

## On second order nonlinear differential equations with the quasi-Painlevé property

Shun Shimomura

Department of Mathematics, Keio University

下村 俊・慶應大理工

方程式

$$y' = x^{-1}y^2$$

( $' = d/dx$ ) の一般解  $y = (C - \log x)^{-1}$  は特異点  $x = 0, \infty, e^C$  をもつ。このうち  $x = 0, \infty$  は対数的分岐点であり方程式の外見からその位置を知ることができる。それに対して  $x = e^C$  は動く特異点、つまりその位置が初期値に依存する特異点である。この場合はそのまわりでは

$$y = -e^C(x - e^C)^{-1}(1 + O(x - e^C))$$

となり動く特異点  $x = e^C$  は極である。一方、方程式

$$y' = y^{-1}/2$$

の一般解は  $y = (x - C)^{1/2}$  となり動く特異点  $x = C$  は代数的分岐点である。一般に一階非線形微分方程式

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$$

に対しては、よく知られているように、任意の解の動く特異点はすべて代数的分岐点または代数的極である。そして特に  $Q(x, y)$  が  $y$  を含まず  $P(x, y)$  が  $y$  の 2 次式であるとき、つまり Riccati 方程式の場合には動く特異点はすべて極である。二階非線形方程式

$$y'' = \frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')}, \quad P(x, y, z), Q(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$$

についてはその解の動く特異点に関する状況はもっと複雑である。例えば

$$y'' = -(y')^2$$

の一般解  $y = C_1 + \log(x - C_2)$  の動く特異点  $x = C_2$  は対数的分岐点であり、

$$y'' = (1+i)(y')^2/y$$

の一般解  $y = C_1(x - C_2)^i$  の動く特異点  $x = C_2$  は真性特異点である。任意の解の動く特異点がすべて極であるような、つまり Painlevé property をもつような二階非線形方程式として Painlevé 方程式が得られたわけであるが、それをもう少し弱めて「任意の解に対してその動く特異点はすべて代数的分岐点または代数的極である」という条件を考え、これを quasi-Painlevé property と呼ぶことにしよう。例えば上に述べたように一般の一階非線形方程式は quasi-Painlevé property をもつ。本論文では二階非線形方程式で quasi-Painlevé property をもつような方程式の例を与えその幾つかの性質を明らかにする。

### 1. quasi-Painlevé property をもつ方程式の例

まず方程式

$$(E) \quad y'' = \frac{10}{9}y^4 + x$$

を考えよう。以下  $y(x)$  をこの方程式の任意の解とする。この方程式が quasi-Painlevé property をもつことを示したい。まず  $x = x_0$  をこの解の代数的分岐点または代数的極としよう。もしも  $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{C}$  であるならばこの点のまわりで

$$y(x) = y_0 + c_1(x - x_0)^\alpha + \dots, \quad \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \alpha > 0, \quad c_1 \neq 0$$

とおける。  $0 < \alpha < 2$  ならば  $y''(x) = c_1\alpha(\alpha - 1)(x - x_0)^{\alpha-2} + \dots$  であるから  $|y''(x_0)| = \infty$  となるが (E) の右辺は  $x_0$  において有界であるからこれはありえない。次に  $x = x_0$  が正則点でなくさらに  $\alpha \geq 2$  であると仮定する。このときある正整数  $\nu_0 \geq 3$  を適当にとればすべての  $j \leq \nu_0 - 1$  に対し  $y^{(j)}(x_0)$  は有界でありさらに  $|y^{(\nu_0)}(x_0)| = \infty$  であるようにできるという事実、および (E) より従う

$$y^{(\nu_0)}(x) = F(x, y(x), y'(x)), \quad F(x, u, v) \in \mathbb{C}[x, u, v]$$

に注意すれば同様に矛盾が導ける。以上により  $|y(x_0)| = \infty$  つまり  $x_0$  は代数的極でなければならない。

$$y(x) = c(x - x_0)^\alpha + \cdots, \quad \alpha \in \mathbf{Q}, \quad \alpha < 0, \quad c \neq 0$$

とおいて (E) に代入し両辺を比較すれば  $\alpha = -2/3, c^3 = 1$  を得る。  $c = 1$  としてよいことがわかり  $\xi = x - x_0$  についての Puiseux 級数展開

$$y = \xi^{-2/3} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi^{j/(3p)}, \quad l \geq -2p + 1, \quad p \in \mathbf{N}$$

を再び (E) に代入して詳しく見てやる。すると  $p = 1$  としてよいことがわかり次の展開を得る。

**Proposition 1.1.**  $y(x)$  は (有限な値をとる) 代数的分岐点をもたない。  $x = x_0$  が  $y(x)$  の代数的極ならばそのまわりでは

$$y(x) = \xi^{-2/3} - \frac{9}{22} x_0 \xi^2 + c \xi^{8/3} + \frac{9}{14} \xi^3 + \sum_{j \geq 10} c_j \xi^{j/3}, \quad \xi = x - x_0$$

なる Puiseux 級数展開をもつ。ここで  $c$  は任意定数である。

この事実を使えば

**Corollary 1.2.** 方程式 (E) には有理型関数解は存在しない。

**Proof.** もしも有理型関数解  $u(x)$  が存在したとせよ。 Proposition 1.1 より極はもたないから  $u(x)$  は整関数である。もしも  $u(x)$  が多項式であるならば  $x = \infty$  の近くで

$$u(x) = C_0 x^m + O(x^{m-1}), \quad m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad C_0 \neq 0$$

とおいて (E) に代入すれば矛盾が導かれるので  $u(x)$  は超越整関数であり

$$\frac{10}{9} u(x)^4 = u''(x) - x$$

を満たす。よって Nevanlinna 理論の基本的な結果をつかえば測度有限な除外集合  $E$  があって

$$T(r, u) = m(r, u) \ll \log T(r, u) + \log r, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E$$

が成立し、したがって除外集合なしで  $T(r, u) \ll \log r$ , つまり  $u(x)$  は多項式となり矛盾である。  $\square$

さて, Proposition 1.1 で与えた級数の収束を言うためには Painlevé 方程式の場合にならって

$$y = u^{-2}, \quad y' = \mp \frac{2}{3}u^{-5} \left( 1 + \frac{9}{4}xu^8 + u^{10}v \right) + \frac{9}{2}u^6$$

とおき,  $y, y'$  のかわりに  $u, v$  の満たす連立系を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \pm 3u^2 \left( 1 + \frac{9}{4}xu^8 + u^{10}v \mp \frac{27}{4}u^{11} \right)^{-1}, \\ \frac{dv}{du} &= 3u^3 \left[ -\frac{5}{3}u^6v^2 + \frac{3}{4}u^4(-8x \pm 33u^3)v - \frac{81}{16}u^2(x \mp 3u^3)(x \mp 6u^3) \right] \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{9}{4}xu^8 + u^{10}v \mp \frac{27}{4}u^{11} \right)^{-1} \end{aligned}$$

となる. この連立系では  $u$  を独立変数としていることに注意する.  $u = 0$  において初期条件  $x = x_0, v = \tilde{c}$  をみたす解は一意的で

$$x - x_0 = \pm u^3 + \sum_{j \geq 4} C_j u^j, \quad v = \tilde{c} + \sum_{j \geq 1} C'_j u^j$$

と収束級数展開されるから Proposition 1.1 の級数の収束がいえる. 上で導入した未知関数  $v$  に関する式から

$$\begin{aligned} V &= (y')^2 - 9y^{-3}y' - \frac{4}{9}y^5 - 2xy \\ &= -\frac{81}{4}y^{-6} + \frac{9}{4}x^2y^{-3} + \left( \frac{8}{9} + 2xy^{-4} \right)v + \frac{4}{9}y^{-5}v^2 \end{aligned}$$

をえる. この式の左辺は Lyapunov 関数であり, 長さ有限な道に沿って  $y^{-1}$  が有界である限り  $V$  もまた有界であるという性質をもつ. この Lyapunov 関数と上で与えた連立系を使えば方程式 (E) の quasi-Painlevé property を証明することができる. つまり次の定理が成立する.

**Theorem 1.3.** 方程式 (E) の任意の解の動く特異点はすべて代数的極でありそれは Proposition 1.1 で与えたものにかぎる.

Corollary 1.2 とあわせると  $y(x)$  は必ず多価関数であることがわかるがその超越性はどうか. これについては次がいえる.

**Theorem 1.4.** 方程式 (E) の任意の解は超越多価関数である.

**Proof.** もしも  $y(x)$  が代数関数解であったとせよ. すると分岐点は有限個である. Proposition 1.1 より有限なところにある分岐点  $x = x_j$

のまわりでは  $e_j = 3$  個に分岐している. また  $x = \infty$  のまわりでは  $y(x) = (-9/10)^{1/4} x^{1/4} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{-j/4}$  という形式級数展開をもつことがわかるから,  $x = \infty$  のまわりでは  $e_{\infty} = 4$  個に分岐している. これらを Riemann-Hurwitz の公式

$$2(1-g) = 2n - \sum_{j \neq \infty} (e_j - 1) - (e_{\infty} - 1)$$

( $g$  は genus,  $n$  は次数) に代入してみれば矛盾していることがわかる. したがって (E) は代数関数解をもたない.  $\square$

## 2. 多価性および Abel 積分との関係

(E) の解  $y(x)$  の多価性についてももう少し具体的な情報を得るために Abel 積分について調べてみよう. 容易に確かめられるように Abel 積分

$$(2.1) \quad t - t_0 = \int_{w_0}^w \frac{ds}{\sqrt{s^5 + C}}$$

の逆関数  $Y = w(t)$  は方程式

$$(2.2) \quad Y_t^2 = Y^5 + C$$

および

$$(2.3) \quad Y_{tt} = \frac{5}{2} Y^4$$

( $Y_t = dY/dt$ ) をみたま.  $w(t)$  は次のような性質をもつ.

**Proposition 2.1.**  $C \neq 0$  であるならば  $w(t)$  は無限多価関数である.

**Proof.** 多項式  $s^5 + C$  の零点が正五角形の頂点に位置していることを使えば  $w(t)$  の周期  $\Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$  で

$$(\Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = (\zeta^{-1}, 1, \zeta, \zeta^2)A, \quad \zeta = \exp(2\pi i/5), \quad A \in \mathbb{C}$$

と表されるものが存在することがいえる. このとき 2 つの周期  $\Omega_0, \Omega_* = \Omega_1 + \Omega_{-1}$  の比  $\lambda = \Omega_*/\Omega_0 = 2 \cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/2$  は無理数であるから  $|q\lambda - p| < 1/q$  をみたす自然数  $p, q$  は無数に存在する. これはいくらでも小さな周期が存在することを示している. 一方  $w(t)$  が (2.2) をみたすことより  $w(t)$  の動く特異点は代数的極にかぎる. この 2 つの事実より  $w(t)$  の無限多価性が従う.  $\square$

方程式 (E) の解  $y(x)$  で初期条件  $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$  をみたすようなものを考える. いまパラメーター  $\varepsilon$  を導入し

$$y = \varepsilon^{-1}Y, \quad x = \varepsilon^{3/2}t$$

とおけば (E) は方程式

$$(2.4) \quad Y_{tt} = \frac{10}{9}Y^4 + \varepsilon^{11/2}t$$

に変換される. そして上の解  $y(x)$  は (2.4) の解  $Y_\varepsilon(t)$  で初期条件  $Y_\varepsilon(0) = \varepsilon y_0, (Y_\varepsilon)_t(0) = \varepsilon^{5/2}y_1$  をみたすようなものに変換される. 方程式 (2.4) で  $\varepsilon = 0$  とおいたもの

$$(2.5) \quad Y_{tt} = \frac{10}{9}Y^4$$

の解  $Y_0(t)$  で同じ初期条件  $Y_0(0) = \varepsilon y_0, (Y_0)_t(0) = \varepsilon^{5/2}y_1$  をみたすものを考えればこれは方程式

$$(2.6) \quad Y_t^2 = \frac{4}{9}Y^5 + C_\varepsilon, \quad C_\varepsilon = (y_1^2 - 4y_0^5/9)\varepsilon^5$$

をみたす. 方程式 (2.5), (2.6) は先に述べた Abel 積分の逆関数のみならず方程式 (2.3), (2.2) と本質的に一致する.  $\nu$  を任意にあたえられた自然数とする.  $C_\varepsilon \neq 0$  ならば Proposition 2.1 より  $Y_0(t)$  はある有限な領域で  $\nu$  個のことなる分枝に解析接続される. したがって  $\varepsilon > 0$  が十分小さければ (2.4) の解  $Y_\varepsilon(t)$  も同じ領域で  $\nu$  個の分枝をもつことがいえる. 以上の考察により次の多価性に関する結果をえる.

**Theorem 2.2.**  $\nu$  を任意の自然数とする. このとき方程式 (E) には少なくとも  $\nu$  個以上の解の two-parameter family が存在する.

### 3. quasi-Painlevé property をもつ方程式の族

いままで調べて来た方程式 (E) は

$$(E)_m) \quad y'' = \frac{2(2m+1)}{(2m-1)^2}y^{2m} + x, \quad m \in \mathbf{N}$$

の特別な場合である. そして  $(E)_1$  は Painlevé 方程式 (PI) である. 実は  $(E)_m$  ( $m \geq 2$ ) に対しても, その任意の解の動く特異点は  $2m-1$  個の代数的極に限ることがいえて, quasi-Painlevé property をもつことが

証明できる. さらに Theorem 1.4, Theorem 2.2 と同様な性質をもつことも証明される. また Painlevé 方程式 (PII) を含む方程式の族

$$(EII_m) \quad y'' = \frac{m+1}{m^2} y^{2m+1} + xy^m + \alpha, \quad m \in \mathbf{N},$$

さらに  $(EI_m)$  と  $(EII_m)$  との中間の性質をもつ方程式の族

$$(EI'_m) \quad y'' = \frac{(m+2)}{(m+1)^2} y^{2m+3} + x, \quad m \in \mathbf{N}$$

なども定義されるが, これらも quasi-Painlevé property をもち, さらに他の性質についても一部を除いて同様な結果が成り立つ.