

## 連立非分散方程式の双対系

富山大・工 角畠浩 (Hiroshi Kakuhata)\*

日大・理工 紺野公明 (Kimiaki Konno)\*\*

Toyama Univ.\*, Nihon Univ.\*\*

### 1 はじめに

連立非分散方程式

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y, \end{aligned} \tag{1}$$

は外部磁場と相互作用する内部電流を持つストリングの運動を記述する可積分方程式である。ここで  $(X, Y, Z)$  はストリングの位置ベクトルの成分,  $\tau$  は時間,  $\sigma$  はストリングに沿うパラメータである [1]。この連立方程式 (1) は 3 次元空間中を  $Z$ -軸方向に進み,  $Z$ -軸のまわりに回転する soliton 解

$$X = A \cos \theta \operatorname{sech} \eta, \quad Y = A \sin \theta \operatorname{sech} \eta, \quad Z = Z_0 + \sigma - A \tanh \eta \tag{2}$$

を持つ [2]。振幅と位相は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}(1 + v), \\ \eta &= \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}(\sigma - v\tau) + \delta, \\ \theta &= \Omega(\tau - v\sigma) + \theta_0 \end{aligned}$$

この解は 3 次元空間中を  $Z$ -軸方向に進み,  $Z$ -軸のまわりに回転する soliton を表し, (1+1)次元の場の理論であっても解の振る舞いが 3 次元的である。

今回は, この系を双対変換して新しい可積分系を導出する。双対変換は phase space での  $\frac{\pi}{4}$  回転で, 線形格子の振動の解析 [3] や, Toda 格子の soliton 解の導出などで重要な役割を果たした [4]。

## 2 連立非分散方程式の双対変換

連立非分散方程式は Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \\ \mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2}[(\partial_\tau X)^2 + (\partial_\tau Y)^2 + (\partial_\tau Z)^2 - (\partial_\sigma X)^2 - (\partial_\sigma Y)^2 - (\partial_\sigma Z)^2], \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)(\partial_\tau + \partial_\sigma)Z.\end{aligned}$$

から導出できる。双対変換を行うため、この Lagrangian を円筒座標、

$$X = R \cos \theta, Y = R \sin \theta, Z = Z$$

を用いて、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2}[(\partial_\tau R)^2 - (\partial_\sigma R)^2 + R^2\{(\partial_\tau \theta)^2 - (\partial_\sigma \theta)^2\} + (\partial_\tau Z)^2 - (\partial_\sigma Z)^2], \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{1}{2}R^2(\partial_\tau + \partial_\sigma)Z.\end{aligned}$$

と書き直す。これから、正準運動量は

$$\pi_Z = \partial_\tau Z - \frac{1}{2}R^2, \quad \pi_\theta = R^2 \partial_\tau \theta, \quad \pi_R = \partial_\tau R$$

で与えられ、Legendre 変換により Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R^2}\pi_\theta^2 + R^2(\partial_\sigma \theta)^2 + (\pi_Z + \frac{1}{2}R^2)^2 + (\partial_\sigma Z)^2 + \pi_R^2 + (\partial_\sigma R)^2 + R^2 \partial_\sigma Z\right]$$

で与えられる。 $\theta$  に対する双対変換 (phase space の  $\frac{\pi}{4}$  回転) は

$$\Pi = \partial_\sigma \theta, \quad \Theta = -\int_\sigma^\infty d\sigma' \pi_\theta \quad (3)$$

で与えられる。すなわち、この双対変換は「角度座標」と「角運動量」を入れ替えるものである。

これらの正準変数の間の Poisson bracket は

$$\{\pi(\sigma), \theta(\sigma')\} = \{\Pi(\sigma), \Theta(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma')$$

となって、双対変換が正準変換であることを示している。変換された Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[R^2 \Pi^2 + \frac{1}{R^2}(\partial_\sigma \Theta)^2 + (\pi_Z + \frac{1}{2}R^2)^2 + (\partial_\sigma Z)^2 + \pi_R^2 + (\partial_\sigma R)^2 + R^2 \partial_\sigma Z\right]$$

になる。逆 Legendre 変換により、連立非分散方程式の双対系の Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^d &= \mathcal{L}_{\text{free}}^d + \mathcal{L}_{\text{int}}^d, \\ \mathcal{L}_{\text{free}}^d &= \frac{1}{2}[(\partial_\tau R)^2 - (\partial_\sigma R)^2 + \frac{1}{R^2}\{(\partial_\tau \Theta)^2 - (\partial_\sigma \Theta)^2\} + (\partial_\tau Z)^2 - (\partial_\sigma Z)^2], \\ \mathcal{L}_{\text{int}}^d &= -\frac{1}{2}R^2(\partial_\tau + \partial_\sigma)Z.\end{aligned}$$

を得る。これから、運動方程式は

$$\begin{aligned}\partial_\tau(\partial_\tau Z - \frac{1}{2}R^2) - \partial_\sigma(\partial_\sigma Z + \frac{1}{2}R^2) &= 0, \\ \partial_\tau^2 R - \partial_\sigma^2 R + \frac{1}{R^3}[(\partial_\tau \Theta)^2 - (\partial_\sigma \Theta)^2] + R(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z) &= 0, \\ \partial_\tau \left(\frac{\partial_\tau \Theta}{R^2}\right) - \partial_\sigma \left(\frac{\partial_\sigma \Theta}{R^2}\right) &= 0\end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。

### 3 双対変換と one-soliton 解

一般化座標での双対変換 (3)

$$\partial_\sigma \Theta = R^2 \partial_\tau \theta, \quad \partial_\tau \Theta = R^2 \partial_\sigma \theta \quad (5)$$

は (1) の角度  $\theta$  に対する方程式  $\partial_\tau(R^2 \partial_\tau \theta) - \partial_\sigma(R^2 \partial_\sigma \theta) = 0$  と (4) の対応する 3 番目の方程式  $\partial_\tau(\frac{\partial_\tau \Theta}{R^2}) - \partial_\sigma(\frac{\partial_\sigma \Theta}{R^2}) = 0$  の間の Bäcklund 変換になっている。

従って, (1) の one-soliton 解

$$R = A \operatorname{sech} \eta, \quad \theta = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta_0, \quad Z = Z_0 + \sigma - A \tanh \eta$$

から双対系 (4) の one-soliton 解

$$R = A \operatorname{sech} \eta, \quad \Theta = 4\Omega A(1+v) \tanh \eta, \quad Z = Z_0 + \sigma - A \tanh \eta$$

を容易に求めることができる。元の系では  $\theta$  は soliton の形をしていないが, 変換された系では  $\Theta$  は kink 型の soliton の形をしている。

双対系の物理的意味, 特に,  $\Theta$  の意味は不明であるが,  $\Theta$  も  $\theta$  と同様に  $Z$ -軸のまわりの角度変数

$$X = R \cos \Theta, \quad Y = R \sin \Theta, \quad Z = Z$$

と考える。この解の  $v = 0.12$  の場合の形状を図-1 に与える。図中で上が双対系で, 下が対応する元の系の soliton 解である。

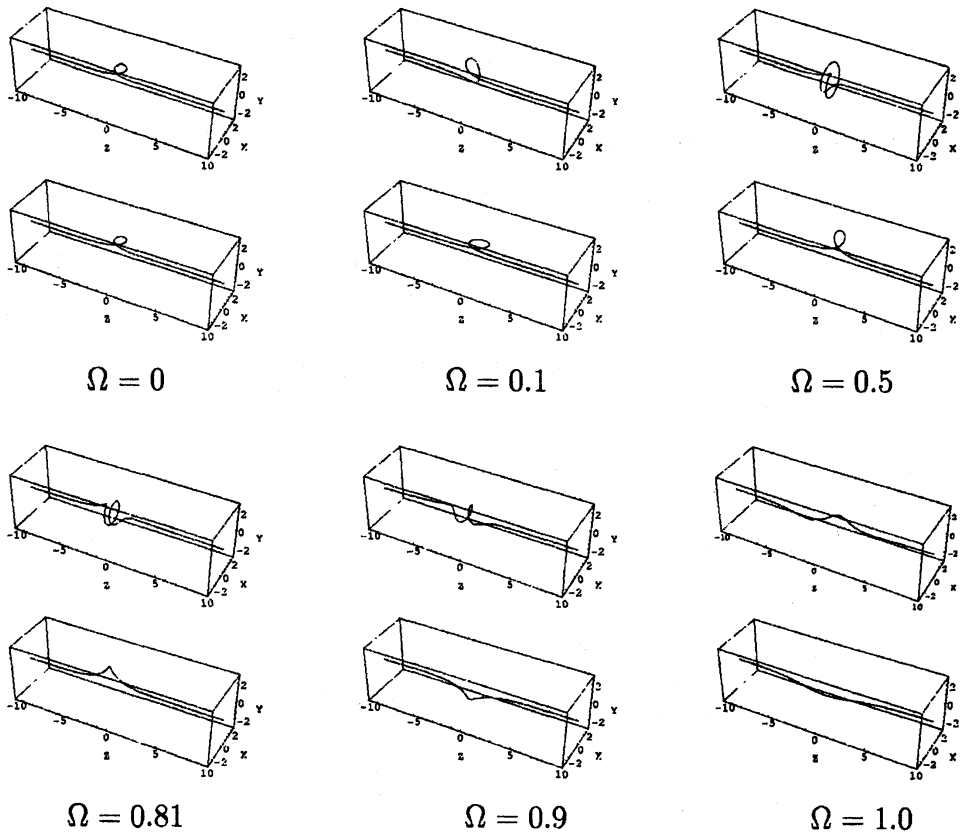


図-1. one-soliton 解

$\Omega = 0$  の場合は loop 形状をしており、元の系の soliton 解と同一である。しかし、 $\Omega \neq 0$  ではもはや loop は形成されず、 $z$ -軸に巻き付くような soliton になるが、 $z$ -軸に沿って前後に行きつ戻りつする loop の性質を残している。しかし、 $\Omega > 0.81$  になると行きつ戻りつすることはなくなる。このとき対応する元の soliton 解は loop ではなくなる。これは以下のような事情による。元の loop soliton の  $Z$  は  $\sigma$  でプロットすると  $N$  字形

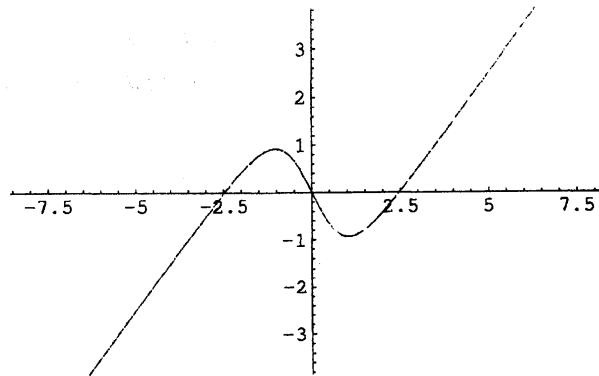


図-2.  $Z$ - $\sigma$

をしている。soliton 解

$$Z = Z_0 + \sigma - A \tanh \eta, \quad (6)$$

の極大極小を調べるため、導関数を計算すると

$$\partial_\sigma Z = 1 - \frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v} \operatorname{sech}^2 \eta$$

となるから  $\partial_\sigma Z \geq 0$  を満足するとき、 $Z$  は単調増加になる。従って、 $\Omega$  が臨界値  $\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{2(1-v)}}$  を越えると、図-3 のように non-loop soliton になる。

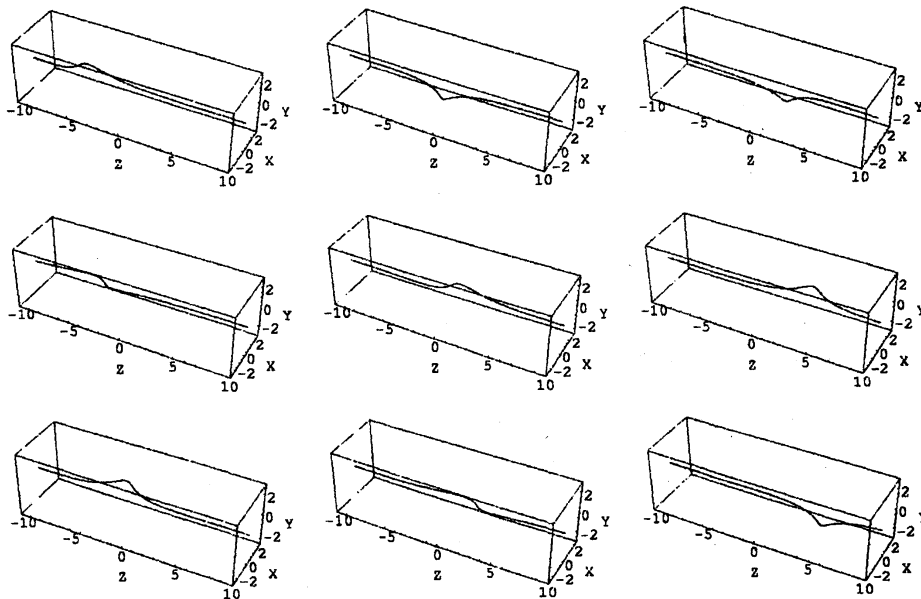


図-3. Non-loop soliton propagation for eq. (1)

すなわち、連立非分散方程式の解は loop soliton 解 と non-loop soliton 解があり、non-loop は歪みながら伝播する bell 形状の soliton である。

#### 4 双対変換の Bilinear form

一般化座標での双対変換 (5) は two-soliton 解を求めるのには不便である。そこで双対変換の bilinear form を求めることにする。元の連立比分散方程式 (1) は従属変数の変換

$$\begin{aligned} X + iY &= \frac{Q}{F}, \\ X - iY &= \frac{\bar{Q}}{F}, \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \log F \end{aligned}$$

により bilinear equations.

$$\begin{aligned} (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot \bar{Q} &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}|Q|^2 &= 0 \end{aligned}$$

になる。ここで  $D_s$  は bilinear operator

$$D_\tau^m a \cdot b = (\partial_\tau - \partial_{\tau'})^m a(\tau) b(\tau')|_{\tau'=\tau}$$

である。

ここで双対系の従属変数変換

$$\Theta = \frac{S}{F}$$

により、双対変換 (5) の bilinear Equations

$$\begin{aligned} D_\sigma S \cdot F &= \frac{1}{2i} D_\tau Q \cdot \bar{Q} \\ D_\tau S \cdot F &= \frac{1}{2i} D_\sigma Q \cdot \bar{Q} \end{aligned}$$

を得る。元の系の two-soliton 解

$$\begin{aligned} Q &= e_1^\eta + e_2^\eta + c_1 e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1 + \eta_2} + c_2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \bar{\eta}_2} \\ F &= 1 + b_1 e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1} + \bar{b}_{12} e^{\bar{\eta}_1 + \eta_2} + b_{12} e^{\eta_1 + \bar{\eta}_2} + b_2 e^{\eta_2 + \bar{\eta}_2} + d_{12} e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1 + \eta_2 + \bar{\eta}_2} \end{aligned}$$

から、 $S$  について摂動展開

$$S = s_2 + s_4 + s_6 + \dots$$

を行い, two-soliton 解

$$S = 2i[(\omega_1 - k_1)^2 - (\bar{\omega}_1 - \bar{k}_1)^2]b_1e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1} + 2i[(\omega_2 - k_2)^2 - (\bar{\omega}_1 - \bar{k}_1)^2]\bar{b}_{12}e^{\bar{\eta}_1 + \eta_2} \\ + 2i[(\omega_1 - k_1)^2 - (\bar{\omega}_2 - \bar{k}_2)^2]b_{12}e^{\eta_1 + \bar{\eta}_2} + 2i[(\omega_2 - k_2)^2 - (\bar{\omega}_2 - \bar{k}_2)^2]b_2e^{\eta_2 + \bar{\eta}_2} \\ + 2i[(\omega_1 - k_1)^2 - (\bar{\omega}_1 - \bar{k}_1)^2 + (\omega_2 - k_2)^2 - (\bar{\omega}_2 - \bar{k}_2)^2]d_{12}e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1 + \eta_2 + \bar{\eta}_2}$$

を得ることができる。ここで係数は

$$b_n = \frac{1}{4(\bar{\omega}_n + \omega_n - \bar{k}_n - k_n)^2} \quad (n = 1, 2), \quad b_{12} = \frac{1}{4(\omega_1 + \bar{\omega}_2 - k_1 - \bar{k}_2)^2}, \\ c_1 = 4(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)^2 b_1 \bar{b}_{12}, \quad c_2 = 4(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)^2 b_2 b_{12}, \\ d_{12} = 16|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^4 b_1 b_2 |b_{12}|^2,$$

位相は  $\eta_n = k_n \sigma + \omega_n \tau + \delta_n + i\theta_n$ , ( $n = 1, 2$ ) 分散関係は  $\omega_n^2 - k_n^2 = -1$ , ( $n = 1, 2$ ) で与えられる。

図-4 に3つの two-soliton 相互作用の様子を示す。ここに与えた two-soliton 相互作用は同じ速さ  $v=0.12$  で逆向きに進行し, 互いに逆向きに回転する soliton の正面衝突である。

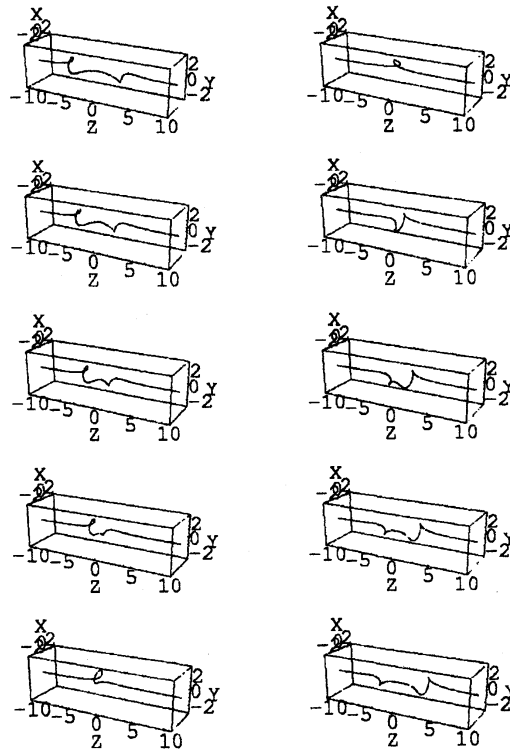


図-4-a.  $v_1 = 0.12, \Omega = 0.81, v_2 = -0.12, \Omega = -0.81$

右向き of soliton はすべて (1) の臨界値  $\Omega_{cr}$  以上の non-loop の場合のものに対応する。図-4-a では互いに同じ大きさの角速度  $\Omega = \pm 0.81$  で衝突し, 一時的に loop が形成される。図-4-b, c は non-loop soliton と loop soliton の相互作用に対応している。三者いずれの場合もやや大きめの角速度で衝突しているため, 変化が速く詳細なことはよくわからない。しかし, いずれの場合にも一時的に loop もしくは loop 様のものが形成されるようである。

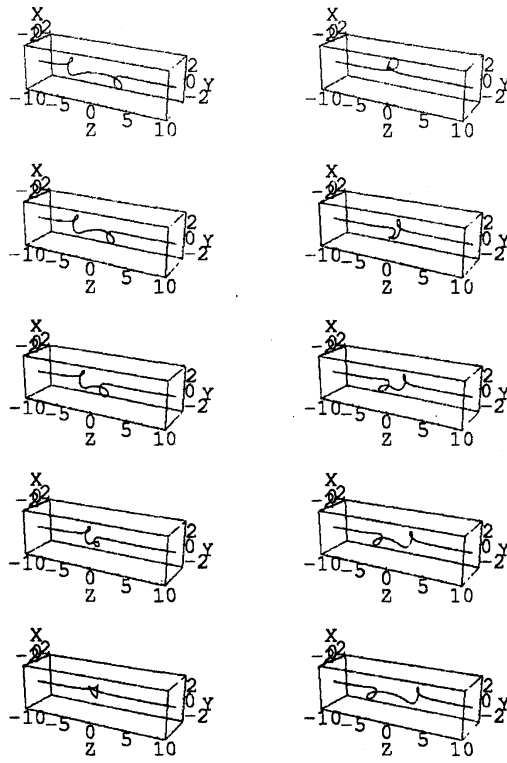


图-4-b.  $v_1 = 0.12, \Omega = 0.81, v_2 = -0.12, \Omega = -0.4$

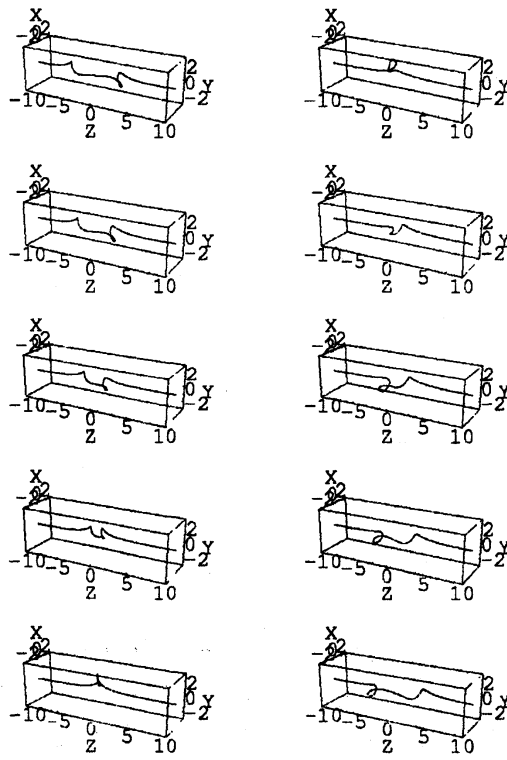


图-4-c.  $v_1 = 0.12, \Omega = 0.9, v_2 = -0.12, \Omega = -0.4$

## 5 まとめ

双対変換 (3) により, 連立非分散方程式 (1) の双対系 (4) を求めた。一般化座標でみた双対変換 (5) が部分的な Bäcklund 変換になっていることを利用して, (1) の one-soliton 解および two-soliton 解から双対系 (4) の one-soliton 解と two-soliton 解を導出した。双対変換は正準変換であるから, 二つの系は力学的に等価であるが, soliton 解の様子は大きく異なる。 $\Omega = 0$  の時こそ loop soliton であるが, 角速度  $\Omega = 0$  以外では loop にならず,  $\Omega$  が大きくなるに従ってその loop 的性質を失っていく。 $\Omega > \frac{1}{\sqrt{2(1-v)}}$  では kink 状のものになる。このとき元の連立非分散方程式の soliton 解は loop にはならない。two-soliton 相互作用については 3 つの場合を示した。図-4 に示した two-soliton 相互作用は大きめの角速度に対するもので, 相互作用は複雑になり, 詳細はこれからの課題である。

双対変換により連立非分散方程式を「角度」のかわりに「角運動量」で見ていることになるため, 今回の試みは連立非分散方程式の two-soliton 相互作用の詳細を理解する助けになりうる。一方, phase space においては座標と運動量が同等な独立変数の役割を果たしているので, 双対系 (4) そのものから出発する立場もあり得る。双対系に対応する物理系が実際に存在するかは不明ではあるが, 「角運動量」が座標になっている系が存在する可能性はある。後者の立場についても探っていきたい。

## 参考文献

- [1] H. Kakuata and K. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [2] H. Kakuata and K. Konno, Theor. Math. Phys. **133** (2002) 1673.
- [3] M. Toda, J. Phys. Soc. Jpn. **20** (1965) 2095; Prog. Theor. Phys. Suppl. **36** (1966) 113.
- [4] M. Toda, J. Phys. Soc. Jpn. **22** (1967) 431, **23** (1967) 501.