

# On the zero-set of some entire function of two complex variables arising from a physical problem

京都大学理学研究科 小池 達也 (KOIKE, Tatsuya)  
 Department of Mathematics, Kyoto University  
 京都大学数理解析研究所 竹井 義次 (TAKEL, Yoshitsugu)  
 RIMS, Kyoto University

## 1 はじめに

Berk-Book の仕事 ([BB]) をより一般的に論じるための数学的な枠組として、青木-河合-小池-竹井では microdifferential operator に対する完全 WKB 解析を展開した ([AKKT2], なお [AKKT1] も参照). しかし, Berk-Book が論じた方程式は, それ自体数学的に非常に興味深い構造を持っている. そこで本稿では, Berk-Book が論じた方程式に焦点を絞り, 特にその特性集合や変わり点の構造について考察する. まず, 考える方程式の具体形を述べよう. 複素変数  $z$  の整函数  $U(z)$  を

$$(1) \quad U(z) = -2z^2 + 4z^3 e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt$$

で定義し,

$$(2) \quad V(\zeta) = U(1/\zeta)$$

と置く. すると, Berk-Book の論じた方程式は

$$(3) \quad V \left( \frac{1}{\eta i} \frac{d}{dx} \right) \psi = \gamma^2 e^{x^2} \psi$$

( $\gamma > 0$  は正の実定数,  $\eta > 0$  は大きなパラメータ) で与えられる. より正確には, (3) と同等な積分方程式

$$(4) \quad \int \check{V}(x - x') \psi(x') dx' = \gamma^2 e^{x^2} \psi$$

を Berk-Book は問題とした. ここで  $\check{V}(x) = \int e^{i\eta x \zeta} V(\zeta) \eta d\zeta$  は  $V(\zeta)$  の逆 Fourier 変換を表す. Berk-Book は, Landau の研究 ([L]) を受けて, 外部ポテンシャルの影響下でのプラズマ波の解析を目的として積分方程式 (4) を考察した.

[AKKT2] で示されているように, (3) は WKB 型の microdifferential equation と理解することが可能で,

$$(5) \quad \psi = \exp\left(i\eta \int^x \zeta(x') dx'\right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \eta^{-n}$$

という形の解 (“WKB 解”) を持つ. 但し,  $\zeta(x)$  は (3) の特性方程式

$$(6) \quad P(x, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} V(\zeta) - \gamma^2 e^{x^2} = 0$$

の根であり,  $\{\psi_n(x)\}_{n \geq 0}$  は  $\zeta(x)$  を決めれば順次帰納的に定まる. こうした WKB 解の性質は特性根  $\zeta(x)$  によって統制されており, 従って方程式 (3) を完全 WKB 解析の視点から論じるためには, その特性集合

$$(7) \quad \Lambda_U \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z) \mid U(z) - \gamma^2 e^{x^2} = 0\}$$

を調べる必要がある. 本稿の目的は, 方程式 (3) の特性集合  $\Lambda_U$  やその変わり点 (特性方程式 (6) が重根を持つ点, すなわち

$$(8) \quad P(x_*, \zeta_*) = \frac{\partial P}{\partial \zeta}(x_*, \zeta_*) = 0$$

を満たす  $(x_*, \zeta_*)$  ( $\zeta_* \neq 0$ ) が存在するような点  $x = x_*$ ) の複素領域での構造を論じることである.

## 2 Berk-Book の観察 — $\Lambda_U$ の実領域での構造

複素領域における  $\Lambda_U$  の構造を調べる前に, Berk-Book [BB] がどのような解析を行ったかを見ておこう.

以下  $0 < \gamma < 1$  とする. (この場合にもっとも興味深い状況が現れる.) Berk-Book の関心は方程式 (3) の (実軸上での) 固有値及びそれを決定する量子化条件にあったから, 彼らは  $\Lambda_U$  を実領域で考察した. まず, 函数  $U(z)$  の  $z > 0$  におけるグラフは図 1 のようになる. ここで,  $U(z)$  ( $z \in \mathbb{R}$ ) は偶函数であって,  $z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi/4$  において成り立つ漸近展開

$$(9) \quad e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt \sim \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^3} + \frac{3}{8z^5} + \frac{15}{16z^7} + \dots$$

より

$$(10) \quad U(z) \sim 1 + \frac{3}{2z^2} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}} \frac{1}{z^{2(n-1)}} + \dots, \quad z \rightarrow +\infty$$

が成立することに注意しよう. 従って, 特性方程式 (6) により定まる特性根  $\zeta(x)$  のグラフ (すなわち  $\Lambda_U$  の実領域での形状) は, 図 2 で与えられる.

この図 2 から, 方程式 (3) は正の実軸上次の 2 種類の変わり点を持つことがわかる.

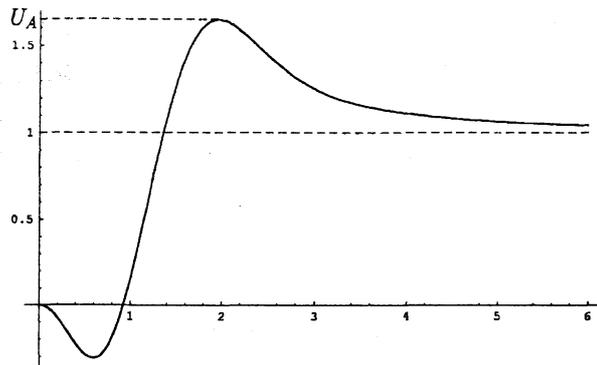


図 1: 正の実軸上での  $U(z)$  のグラフ ([BB, Fig.3 in p.656] と同じ図) .

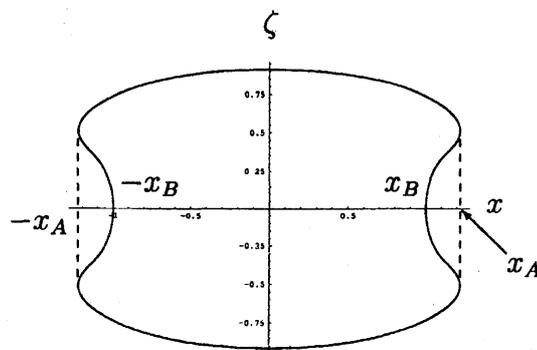


図 2:  $0 < \gamma < 1$  の場合の  $\Lambda_U$  の実領域での形状 ([BB, Fig.4(b) in p.656] と同じ図) .

(A) 実軸上での  $U(z)$  の最大値  $U_A$  に対して,

$$\gamma^2 e^{x_A^2} = U_A$$

により定まる点  $x = x_A$ .

(B) 次式で定義される点  $x = x_B$ .

$$\gamma^2 e^{x_B^2} = 1.$$

(以下, 特に数値計算を行う際には  $\gamma = 1/\sqrt{e}$ , 従って  $x_B = 1$  とする.)

このうち, 第1のタイプの変わり点  $x = x_A$  は, いわゆる (rank が 2 の) 単純な  
変わり点である. すなわち, 変わり点の定義式 (8) に加えて,

$$(11) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}(x_*, \zeta_*) \neq 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x_*, \zeta_*) \neq 0$$

が  $x_* = x_A$  (と適当な特性値  $\zeta = \zeta_*$ ) に対して成り立つ。(従って, [AKKT2] の結果により,  $x = x_A$  の近傍で方程式 (3) を Airy の方程式に変換することができる.)

一方, 第2のタイプの点  $x = x_B$  においては, (特性値  $\zeta = \zeta(x_B)$  が  $V(\zeta)$  の特異点である  $\zeta = 0$  となるという意味で) 状況がもう少し複雑である. しかし, 漸近展開 (10) により,  $x = x_B$  の近傍において (少なくとも実領域で考える限りは)

$$(12) \quad \zeta(x) \sim \text{Const.} (x - x_B)^{1/2}$$

が成立するので, 特性根  $\zeta(x)$  の挙動は Airy の方程式のそれとほぼ同一であり, 従って  $x = x_B$  もまた単純な変わり点と考えられるだろう.

以上が方程式 (3) に対して Berk-Book が行った観察である.

### 3 $x = x_B$ の近くでの $\Lambda_U$ の構造 — 複素領域の場合

完全 WKB 解析では, 特性集合を複素領域で調べることが必要になる. 方程式 (3) の場合, 特性集合  $\Lambda_U$ , 特にその  $x = x_B$  の近傍での構造を複素領域で考えると, 以下に見るように, 前節で見た実領域におけるのとは全く異なった状況が現れる.

最初に数値計算例を示す. 図3は, 特性方程式 (6) の根  $\zeta(x)$  の逆数  $z(x) = 1/\zeta(x)$  を, 複素平面の道  $x = x_B + re^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) に沿って解析接続した際の  $z(x)$  の挙動を  $z$ -平面に図示したものである. ここで  $r = 0.1$  であり, また  $\theta = 0$  における  $z$  の値  $z(x_B + r)$  が実になるものを選んである. この図3から読み取れるように,  $|\theta|$  が

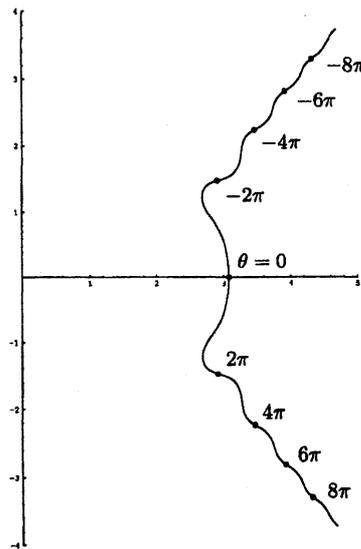


図3:  $x = x_B + re^{i\theta}$  (但し  $r = 0.1$ ) での  $z(x)$  の挙動

十分小さい範囲 (数値計算の結果によると, おおよそ  $|\theta| < 0.45\pi$  ( $< \pi/2$ ) の範囲)

では、前節の考察から予想された通り  $z(x)$  は  $(x - x_B)^{-1/2}$  のように振る舞っている。ところが、 $\theta = \pi/2$  付近（すなわち  $\arg z = \pi/4$  付近、これは漸近展開 (9) の有効域の限界にあたることに注意）に近づくと  $z(x)$  の振る舞いは急激に変化し、実は  $z(x)$  は  $x = x_B$  の近傍で無限多価であって、特に  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  における  $z(x)$  の値は全て異なることがわかる。実際、数学的に厳密な議論により次を示すことができる。

**定理 1.**  $x_B$  の十分小さな近傍内の任意の点  $x (\neq x_B)$  に対して、方程式

$$(13) \quad U(z) - \gamma^2 e^{x^2} = 0$$

の根の無限列  $z = z_n (n = 1, 2, \dots)$  で、 $n \rightarrow \infty$  のとき次の漸近挙動を満たすものが存在する。

$$(14) \quad |z_n| \sim \sqrt{2\pi n},$$

$$(15) \quad \arg z_n \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{3 \log(2\pi n)}{8\pi n}.$$

次に、解析接続の道として取った  $x_B$  の回りの円弧の半径をより小さくしてみる。図 4 は、 $x = x_B + r e^{i\theta}$  に沿う  $z(x)$  の解析接続の挙動を、それぞれ  $r = 0.066$  (左図)、 $r = 0.064$  (中央)、 $r = 0.040$  (右図) に対して図示したものである。図 4 の左図と中

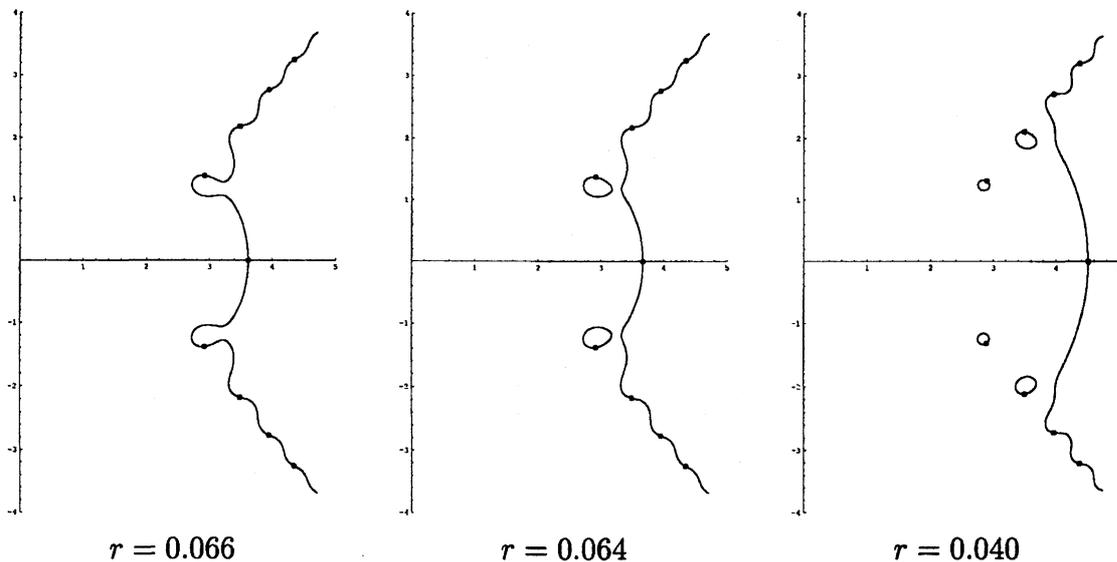


図 4: いくつかの  $r$  に対する  $x = x_B + r e^{i\theta}$  での  $z(x)$  の挙動

央の図を比較すると、 $\{x \mid 0.064 < |x - x_B| < 0.066\}$  において 2 個変わり点が存在すると期待できることがわかるだろう。なお、 $U(z)$  が実軸上で実数値であることから、

$x = x_*$  が変わり点ならばその複素共役  $x = \bar{x}_*$  もまた変わり点となる。従って、この円環領域に存在すると期待される2個の変わり点を  $x_1$  及び  $\bar{x}_1$  と呼ぶことにする。同様に、図4の中央の図と右図を見比べることで、 $\{x \mid 0.040 < |x - x_B| < 0.064\}$  においても2個の変わり点  $x_2, \bar{x}_2$  が存在すると期待される。

実は、次が成立する。

**定理 2.**  $x_B$  は単純変わり点の集積点である。すなわち、 $R(x, z) = P(x, 1/z) = U(z) - \gamma^2 e^{x^2}$  と置くと、次を満たす点列  $(x_n, z_n)$  ( $n \geq 1$ ) が存在する。

$$(16) \quad R(x_n, z_n) = \frac{\partial R}{\partial z}(x_n, z_n) = 0,$$

$$(17) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}(x_n, z_n) \neq 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x}(x_n, z_n) \neq 0,$$

$$(18) \quad x_n \neq x_B, \quad x_n \rightarrow x_B \quad (n \rightarrow \infty).$$

上で存在が予見された変わり点については、より詳細な数値解析を行うことにより、その位置を数値的に特定することができる。さらに、こうして見つかった変わり点  $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$  が単純変わり点であることも、数値的に確かめられる。図5に、これらの変わり点、及びその変わり点を始点とする Stokes 曲線を図示した。

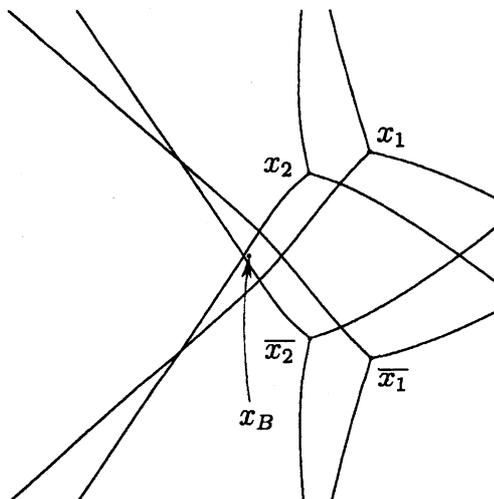


図5:  $x_1, \bar{x}_1, x_2$  及び  $\bar{x}_2$  から出る Stokes 曲線

このように、実領域の考察では単純変わり点と思われた点  $x = x_B$  が、複素領域まで考察の対象を拡げることで、単純変わり点とは全く違った構造を持っていることが明らかになった訳である。

次節では、定理1, 2の証明の概略を述べる。

#### 4 定理 1, 2 の証明の概略

定理の証明の鍵は, 次の“漸近式”にある.

$$(19) \quad \int_0^z e^{t^2} dt = \int_0^{e^{-\pi i/4}\infty} e^{t^2} dt + \int_{e^{-\pi i/4}\infty}^z e^{t^2} dt$$

$$(20) \quad \sim -\frac{\sqrt{\pi}i}{2} + e^{z^2} \left( \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^3} + \dots \right),$$

すなわち,

$$(21) \quad e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt \sim -\frac{\sqrt{\pi}i}{2} e^{-z^2} + \left( \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^3} + \dots \right).$$

$|\arg z| < \pi/4, z \rightarrow \infty$  においては (21) の第 1 項は指数函数的に小さいので, Poincaré の意味での通常の漸近展開では無視することができて, その結果漸近展開 (9) が得られる. しかし, 例えば図 3 からわかるように定理 1 の無限個の根はこの漸近展開の有効域の限界付近に存在しており, このように  $\arg z$  が  $\pm\pi/4$  に近づけば (21) の第 1 項は無視できなくなり, むしろ第 2 項よりこちらの方が主要な項となる. この事実注目すれば,

$$(22) \quad U(z) = -2z^2 + 4z^3 e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt \sim -2\sqrt{\pi}iz^3 e^{-z^2} + 1 + \frac{3}{2z^2} + \dots$$

であるから, 定理 1 で扱っている方程式 (13) は,  $|z|$  が十分大きく  $\arg z$  が  $\pm\pi/4$  に十分近いとき,

$$(23) \quad -2\sqrt{\pi}iz^3 e^{-z^2} = \gamma^2 e^{x^2} - 1$$

という方程式で近似されることがわかる. この形の方程式については, 次が成立する.

**命題 1.**  $k$  を正の整数,  $c$  を零でない複素定数とするとき, 超越方程式

$$(24) \quad z^k e^{-z^2} = c$$

の根の無限列  $z = z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) で,  $n \rightarrow \infty$  に対して次の漸近挙動を満たすものが存在する.

$$(25) \quad |z_n| = (2\pi n + \theta_0)^{1/2} + O(n^{-3/2}(\log n)^2),$$

$$(26) \quad \arg z_n = -\frac{\pi}{4} + \frac{k \log(2\pi n + \theta_0) - 2 \log r_0}{4(2\pi n + \theta_0)} + O(n^{-2}(\log n)^2).$$

但し,  $r_0, \theta_0 > 0$  は

$$(27) \quad r_0 e^{i\theta_0} = e^{\pi i k/4} c$$

により定めるものとする.

定理 1 は, この命題 1 に Rouché の定理を組み合わせるにより証明される.

他方, 定理 2 の証明については, まず

$$(28) \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{dU}{dz} = (4z^3 - 4z) + (12z^2 - 8z^4)e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt \\ \sim \sqrt{\pi}i(4z^4 - 6z^2)e^{-z^2} + \frac{3}{z^3} + O(z^{-5})$$

であることに注意する. すると,  $\partial R/\partial z = 0$  という方程式は

$$(29) \quad -4\sqrt{\pi}iz^7e^{-z^2} = 3$$

という方程式で近似されることになり, 従って再び命題 1 (及び Rouché の定理) により  $(\partial R/\partial z)(z_n) = 0$ ,  $z_n \rightarrow \infty$ ,  $\arg z_n \rightarrow -\pi/4$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たす  $\{z_n\}$  が存在することがわかる. さらに, 点列  $\{x_n\}$  を  $R(x_n, z_n) = 0$  により定めれば, 漸近展開式を用いることにより  $x_n \rightarrow x_B$  が, また背理法により  $(\partial^2 R/\partial z^2)(x_n, z_n) = (d^2U/dz^2)(z_n) \neq 0$  が成り立つことが, それぞれ確かめられる. しかも  $(\partial R/\partial x)(x_n, z_n) \neq 0$  は自明に成立するので, こうして定理 2 も示されたことになる.

最後に, 命題 1 の証明は, 方程式 (24) を座標変換  $iz^2 = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) により

$$(30) \quad \begin{cases} r \sin \theta - \frac{k}{2} \log r = -\log r_0 \\ r \cos \theta + \frac{k}{2} \theta = 2\pi n + \theta_0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

という実領域における連立方程式の零点を求める問題に帰着して行う.

議論の詳細については [AKKT2, Appendix] を参照されたい.

## 参考文献

- [AKKT1] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases, *Adv. Math.*, **181**(2004), 165-189.
- [AKKT2] \_\_\_\_\_: On the exact WKB analysis of microdifferential operators of WKB type, preprint (RIMS-1429), 2003.
- [BB] H. L. Berk and D. L. Book: Plasma wave regeneration in inhomogeneous media, *Phys. Fluids*, **12**(1969), 649-661.
- [L] L. D. Landau: On the vibrations of the electronic plasma, *Collected Papers of L. D. Landau*, Pergamon Press, 1965, pp. 445-460. (Originally published in *J. Phys. USSR*, **10**(1946).)