固有ベクトルは

$$\mathbf{v}_j = \frac{1}{2}(1, e^{i\mu_j}, e^{2i\mu_j}, e^{3i\mu_j}), \quad \mu_j = (B(f) + 2\pi j)/4, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

となる。$B(f) \in [-\pi, \pi]$ の時、$\lambda_0(B(f))$ が最小固有値になることに注意する。

Lemma 3.1. $f \in \mathcal{F}$ を固定する。$u_f \in \ell^2(f)$ に対して

$$\alpha_f = |\langle \mathbf{v}_0|u_f\rangle|, \quad \beta_f = \left(\sum_{j=1}^{3} |\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle|^2\right)^{1/2}$$

とおく。すると

$$\left\langle u_f \left| \frac{\partial H_f}{\partial |B(f)|} u_f \right.\right\rangle \geq \frac{1}{4}\sin\left(\frac{|B(f)|}{4}\right)\alpha_f^2 - c_1\alpha_f\beta_f - c_2\beta_f^2$$

が成り立つ。ここで $c_1 = 8$, $c_2 = 16 + 1/4$ とする。

Proof. 簡単のために $b = |B(f)|$ とおくことにする。

$$\langle u_f|H_f u_f\rangle = \sum_{j=0}^{3} \lambda_j |\langle u_f|\mathbf{v}_j\rangle|^2$$

だから

$$\begin{aligned}\left\langle u_f \left| \frac{\partial H_f}{\partial b} u_f \right.\right\rangle &= \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial \lambda_j}{\partial b} |\langle u_f|\mathbf{v}_j\rangle|^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{3} \lambda_j \left(\overline{\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial b} \right| u_f \right\rangle} \langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle + \overline{\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle} \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial b} \right| u_f \right\rangle \right) \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II}.\end{aligned}$$

が成り立つ。第一項は

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{b}{4}\right)\alpha_f^2 + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\lambda_j}{\partial b}|\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle|^2 \geq \frac{1}{4}\sin\left(\frac{b}{4}\right)\alpha_f^2 - \frac{1}{4}\beta_f^2$$

と評価される。

$$0 = \frac{\partial}{\partial b}\langle \mathbf{v}_j|\mathbf{v}_k\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial b}\middle|\mathbf{v}_k\right\rangle + \overline{\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial b}\middle|\mathbf{v}_j\right\rangle}$$

だから

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial b}\middle|u_f\right\rangle = \sum_{k=0}^{3}\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial b}\middle|\mathbf{v}_k\right\rangle\langle \mathbf{v}_k|u_f\rangle = -\sum_{k=0}^{3}\overline{\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial b}\middle|\mathbf{v}_j\right\rangle}\langle \mathbf{v}_k|u_f\rangle$$

が分かり、これより

$$\mathrm{II} = \sum_{j,k=0}^{3}(\lambda_k - \lambda_j)\overline{\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial b}\middle|\mathbf{v}_j\right\rangle}\,\overline{\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle}\langle \mathbf{v}_k|u_f\rangle$$

となる。$\mathbf{v}_j$ の具体的な形を思い出せば、これより

$$\begin{aligned}
|\mathrm{II}| &\leq 4\sum_{j\neq k}|\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle|\cdot|\langle \mathbf{v}_k|u_f\rangle| \\
&\leq 4|\langle \mathbf{v}_0|u_f\rangle|\sum_{j=1}^{3}|\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle| + 4\sum_{j,k=1}^{3}|\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle|\cdot|\langle \mathbf{v}_k|u_f\rangle| \\
&\leq 8\alpha_f\beta_f + 16\beta_f^2
\end{aligned}$$

と評価できる。以上により、lemma は証明された。 □

$\mathcal{F}_L = \{f \in \mathcal{F} \mid f \subset \Lambda_L\}$ と書くことにする。

Lemma 3.2. $u \in \ell^2(\Lambda_L)$, $\|u\| = 1$ であり、$H_{\Lambda_L}u = Eu$、$E > E_0$ と仮定する。$u_f = u|_f$ とし、α_f, β_f を *Lemma 3.1* で与えられたものとする。ならば

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_L}\beta_f^2 \leq c_3(E - E_0), \qquad \sum_{f\in\mathcal{F}_L}\alpha_f^2 \geq 4 - c_4(E - E_0)$$

が成り立つ。ここで $c_3 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{E_0}{4}\right)^{-1}$ $c_4 = c_3 + 3\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^{-1}$ とする。

Proof. まず

$$
\begin{aligned}
1 = \|u\|^2 &\le \frac{1}{4}\sum_f \|u_f\|^2 + \frac{3}{4}\sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_f \alpha_f^2 + \frac{1}{4}\sum_f \beta_f^2 + \frac{3}{4}\sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2
\end{aligned}
$$

に注意しよう。一方 H_{Λ_L} の定義より以下を得る。

$$
\begin{aligned}
E = \langle u|H_{\Lambda_L}u\rangle &= \sum_f \langle u_f|H_f u_f\rangle + \sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2 \\
&= \sum_f \lambda_0(B(f))\alpha_f^2 + \sum_f \sum_{j=1}^{3} \lambda_j(B(f))|\langle \mathbf{v}_j|u_f\rangle|^2 + \sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2 \\
&\ge \frac{E_0}{4}\sum_f \alpha_f^2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_f \beta_f^2 + \sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2 \\
&= E_0\left(\frac{1}{4}\sum_f \alpha_f^2 + \frac{1}{4}\sum_f \beta_f^2 + \frac{3}{4}\sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2\right) \\
&\quad + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{E_0}{4}\right)\sum_f \beta_f^2 + \left(1-\frac{3}{4}E_0\right)\sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2 \\
&\ge E_0 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{E_0}{4}\right)\sum_f \beta_f^2 + \left(1-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2.
\end{aligned}
$$

これより lemmma の最初の評価が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
\sum_f \alpha_f^2 &\ge 4 - \sum_f \beta_f^2 - 3\sum_{\partial\Lambda_L} |u(x)|^2 \\
&\ge 4 - c_3(E-E_0) - 3\left(1-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^{-1}(E-E_0) \\
&= 4 - c_4(E-E_0)
\end{aligned}
$$

が従う。 □

Lemma 3.3. $u \in \ell^2(\Lambda_L)$ とする。ならば

$$
\sum_{f\in\mathcal{F}_L} \left\langle u \middle| \frac{\partial H(A)}{\partial|B(f)|} u \right\rangle \ge \sin(c/4) - c_5(E-E_0) - c_6\sqrt{E-E_0} \tag{3.1}
$$

が成り立つ。ここで $c_5 = c_4/4 + c_2c_3$、$c_6 = 2c_1c_3^{1/2}$ である。

Proof. Lemma 3.1 と 3.2 とにより

$$\sum_f \left\langle u \middle| \frac{\partial H(A)}{\partial |B(f)|} u \right\rangle = \sum_f \left\langle u_f \middle| \frac{\partial H_f}{\partial |B(f)|} u_f \right\rangle$$
$$\geq \frac{1}{4} \sin(c/4) \sum \alpha_f^2 - c_1 \sum \alpha_f \beta_f - c_2 \sum_f \beta_f^2$$
$$\geq \sin(c/4)\Big(1 - \frac{c_4}{4}(E - E_0)\Big) - c_1\Big(\sum \alpha_f^2\Big)^{1/2}\Big(\sum \beta_f^2\Big)^{1/2} - c_2 \sum \beta_f^2$$
$$\geq \sin(c/4) - \Big(\frac{c_4}{4} + c_2 c_3\Big)(E - E_0) - 2c_1 c_3^{1/2}\sqrt{E - E_0}$$

が導かれる。 □

以上の結果を使って Wegner estimate が証明される。

Theorem 3.4. $E_1 - E_0$ は、*(3.1)* の右辺が $E = E_1$ において正になるよう小であるとする。ならば $C > 0$ が存在して任意の $E \in [E_0, E_1]$, $L > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{dist}(\sigma(H_{\Lambda_L}(A^\omega)), E) < \varepsilon\big) \leq C\varepsilon |\Lambda_L|$$

が成り立つ。

Proof. 簡単のために L E_1 と $\varepsilon_0 > 0$ を

$$c_7 = \sin(c/4) - c_5(E_1 - E_0 - \varepsilon_0) - c_6\sqrt{E_1 - E_0 - \varepsilon_0} > 0$$

が成り立つように選ぶ。$E \in [E_0, E_1]$ を固定し、$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & (|t - E| \leq \varepsilon), \\ 0, & (|t - E| \geq 2\varepsilon), \end{cases}$$

かつ $0 \leq \eta(t) \leq 1$、$t \in \mathbb{R}$ となるよう定義する。Chebyshev の不等式から

$$\mathbb{P}(\mathrm{dist}(\sigma(H_{\Lambda_L}(A^\omega))), E) \leq \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(\eta(H_{\Lambda_L}(A^\omega)))) \qquad (3.2)$$

を得る。ここで $\mathbb{E}$ は測度 $\mathbb{P}$ による Ω 上の積分 (平均値、期待値) を表す。$\{E_j^\omega | j = 1, 2, \dots\}$ を $H_{\Lambda_L}(A^\omega)$ の固有値とし、対応する固有関数を $\{\psi_j^\omega\}$ としよう。解析的摂動論を使って

$$\frac{\partial E_j^\omega}{\partial |B^\omega(f)|} = \left\langle \psi_j \middle| \frac{\partial H_{\Lambda_L}(A^\omega)}{\partial |B^\omega(f)|} \psi_j \right\rangle$$

が分かる。

$$\xi(t) = \int_t^\infty \eta(s)ds \in C^\infty(\mathbb{R})$$

とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial|B^\omega(f)|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega))) = \frac{\partial}{\partial|B^\omega(f)|}\sum_j \xi(E_j^\omega) = -\sum_j \frac{\partial E_j^\omega}{\partial|B^\omega(f)|}\eta(E_j^\omega)$$

が従う。ここで和は $E_j^\omega \in [E-2\varepsilon, E+2\varepsilon]$ となる j についてとるものとする。Lemma 3.3 と合わせて、

$$\begin{aligned}\sum_{f\in\mathcal{F}_L}\frac{\partial}{\partial|B^\omega(f)|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega))) &= \sum_{f\in\mathcal{F}_L}\sum_j\left\langle\psi_j\middle|\frac{\partial H_{\Lambda_L}(A^\omega)}{\partial|B^\omega(f)|}\psi_j\right\rangle\eta(E_j^\omega)\\ &\geq c_7\sum_j\eta(E_j^\omega) \geq c_7\mathrm{Tr}(\eta(H_{\Lambda_L}(A^\omega)))\end{aligned} \tag{3.3}$$

が導かれる。次に (3.3) の左辺の期待値を求めよう。

$$\Lambda_L' = \big\{(2n+1,m)\in\Lambda_L \,\big|\, n,m\in\mathbb{Z}\big\},$$

とし、$y=(2n+1,m)\in\Lambda_L'$ に対して

$$\begin{aligned} e(y) &= ((2n+1,m),(2n+1,m+1)),\\ f_+(y) &= \{2n+1,2n+2\}\times\{m,m+1\},\\ f_-(y) &= \{2n,2n+1\}\times\{m,m+1\}\end{aligned}$$

とおく。H_{Λ_L} に対応する確率空間は $\Omega_L=\mathbb{T}^{\Lambda_L'}$ であり、確率測度は

$$\prod_{y\in\Lambda_L'}\nu(A^\omega(e(y))) = \prod_{y\in\Lambda_L'}g(A^\omega(e(y)))dA^\omega(e(y))$$

によって与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial|A^\omega(e(y))|} = \frac{\partial}{\partial|B^\omega(f_-(y))|} + \frac{\partial}{\partial|B^\omega(f_+(y))|}$$

だから、(3.3) の左辺は

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_L}\frac{\partial}{\partial|B^\omega(f)|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega))) = \sum_{y\in\Lambda_L'}\frac{\partial}{\partial|A^\omega(e(y))|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega)))$$

となる。よってその期待値は

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{y\in\Lambda'_L}\frac{\partial}{\partial|A^\omega(e(y))|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega)))\Big)$$
$$=\sum_{y\in\Lambda'_L}\int\cdots\int\frac{\partial}{\partial|A^\omega(e(y))|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega)))\prod_{y'\in\Lambda'_L}g(A^\omega(e(y')))dA^\omega(e(y'))$$

である。

$$A_y^t(e)=\begin{cases}A^\omega(e), & (e\neq e(y),\overline{e(y)}),\\ t, & (e=e(y)),\\ -t, & (e=\overline{e(y)})\end{cases}$$

とし、$K_y^t=H_{\Lambda_L}(A_y^t)$ とおく。$y\in\Lambda'_L$ に対し、部分積分によって

$$\int\frac{\partial}{\partial|A^\omega(e(y))|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega)))g(A^\omega(e(y)))dA^\omega(e(y))$$
$$=\int\frac{\partial}{\partial|t|}\mathrm{Tr}\big(\xi(K_y^t)-\xi(K_y^\pi)\big)g(t)dt$$
$$=\int_c^\pi\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}\big(\xi(K_y^t)-\xi(K_y^\pi)\big)g(t)dt-\int_{-\pi}^{-c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}\big(\xi(K_y^t)-\xi(K_y^\pi)\big)g(t)dt$$
$$=-g(c)\mathrm{Tr}\big(\xi(K_y^c)-\xi(K_y^\pi)\big)-g(-c)\mathrm{Tr}\big((\xi(K_y^{-c})-\xi(K_y^\pi)\big)$$
$$-\int_c^\pi\mathrm{Tr}\big(\xi(K_y^t)-\xi(K_y^\pi)\big)g'(t)dt+\int_{-\pi}^{-c}\mathrm{Tr}\big(\xi(K_y^t)-\xi(K_y^\pi)\big)g'(t)dt$$
$$\leq(2\sup|g|+2\pi\sup|g'|)\sup_t|\mathrm{Tr}(\xi(K_y^t)-\xi(K_y^\pi))| \tag{3.4}$$

を得る。$K_y^t-K_y^\pi$ はランク 2 の作用素だから、

$$|\mathrm{Tr}(\xi(K_y^t)-\xi(K_y^\pi))|=-\int\xi'(s)|\Xi(s;K_y^t,K_y^\pi))|ds$$
$$\leq 2\int\eta(s)ds\leq 8\varepsilon \tag{3.5}$$

が成り立つ。ただしここで $\Xi(s;A,B)$ は作用素の組 A、B に対する spectral shift function を表す。$\Xi(s;A,B)$ は $A-B$ のランクにより一様に押さえられることに注意する。([3] を参照。) (3.4) と (3.5) とにより

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{y\in\Lambda'_L}\frac{\partial}{\partial|A^\omega(e(y))|}\mathrm{Tr}(\xi(H_{\Lambda_L}(A^\omega)))\Big)$$
$$\leq\sum_{y\in\Lambda'_L}\int\cdots\int c_8\,\varepsilon\prod_{y'\neq y}g(A^\omega(e(y')))dA^\omega(e(y'))\leq c_8\,\varepsilon|\Lambda_L|$$

が導かれる。ここで $c_8 = 16\sup|g| + 16\pi\sup|g'|$ である。(3.2), (3.3) とこの評価とにより $C = c_8/c_7$ とおけば、

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{dist}(\sigma(H_{\Lambda_L}(A^{\omega})), E) < \varepsilon\big) \le C\varepsilon|\Lambda_L|$$

が従う。以上により Theorem 3.4 が証明された。 □

参考文献

[1] Bellissard, J.: Lipschitz continuity of Gap Boundaries for Hofstadter-like Spectra. Comm. Math. Phys. **160** (1994), 599–613.

[2] Bellissard, J.: Gap labelling theorem for Schrödinger operators. in "From Number Theory to Physics" edited by Waldschmidt, M. et al. Springer-Verlag. 1992, 538–639.

[3] Birman, M. Sh., Yafaev, D. R.: The spectral shift function. The papers of M. G. Krein and their further development. St. Petersburg Math. J. **4** (1993), 833–870.

[4] Carmona, R., Lacroix, J.: Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. Birkhauser, Boston, MA, 1990.

[5] Choi, M. D., Elliott, G. A., Yui, N.: Gauss polynomials and rotation algebra. Invent. Math. **99** (1990), 225–246.

[6] Combes, J. M., Hislop, P. D., Nakamura, S.: The L^p-theory of the spectral shift function, the Wegner estimate, and the integrated density of states for some random operators. Comm. Math. Phys. **218** (2001), 113–130.

[7] von Dreifus, H., Klein, A.: A new proof of localization in the Anderson tight binding model. Comm. Math. Phys. **124** (1989), 285–299.

[8] Pastur, L., Figotin, A.: Spectra of Random and Almost-Periodic Operators. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[9] Fröhlich, J., Spencer, T.: Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy. Comm. Math. Phys. **88** (1983), 151–184.

[10] Halperin, B. I., Lee, P. A., Read, N.: Theory of half-filled Landau level. Phys. Rev. B **47** (1993), 7312–7343.

[11] Hislop, P. D., Klopp, F.: The integrated density of states for some random operators with nonsign definite potentials. Preprint 2001 (`mp_arc` 01-139), To appear in J. Functional Analysis.

[12] Hofstadter, D. G.: Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational or irraional magnetic field. Phys. Rev. B **14** (1976), 2239–2249.

[13] Helffer, B., Sjöstrand, J. Analyse semi-classique pour l'equation de Harper II. Bull. Soc. Math. France. **117**, Mémorie **40** (1990).

[14] 家　泰弘: 非一様磁場中での量子輸送. 固体物理 第３４巻 第５号 (1999), 61–68.

[15] Kawarabayashi, T., Otsuki, T.: Diffusion of electrons in random magnetic fields. Phys. Rev. B **51** (1995), 10897–10904.

[16] Kirsch, W., Martinelli, F.: Large deviations and Lifshitz singularity of the integrated density of states of random Hamiltonians. Comm. Math. Phys. **89** (1983), 27–40.

[17] Klopp, F.: Internal Lifshits tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators. Duke Math. J. **98** (1999), 335–396.

[18] Klopp, F.: Lifshitz tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators. Proc. Ind. Acad. Sciences, 2002.

[19] Klopp, F.: Weak disorder localization and Lifshitz tails. Technical report, Université Paris-Nord, 2001.

[20] Klopp, F., Nakamura, S., Nakano, F., Nomura, Y.: Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields. Ann. Henri Poincaré **4** (2003), 795–811.

[21] Lee, D., K., Chalker, J. T.: Unified model of two localization problems: Electron states in spin-degenerate Landau levels and in a random magnetic field. Phys. Rev. Lett. **72** (1994), 1510–1513

[22] Lifshitz, I. M.: Energy spectrum structure and quantum states of disorder condensed systems. Sov. Phys. Usp. **7** (1965), 549–573

[23] Nakamura, S.: Lifshitz tail for 2D discrete Schrödinger operator with random magnetic field. Ann. Henri Poincaré **1** (2000), 823–835.

[24] Nakamura, S.: Lifshitz tail for Schrödinger operator with random magnetic field. Comm. Math. Phys. **214** (2000), 565–572.

[25] 大槻東巳、河原林透、小野嘉之: 非一様磁場中での量子輸送現象. 日本物理学会誌 第５６巻 第２号 (2001), 91–97.

[26] Sheng, D. N., Weng, Z. Y.: Delocalization of electrons in a random magnetic field. Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 2388–2391.

[27] Stollmann, P.: Caught by Disorder. Bound States in Random Media. Birkhauser, Boston, MA, 2001.

[28] Simon, B.: Lifshitz tails for the Anderson model. *Journal of Statistical Physics*, **38** (1985), 65–76.

[29] Ueki, N.: Simple examples of Lifschitz tails in Gaussian random magnetic fields. Ann. Henri Poincaré **1** (2000), 473–498.

[30] Ueki, N.: Seminar talk at RIMS, 2001.