数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 33-47

第4パンルヴェ方程式のモノドロミー可解な新しい解について

大阪大学・情報科学研究科　金子　和雄 (Kazuo Kaneko)
Graduate School of Information Science and Technology,
Osaka University

1 序

パンルヴェ方程式は, 今から約100年位前に発見された2階非線型常微分方程式であり、その発見は2種類の方法による。一つはフランスの数学者 Paul Painlevé(1863-1933) と弟子 Gambier によるもので、当時知られていた指数函数、対数函数、超幾何函数等の超越函数とは別の、新しい超越函数を見つけ出そうという動機から、動く分岐点を持たない, 2階の非線型常微分方程式を分類した [17],[8]。その結果, 求積可能なもの、線型方程式に帰着されるもの、楕円函数を解にもつものを除くと、表-1に示す6種類のいずれかに帰着されることを発見した。

もう一つはほぼ同時期 (1905年) に, ドイツの数学者 R.Fuchs が、パラメータ t を含む有理函数を係数にもつ2階線型常微分方程式のモノドロミーが t に依存しないための条件–モノドロミー保存変形–から第6パンルヴェ方程式 P_{VI} を発見した [5]。このモノドロミー保存変形理論は、現代におけるパンルヴェ方程式の研究において強力な道具の一つとなっている。
パンルヴェ方程式の解は、**パンルヴェ超越函数** と呼ばれている。これが本当に超越的か否かについては,1902年に Painlevé と R.Liouville による論争があったが、1980年代になって、西岡、梅村により、第1パンルヴェ方程式は真に超越的であることが示された [14],[20]。その他のパンルヴェ方程式についても、特殊解を除いて超越的であることが現在では分かっている。梅村によれば、パンルヴェ方程式の特殊解には、代数解と線型方程式に帰着される Riccati 解の2種類がある [19]。これらを **パンルヴェ方程式の古典解** という。例えば第4パンルヴェ方程式 P_{IV} に対し、梅村の意味での特殊解は完全に分類されているが、本論文では梅村の意味を超えた新しい特殊解を考察する。梅村の特殊解の場合、対応する線型方程式のモノドロミーは計算可能であるが、逆はそうではない。すなわち、モノドロミーが計算可能であるが、梅村の意味での古典解とは限らないパンルヴェ函数が存在する。本論文ではこの特殊解を **モノドロミー可解** と呼ぶ。
梅村の意味での古典解ではないが、よく知られているモノドロミー可解な解を最初に見つけたのは R.Fuchs(1910年) であり、いわゆる Picard の解に対応する線型方程式のモノドロミーを求めた [6]。この結果は Mazzocco により再発見されている [13]。もう一つは A.V.Kitaev が第1および第2パンルヴエ方程式 P_I,P_{II} について、対称解といわれる $y(0)=0, y'(0)=0$ という初期値を満たす解がモノドロミー可解なることを示した [12]。

本論文ではKitaevの方法を参考にして、第4パンルヴェ方程式P_{IV}に対し、モノドロミー可解な解を構成する。梅村の古典解は、パラメータの値が特殊な値の場合にのみ存在するが、本論文で考察する新しい解は、任意のパラメータに対して存在し、特殊な初期条件に対し、対応する線型方程式がWhittakerの方程式に帰着されることを示す。この解はパラメータが$(\alpha,\beta)=(0,-2/9)$の時の有理解$y=-2t/3$を含む。また、Riccati解の特殊な場合にもなっている。第5章にてこの新しい解と梅村の古典解との関係について述べる。

$$
\begin{aligned}
P_I : \frac{d^2y}{dx^2} &= 6y^2+t\\
P_{II} : \frac{d^2y}{dx^2} &= 2y^3+ty+\alpha\\
P_{III} : \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{t}(\alpha y^2+\beta)+\gamma y^3+\frac{\delta}{y}\\
P_{IV} : \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{3}{2}y^3+4ty^2+2(t^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y}\\
P_V : \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}+\frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma}{t}y+\delta\frac{y(y+1)}{y-1}\\
P_{VI} : \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)\frac{dy}{dx}\\
&\quad +\frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{t}{y^2}+\gamma\frac{t-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right]\\
&\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta : parameters.
\end{aligned}
$$

表 1.

2 A.V.Kitaevの仕事

A.V.Kitaevはモノドロミーがtに依存しないことに着目して、第1及び 第2パンルヴェ方程式P_I, P_{II}に対し、対称解と呼ばれる$t=0$にて$y=0, y'=0$となる解を Flaschka-Newellによるモノドロミー保存変形方程式に代入し、モノドロミーデータを計算した[12]。P_{II}に対する計算の概要を以下に示す。

モノドロミー保存変形方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x} &= A(x,t)Y(x,t) \qquad (2.1)\\
A(x,t) &= -i(4x^2+t+2y^2)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-(4xy-\frac{\alpha}{x})\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-2y'\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

に $t=0$ および $t=0$ にて $y=0, y'=0$ となる解

$$y = \frac{\alpha}{2}t^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{3k}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{20}, \quad a_2 = \frac{1+10\alpha^2}{1120}, \cdots \tag{2.2}$$

を代入して

$$\frac{\partial Y(x,0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -4ix^2 & \frac{-i\alpha}{x} \\ \frac{i\alpha}{x} & 4ix^2 \end{pmatrix} Y(x,0) \tag{2.3}$$

を得る。これより

$$Y(x,0) = \begin{pmatrix} z^{\frac{-1}{2}} W_{\frac{1}{2},\frac{\alpha}{3}}(z) & \frac{i\alpha}{3}(e^{-i\pi}z)^{\frac{-1}{2}} W_{\frac{-1}{2},\frac{\alpha}{3}}(e^{-i\pi}z) \\ \frac{-i\alpha}{3} z^{\frac{-1}{2}} W_{\frac{-1}{2},\frac{\alpha}{3}}(z) & (e^{-i\pi}z)^{\frac{-1}{2}} W_{\frac{1}{2},\frac{\alpha}{3}}(e^{-i\pi}z) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

ただし $z = \frac{8}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}x^3$, $W_{\pm\frac{1}{2},\frac{\alpha}{3}}$ は Whittaker 函数 (3.3 節参照)
を得る。

3 線型方程式を解く

3.1 モノドロミー保存変形方程式

第 4 パンルヴェ方程式 P_{IV} に対し、モノドロミー保存変形方程式系が次のように与えられている [11]。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(x,t)}{\partial x} &= A(x,t)Y(x,t) & (3.1) \\ A(x,t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t & u \\ \frac{2}{u}(z-\theta_0-\theta_\infty) & -t \end{pmatrix} + \frac{1}{x}\begin{pmatrix} -z+\theta_0 & \frac{-uy}{2} \\ \frac{2z}{uy}(z-2\theta_0) & z-\theta_0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} &= B(x,t)Y(x,t) & (3.2) \\ B(x,t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & u \\ \frac{2}{u}(z-\theta_0-\theta_\infty) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここに y, z, u は t の函数で θ_0, θ_∞ は定数である。
可積分条件より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -4z + y^2 + 2ty + 4\theta_0 \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{-2}{y}z^2 + (-y + \frac{4\theta_0}{y})z + (\theta_0+\theta_\infty)y \\ \frac{d\log u}{dt} &= -y - 2t \end{aligned} \tag{3.3}$$

を得る。zを消去して

$$P_{IV}: \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4ty^2 + 2(t^2-\alpha)y + \frac{\beta}{y} \tag{3.4}$$

$$\alpha = 2\theta_\infty - 1, \qquad \beta = -8\theta_0^2 \tag{3.5}$$

を得る。ここで

$$w = \frac{z}{y} \tag{3.6}$$

とおくと、

$$\frac{dy}{dt} = -4yw + y^2 + 2ty + 4\theta_0 \tag{3.7}$$

$$\frac{dw}{dt} = 2w^2 - 2yw - 2tw + (\theta_0 + \theta_\infty) \tag{3.8}$$

と表せる。上2式の右辺は

$$H_4 = -2yw^2 + y^2w + 2tyw + 4\theta_0 w - (\theta_0 + \theta_\infty)y \tag{3.9}$$

をハミルトニアンにもつハミルトン方程式になっていて、次のようにいえる。

第4パンルヴェ方程式P_{IV}は多項式ハミルトン系(3.7),(3.8)と同値である。

(3.7),(3.8)の右辺はともにy, w, tの多項式故Cauchyの解の存在定理により、$t=0$にて$y=0, w=0$（したがって$z=yw=0$）となる次のような正則解が局所的に存在する。

$$y = 4\theta_0 t \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k} \tag{3.10}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{-2\alpha}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{30}\{4\alpha^2 + 3(4\theta_0)^2 + 8\cdot 4\theta_0 + 4\}, \cdots$$

$$\alpha = 2\theta_\infty - 1$$

$$w=(\theta_0+\theta_\infty)t\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{2k} \tag{3.11}$$

$$b_0=1,\quad b_1=\frac{2}{3}(\theta_\infty-3\theta_0-1),\quad b_2=\frac{4}{15}\{(\theta_\infty-3\theta_0-1)^2+4\theta_0\alpha\},\cdots$$

したがってパンルヴェ性により、第4パンルヴェ方程式 P_{IV} の解として、全平面にて $t=0$ にて $y=0,w=0$ を満たす有理型な解が存在する。

3.2 線型方程式の変換

(3.1) にて $t=0,y=0,\frac{z}{y}=0,z=0$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+\frac{\theta_0}{x} & u\\ \frac{-2(\theta_0+\theta_\infty)}{u} & -x-\frac{\theta_0}{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

となり、$x^2=z,\quad y_i=z^{\frac{-1}{4}}v_i(i=1,2)$ と変数変換すると

$$\frac{d^2v_1}{dz^2}+\left[\frac{-1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right]v_1=0 \tag{3.13}$$

$$\frac{d^2v_2}{dz^2}+\left[\frac{-1}{4}+\frac{k+\frac{1}{2}}{z}+\frac{\frac{1}{4}-(m+\frac{1}{2})^2}{z^2}\right]v_2=0 \tag{3.14}$$

$$k=\frac{2\theta_\infty-1}{4},\qquad m=\frac{2\theta_0-1}{4} \tag{3.15}$$

を得る。これはWittakerの微分方程式である。よって次のようにいえる。

$t=0$ にて　$y=0,w=0$ を満たす第4パンルヴェ方程式 P_{IV} の解は、モノドロミー可解である。即ち、初期条件 $y(0)=0,w(0)=0$ を満たす (3.7),(3.8) の解に対し (3.1) はWhittakerの微分方程式に帰着され、モノドロミーデータは完全に決定できる。。

3.3 Whittaker 函数

Whittaker 函数について、以下の計算に必要な事項をここにまとめておく。

Wittakerの微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left[\frac{-1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right]v=0$$

は

(1) 確定特異点 $z=0$ の近傍で2つの基本解 $M_{k,m}(z), M_{k,-m}(z)$ をもち、それぞれ次のように収束べき級数にて表される。

$$\begin{aligned} M_{k,m}(z) &= z^{m+\frac{1}{2}}e^{\frac{-z}{2}}{}_1F_1(m-k+\frac{1}{2},2m+1;z) \\ &= z^{m+\frac{1}{2}}e^{\frac{-z}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2m+1)\Gamma(m-k+\frac{1}{2}+n)z^n}{\Gamma(2m+1+n)\Gamma(m-k+\frac{1}{2})n!} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} M_{k,-m}(z) &= z^{-m+\frac{1}{2}}e^{\frac{-z}{2}}{}_1F_1(-m-k+\frac{1}{2},-2m+1;z) \\ &= z^{-m+\frac{1}{2}}e^{\frac{-z}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-2m+1)\Gamma(-m-k+\frac{1}{2}+n)z^n}{\Gamma(-2m+1+n)\Gamma(-m-k+\frac{1}{2})n!} \end{aligned} \tag{3.17}$$

(2) Poincaré rank 1位の不確定特異点 $z=\infty$ の近傍で2つの基本解: $W_{k,m}(z)$, $W_{-k,m}(ze^{-i\pi})$ をもち、それぞれ次のように、形式的べき級数 (発散級数) に漸近展開される。

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &\sim e^{\frac{-z}{2}}z^k\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m^2-(k-\frac{1}{2})^2)\cdots(m^2-(k-n+\frac{1}{2})^2)}{n!z^n}\right] \\ &\left(-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} W_{-k,m}(ze^{-i\pi}) &\sim e^{-ik\pi}e^{\frac{z}{2}}z^{-k}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m^2-(k+\frac{1}{2})^2)\cdots(m^2-(k+n-\frac{1}{2})^2)}{n!(ze^{-i\pi})^n}\right] \\ &\left(\frac{-\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

(3) $(M_{k,m}(z), M_{k,-m}(z))$ と $(W_{k,m}(z), W_{-k,m}(ze^{i\pi}))$ の間には、次の関係式 (接続公式) が存在する。

$$\begin{aligned} &(W_{k,m}(z), W_{-k,m}(ze^{-i\pi})) \\ &= (M_{k,m}(z), M_{k,-m}(z))\begin{pmatrix} \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} & \frac{\Gamma(-2m)e^{-i\pi(\frac{1}{2}+m)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)} \\ \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} & \frac{\Gamma(2m)e^{-i\pi(\frac{1}{2}-m)}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.20}$$

(4)Stokes領域 S_j と S_j における正則解 $(y_j^{(1)}, y_j^{(2)})$:
$z=\infty$ がPoincaré rank 1の不確定特異点であり、Stokes領域を

$$S_0=\{z=\infty; 0\le\arg z\le\pi\}\ ,\ S_1=\{z=\infty;\pi\le\arg z\le 2\pi\}$$

$$S_2 = \{z = \infty; 2\pi \le \arg z \le 3\pi\}$$

各 S_j における (3.13) の正則解を $(y_j^{(1)}, y_j^{(2)})$ とすると

$$y_j^{(1)} \sim e^{\frac{-z}{2}} z^k, \qquad y_j^{(2)} \sim e^{-ik\pi} e^{\frac{z}{2}} z^{-k} \tag{3.21}$$

であり Stokes 行列 G_j は

$$(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) = (y_{j-1}^{(1)}, y_{j-1}^{(2)}) G_j \tag{3.22}$$

で定義される。

(5) J.Heading は、Whittaker 函数について Stokes 行列を次のように計算している [9]。

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2i\pi e^{2ik\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2i\pi e^{-4ik\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

3.4 連立微分方程式系 (3.1) のモノドロミーデータ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Y(x,t) &= A(x,t) Y(x,t) \\ A(x,t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t & u \\ \frac{2(z-\theta_0-\theta_\infty)}{u} & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z+\theta_0 & \frac{-uy}{2} \\ \frac{2z(z-2\theta_0)}{uy} & z-\theta_0 \end{pmatrix} \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{3.24}$$

にて $x = 0$ は確定特異点であり、$x = \infty$ は Poincaré rank 2 の不確定特異点である。一般にこのタイプのモノドロミーデータは、$M_0, \Gamma, G_i (i = 1,2,3,4), e^{2i\pi T_0}$ で表される。

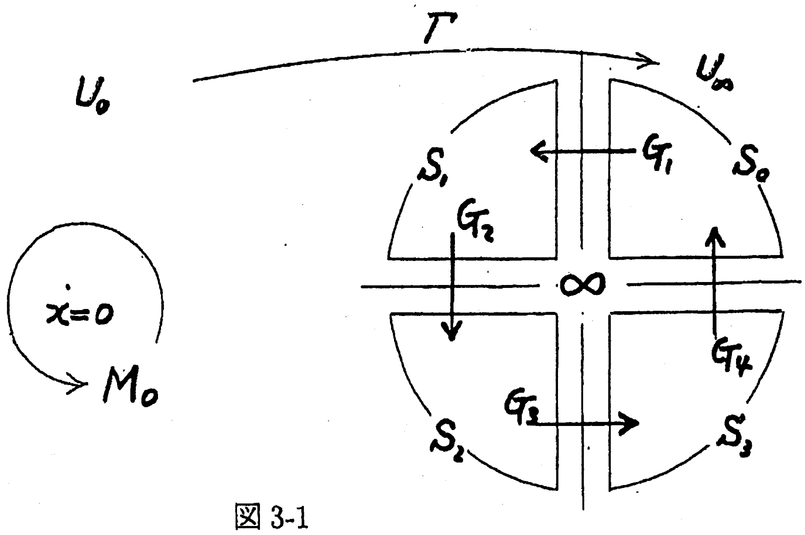

図 3-1

ここで

$M_0 : x = 0$ のまわりのモノドロミー行列

Γ : $x = \infty$ の近傍における基本解 $(u_\infty^{(1)}, u_\infty^{(2)})$ と $x = 0$ の近傍における基本解 $(u_0^{(1)}, u_0^{(2)})$ との接続行列

$G_i (i = 1, 2, 3, 4) : x = \infty$ における Stokes 行列

$e^{2i\pi T_0} : x = \infty$ まわりの形式的モノドロミー行列

を表し,

$$\Gamma^{-1} M_0 \Gamma G_1 G_2 G_3 G_4 e^{-2i\pi T_0} = I_2 \tag{3.25}$$

が成り立つ。一般には接続行列 Γ および Stokes 行列 G_i が計算できないが、(3.1) が Whittaker の微分方程式に帰着されることにより、モノドロミーデータが計算可能となる。次の定理を得る。

[定理] 第 4 パンルヴェ方程式 P_{IV} の解で、初期条件 $y(0) = 0, w(0) = 0$ を満たす解については、対応する線型方程式のモノドロミーデータが次のように計算される。

$$\begin{aligned}
M_0 &= \begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta_0} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi(1-\theta_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{4mi\pi} & 0 \\ 0 & -e^{-4mi\pi} \end{pmatrix} \\
\Gamma &= \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} & \dfrac{\Gamma(-2m) e^{-i\pi(\frac{\theta_0+\theta_\infty}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)} \\ \dfrac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} & \dfrac{\Gamma(2m) e^{-i\pi(\frac{1-\theta_0+\theta_\infty}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)} \end{pmatrix} \\
G_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2\pi e^{i\pi(\frac{-1}{2}+2k)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} & 1 \end{pmatrix} \\
G_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2\pi e^{i\pi(\frac{-1}{2}-4k)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
G_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2\pi e^{i\pi(\frac{-1}{2}+6k)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} & 1 \end{pmatrix} \\
G_4 &= \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2\pi e^{i\pi(\frac{-1}{2}-8k)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
e^{2i\pi T_0} &= \begin{pmatrix} e^{2i\pi(\theta_\infty-1)} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi\theta_\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{4ki\pi} & 0 \\ 0 & -e^{-4ki\pi} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

確かに

$$\Gamma^{-1}M_0\Gamma G_1G_2G_3G_4e^{-2i\pi T_0}=I_2$$

が成り立つ。次の系を得る。

[系] パラメータを　$\alpha=2\theta_\infty-1=\alpha_0-\alpha_2,\quad 2\theta_0=-\alpha_1,(\beta=-8\theta_0^2=-2\alpha_1^2)$ とおくと

1)$\alpha_0=0$ のとき　$m+k=\frac{-1}{2}$ となり　$G_2=G_4=I_2$
2)$\alpha_2=0$ のとき　$m-k=\frac{-1}{2}$ となり　$G_1=G_3=I_2$
3)$\alpha_0=0,\alpha_2=0$ のとき　$G_1=G_2=G_3=G_4=I_2$
4) 上記以外では基本 Weyl chamber の境界 $\alpha_1=0$ 上及び内部で $G_i\neq I_2$ である。

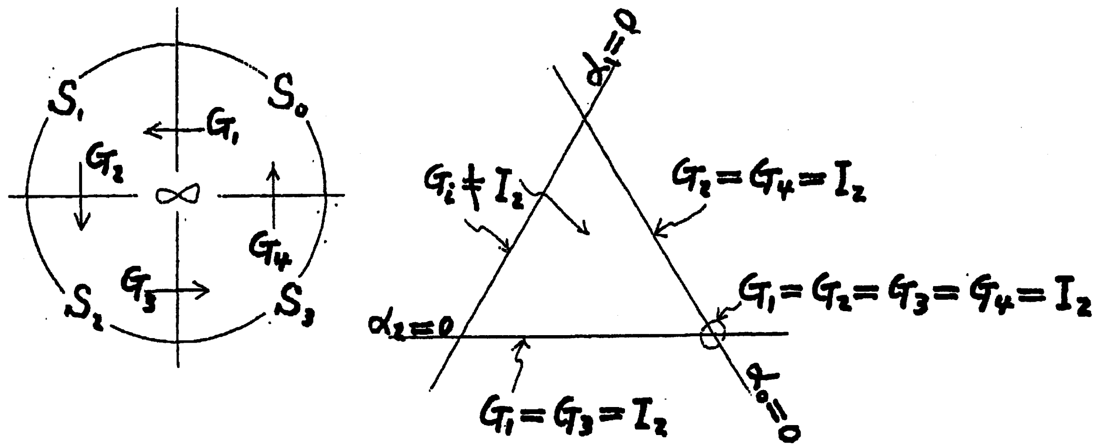

図 3-2

Weyl chamber の 1 つの頂点にて、Stokes 行列がすべて単位行列となり、この頂点に交わる 2 つの境界上では、4 つの Stokes 行列のうち 2 つが 1 つおきに単位行列になる。(図 3-2 参照)

Stokes 行列 G_i が単位行列になるのは、形式的べき級数 (発散級数) が収束する場合であり、このとき基本解の並べ方を適当にとると接続行列 Γ も右上三角行列となる。

4　ベックルント変換

4.1　第 4 パンルヴェ方程式　P_{IV} に対するハミルトン系

ハミルトニアン H_{IV} は、

$$H_{IV} = (p - q - 2t)pq - 2\alpha_1 p - 2\alpha_2 q \tag{4.1}$$

で与えられ、ハミルトン方程式：

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_{IV}}{\partial p} = 2pq - q^2 - 2tq - 2\alpha_1 \tag{4.2}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_{IV}}{\partial q} = 2pq - p^2 + 2tp + 2\alpha_2 \tag{4.3}$$

からpを消去し、　$y = q$ とおくと、

$$P_{IV}: \qquad y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y} \tag{4.4}$$

ここで、

$$' = \frac{d}{dt}, \quad \alpha = \alpha_0 - \alpha_2, \quad \beta = -2\alpha_1^2, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \tag{4.5}$$

を得る。
ここで、$y, z, w = \frac{z}{y}$　をq, pで表すと、

$$y = q \tag{4.6}$$

$$z = \frac{q^2}{2} + tq - \frac{pq}{2} \tag{4.7}$$

$$w = \frac{q}{2} + t - \frac{p}{2} = \frac{-f}{2} \tag{4.8}$$

ただし、

$$f = p - q - 2t \tag{4.9}$$

となる。 変換

$$(y, w, t, H_4) \longrightarrow (q, p, t, H_{IV}) \tag{4.10}$$

は 正準変換であり、

$$dw \wedge dy - dH_4 \wedge dt = \frac{-1}{2}(dp \wedge dq - dH_{IV} \wedge dt) \tag{4.11}$$

が成り立つ。
(3.7),(3.8) にて $y(0) = 0, w(0) = 0$ という初期条件は、$q(0) = 0, p(0) = 0$, したがって、$f(0) = 0$ に対応する。次のようにいえる。

初期条件　$q(0) = 0, p(0) = 0$　を満たす (4.2), (4.3) の解は、モノドロミー可解である。

4.2 第4パンルヴェ方程式 P_{IV} に対するベックルント変換

P_{IV} に対するベックルント変換として、
$A_2^{(1)}$ 型アフィンワイル群 : $W(A_2^{(1)})$, 回転 : π, 平行移動 : $T_i, (i=1,2,3)$
が知られている（図 4-1 参照）

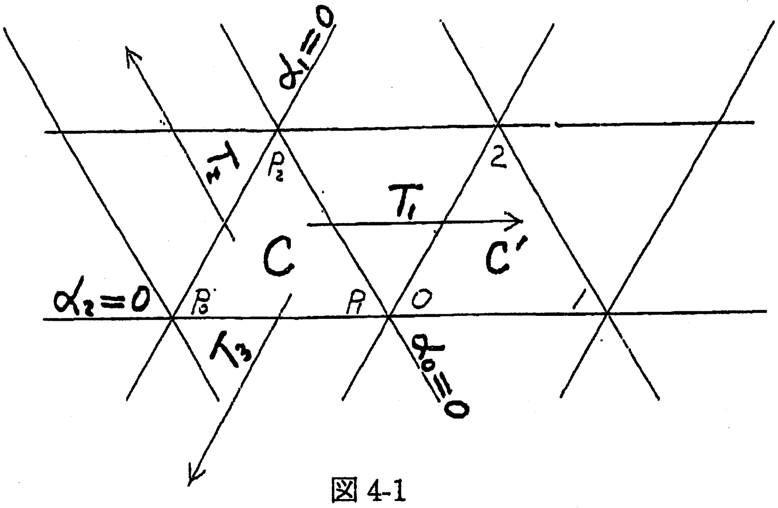

図 4-1

アフィンワイル群 $W(A_2^{(1)})$ は、$< s_0, s_1, s_2 >$ で表され $s_i, (i = 0,1,2)$ は、直線 $\alpha_i = 0$ に対する鏡映を表す。回転 π は、直線 $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ で囲まれる Weyl chamber C の重心の周りの 120 度回転を、平行移動 T_1, T_2, T_3 は、図 4-1 の p_0p_1, p_1p_2, p_2p_0 方向への正三角形の一辺の長さだけの平行移動を表し、

$$S_j^2 = 1, \qquad (S_jS_{j+1})^3 = 1, \qquad \pi^3 = 1 \tag{4.12}$$

$$T_1 = \pi S_2 S_1, \qquad T_2 = S_1 \pi S_2, \qquad T_3 = \pi S_1 S_0, \qquad T_1T_2T_3 = 1 \tag{4.13}$$

等の関係式が成り立つ。

4.3 $s_i(i = 0,1,2), \pi$ 変換

α_i, q, p, f, t にたいする s_i, π の作用は表 4-1 に示す通りである。

	α_0	α_1	α_2	q	p	f	t
s_0	$-\alpha_0$	$\alpha_1+\alpha_0$	$\alpha_2+\alpha_0$	$q+\frac{2\alpha_0}{f}$	$p+\frac{2\alpha_0}{f}$	f	t
s_1	$\alpha_0+\alpha_1$	$-\alpha_1$	$\alpha_2+\alpha_1$	q	$p-\frac{2\alpha_1}{f}$	$f-\frac{2\alpha_1}{f}$	t
s_2	$\alpha_0+\alpha_2$	$\alpha_1+\alpha_2$	$-\alpha_2$	$q+\frac{2\alpha_2}{f}$	p	$f-\frac{2\alpha_2}{f}$	t
π	α_1	α_2	α_0	$-p$	$-f$	q	t

表 4-1

表 4-1 より、変換 $s_i(i=0,1,2)$ は初期条件 $q(0)=0, p(0)=0$ を保たず、変換 π のみが保つことがわかる。

4.4 $T_i(i=1,2,3)$ 変換

	q	p
T_1	$-p-\frac{2\alpha_0}{p-q-2t}$	$-(p-q-2t)+\frac{2(\alpha_2+\alpha_0)}{p+\frac{2\alpha_0}{p-q-2t}}$
T_2	$-(p-\frac{2\alpha_1}{q})-\frac{2(\alpha_0+\alpha_1)}{p-q-2t-\frac{2\alpha_1}{q}}$	$-(p-q-2t)+\frac{2\alpha_1}{q}$
T_3	$-p+\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{q+\frac{2\alpha_2}{p}}$	$-(p-q-2t)+\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{q+\frac{2\alpha_2}{p}}+\frac{2\alpha_2}{p}$

表 4-2

$q(=y), p$ に対する変換 $T_i(i=1,2,3)$ の作用は表 4-2 に示す通りである。初期条件 $q(0)=0, p(0)=0$ は、変換 T_i で保たれぬことがわかる。　次のようにいえる。

P_{IV} に対し $y(0)=0, w(0)=0(q(0)=0, p(0)=0)$ という初期条件は、π でのみ保たれ s_i, T_i では保たれない。

4.5 変換 π の作用

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\frac{\theta_0}{x} & u \\ \frac{-2(\theta_0+\theta_\infty)}{u} & -x-\frac{\theta_0}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

に π を作用させると、

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\frac{\theta_0'}{x} & u \\ \frac{-2(\theta_0'+\theta_\infty')}{u} & -x-\frac{\theta_0'}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

ここで

$$\theta_0' = \pi(\theta_0) = \frac{\theta_\infty - \theta_0 - 1}{2} \tag{4.16}$$

$$\theta_\infty' = \pi(\theta_\infty) = \frac{1 - 3\theta_0 - \theta_\infty}{2} \tag{4.17}$$

となり

$$\pi(m) = \frac{2\theta_0' - 1}{4} = \frac{2k - 2m - 3}{4} \tag{4.18}$$

$$\pi(k) = \frac{2\theta_\infty' - 1}{4} = \frac{-1}{2}(k + 3m + 1) \tag{4.19}$$

を得る。
更にモノドロミーデータも $\pi(\theta_0), \pi(\theta_\infty), \pi(m), \pi(k)$ で表される形で求まる。

5 梅村の古典解との比較

P_{IV} に対する梅村の古典解として、次の 2 種類が知られている。
a) 代数解が Weyl chamber の頂点と、中心に存在する。

b)Riccati 解が Weyl chamber の境界線上に存在する。

第 3 章で求めた我々の解は、任意のパラメータに対して存在し、梅村の古典解のうち 代数解を含み、Riccati 解の 1 部にもなっていることを示す。

5.1 代数解

1) パラメータが Weyl chamber の頂点 $\alpha_0 = 0, \alpha_2 = 0$(図 5-1 参照) にあるとき、

$\alpha_1 = 1$ であり、$\alpha_2 = 0$ より (4.3) から $p = 0$ が特殊解となり、(4.2) より,Riccati の微分方程式

$$\frac{dq}{dt} = -q^2 - 2tq - 2$$

を得、

$$q = -2t$$

を有理解として持つ。

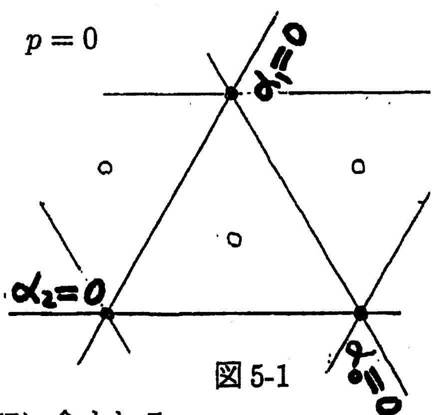

図 5-1

この解は、$q(0) = 0, p(0) = 0$ を満たし、我々の解に含まれる。
他の頂点に対しては、ベックルント変換 (π 変換) して得られる。

2) パラメータが Weyl chamber の中心 $(\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3})$ にあるとき (4.4) にて、$(\alpha, \beta) = (0, \frac{-2}{9})$ となり、$y = \frac{-2t}{3}$ が有理解となる。
このとき、(3.7) より

$$w = \frac{t}{3}$$

となる。　この解は　$y(0) = 0; w(0) = 0$ を満たし、我々の解に含まれる。

5.2 Riccati 解

Weyl chamber の 1 つの境界として、$\alpha_2 = 0$　をとると、
$p = 0$ が特殊解となり、Riccati の微分方程式

$$\frac{dq}{dt} = -q^2 - 2tq - 2\alpha_1$$

を得る。この解は、$q(0) = 0, p(0) = 0$ なる解の 1 点を含む。

他の境界線上に対しては、ベックルント変換 (π 変換) して得られる。
次のようにいえる。

任意のパラメータ (α, β) を含み, $y(0) = 0, w(0) = 0$　を初期条件とする第 4 パンルヴェ方程式 P_{IV} の解は、梅村の意味での代数解を含み,Riccati 解の 1 点を含む。

6 まとめ

1) 第 4 パンルヴェ方程式 P_{IV} の解として、初期条件　$y(0) = 0, w(0) = 0, (q(0) = 0, p(0) = 0)$ を満たす全平面にて有理型な解が存在する。

2) P_{IV} に対する梅村の古典解として、代数解と Riccati 解があり、それぞれに対してモノドロミーデータが計算可能であるが、これらはいずれもパラメータ (α, β) が特殊な値をとる場合に限られている。これに対し本論文で扱った新しい解は、$y(0) = 0, w(0) = 0$ と初期値は固定しているが、任意のパラメータ (α, β) を含み、対応する線型方程式のモノドロミーデータが計算可能である。

パラメータが、Weyl chamber の中心、もしくは頂点にあるときには代数解を含み、Weyl chamber の境界線上にあるときには、Riccati 解の 1 点になっている。この意味において本論文で扱った新しい解は、梅村の意味での古典解を超える新しい特殊解である。

3) $y(0) = 0, w(0) = 0 (q(0) = 0, p(0) = 0)$ という初期条件は、P_{IV} に対するベックルント変換のうち、鏡映 $s_i (i = 0, 1, 2)$, 平行移動 $T_j (j = 1, 2, 3)$ では保たれず、回転 π でのみ保たれる。

4) P_{IV} のパラメータ $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ が Weyl chamber の境界線上にあるとき、4 つの Stokes 行列　G_1, G_2, G_3, G_4　のうち、2 つが 1 つおきに単位行列になり、パラメータが Weyl chamber の頂点にあるときは、4 つの Stokes 行列すべてが単位行列となる。Stokes 行列 G_i が単位行列になるのは、形式的べき級数 (発散級数) が収束することを意味する。

参考文献

[1] 犬井 鉄郎, 特殊函数, 岩波全書,(1967).

[2] 岡本 和夫, パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究禄, No **19**, (1985).

[3] 高野 恭一, 常微分方程式, 朝倉書店, (1994).

[4] 野海　正俊, パンルヴェ方程式入門, 朝倉書店,(2000).

[5] R.Fuchs, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. Math.Ann. **63**, (1907), 301-321.

[6] R.Fuchs, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. Math.Ann. **70**, (1911), 525-549.

[7] H.Flaschka and A.C.Newell,Monodrmy-and spectrum preserving deformations.I. Com.Math.Phys. **76**,(1980),65-116.

[8] B.Gambier, Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiqes fixés,Acta Math. **33**,(1909),1-55.

[9] J.Heading, The Stokes phenomenon and Whittaker function,J.London Math.Soc. **37**,(1962),195-208.

[10] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura and M.Yoshida, From Gauss to Painievé, A modern theory of special functions,Braunschweig,Vieweg, (1991).

[11] M.Jimbo and T.Miwa, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients.II,Physica, $\boldsymbol{2D}$,(1981),407-448.

[12] A.V.Kitaev, Symmetric solutions for the first and second Painlevé equations, J.Math.Sci. **73**, No4, (1995), 494-499.

[13] M.Mazzocco,Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation, Math. Ann. **321**,(2001),157-195.

[14] K.Nishioka, A note on the trascendency of Painlevé's first transcendent,Nagoya Math.J. **109**,(1988),63-67.

[15] K.Okamoto, Studies on the Painlevé equations,III,Second and fourth Painlevé equations,P_{II} and P_{IV},Math.Ann. **275**,(1986),221-255.

[16] K.Okamoto, Isomonodromic deformation and Painlevé equations and the Garnier system.J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sect.1A,Math. **33**,(1986),575-618.

[17] P.Painlevé, Sur les Équations Différentielles du Second Ordre et d'Ordre Supérieur, dont L'Intégrale est Uniforme,Acta Math. **25**,(1902),1-86.

[18] E.Picard, Mémoire sur la Théorie des Functions Algébriques de deux Variables,Journal de Liouville **5**,(1889),135-319.

[19] H.Umemura, Birational automorphism groups and differential equations, Nagoya Math.J. **119**,(1980),1-80.

[20] H.Umemura, Birational automorphism groups and differential equations. Equations differentielles dans le champ complex, Vol.$\boldsymbol{II}$,(Strasbourg,1985),119-227, Publ.Inst.Rech.Math.Av.,Univ.Louis Pasteur,Strasbourg.