数理解析研究所講究録 1368 巻 2004 年 80-87

独立変数が係数に陽に現れる非線形可積分方程式について

富山県大・工　　戸田 晃一（Kouichi TODA）*
Faculty of Engineering,
Toyama Prefectural University

概要

本小論では, Lax 対の空間次元拡張法を利用し, generalized KdV 方程式を, Lax 可積分性を保持したまま, $(1+1)$ 次元から (2+1) 次元に高次元化する. そして, generalized KdV 方程式の modified 方程式, 及びそれらの高次元方程式についても述べる. また, ホドグラフ変換を用いた generalized HD 方程式の導出についても報告する.

1 緒言

可積分（性）とはどういうことか？ 古典的な定義では求積法によって解けるとき「可積分」であるという. しかし一般に,「可積分」の定義は対象とする問題によっても異なり, 一般的な定義は（少なくとも現段階では）無いようである. 例えば, ソリトン方程式の場合は逆散乱法（またはそれに類する手法）により解析的に厳密解を得ることができる時は「可積分」といわれる. そこで「可積分」の性質についてまとめることから, この小論は書き始めたい.

もともと「可積分（性）」とは有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった. すなわち, Liouville-Arnold の定理が成り立つ系, すなわち**初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解ける**のが**可積分系**である. それではソリトン方程式に代表される無限自由度系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる. 無限自由度系において, 一般には（少なくとも可積分系の研究者の間では）以下の共通する性質；

1. 線形化可能
2. 逆散乱法によって初期値問題が解ける
3. Lax 対の存在　**（Lax 可積分）**
4. Painlevé 性[1]　**（Painlevé 可積分）**
5. N ソリトン解や Bäcklund 変換の存在

などの**良い性質**を (最低 1 つでも) 持っている系のことであると考えられているようである [1]. 無限自由度の可積分系の典型的なソリトン方程式の場合には, 例えば, 浅水波を記述する Korteweg-de Vries（KdV）方程式[2]：

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

---

*kouichi@yukawa.kyoto-u.ac.jp

[1] 常微分方程式の級数解のもつ「初期値に伴って動く特異点は高々極のみ」という性質

[2] 空間変数を x, 時間変数を t とする $(1+1)$ 次元偏微分方程式であり, 代表的なソリトン方程式の一つである.

は上記の**共通する性質**が全て満たされていることが知られているが，これはむしろ例外である．ほとんどの無限自由度の可積分系はこれらの性質の内で数個しか満たさない場合がほとんどである．これらの性質が厳密な意味で等価であるかどうかは全く証明されていない．つまり無限自由度系における可積分という性質の厳密な定義はなく，上記の状況証拠を一つでも多く確認することで系の可積分性を主張しているに過ぎないのである[3]．

このように定義がはっきりしないまま，非線形可積分系の研究は過去30年にわたってさまざまな観点から研究されてきた．しかし，我々の住んでいる世界が $(3+1)$ 次元であるにも関わらず，現在までに知られている非線形可積分系の多くは，KdV 方程式 (1) や非線形 Schrödinger 方程式のような $(1+1)$ 次元方程式である．高次元可積分系はほとんど知られていない．理由の一つには低次元可積分系を単純に高次元にしてもその「可積分性」は保たれない事が挙げられる．よって，低次元非線形偏微分方程式の可積分性を残すような次元拡張法（高次元化法）の構築は，数理物理学において重要な研究課題の一つである．

これまで筆者は低次元非線形偏微分方程式の可積分性を残すような次元拡張法の構築 と 未知の高次元の非線形可積分方程式の探求を行ってきた [3, 4, 5]．そして，新しく導出された高次元非線形可積分方程式の厳密解を構成し，その数理的構造や性質の解明を進めてきた [4]．系が高次元に拡張される際に可積分性が保持されるための条件を探求している．用いる手法は Lax 対の空間次元拡張による高次元化である．この方法は Lax 可積分性を保存した高次元化が可能である．

最近は現実の物理現象でよく現れる係数に独立変数が陽に現れる非線形偏微分方程式の高次元化に興味がある．本小論では係数に独立変数が陽に現れる可積分な非線形偏微分方程式：

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{g'(t)}{g(t)}u - \frac{xg'(t)}{2g(t)}u_x = 0 \tag{2}$$

を主な対象とする．これは KdV 方程式 (1) に独立変数 t の関数 $g(t)$ に関する項が加わった可積分方程式である [6]．例えば，$g(t)=1$ とすると，方程式 (2) は KdV 方程式 (1) となる．また，$g(t)=\dfrac{1}{t}$ かつ変数変換 $u = q - \dfrac{x}{3t}$ の場合には，よく知られている円筒 KdV 方程式：

$$q_t + \frac{3}{2}qq_x + \frac{1}{4}q_{xxx} + \frac{1}{2t}q = 0 \tag{3}$$

が得られる．故に，方程式 (2) は generalized KdV(gKdV) 方程式と呼ばれている．

本小論の構成は次の通りである．第2節で KdV 方程式 (1) を例にして，Lax 対の空間次元拡張による高次元化を紹介する．第3節では，$(1+1)$ 次元 gKdV 方程式 (2) の Lax 対を導出し，Lax 対の空間次元拡張法を用いて，$(2+1)$ 次元 gKdV 方程式を導く．第4節では，gKdV 方程式 (2) の modified 方程式とその高次元方程式の導出を行なう．第5節では，ホドグラフ変換によって関係付けられる generalized Harry-Dym 方程式を構成し，その高次元方程式の導出を行なう．最後に第6節で本小論のまとめを行う．

2 Lax 対の空間次元拡張法による高次元化

この節では，Lax 対の空間次元拡張法について，KdV 方程式 (1) を例にして説明する．

[3] 無限自由度系における可積分性の定義を模索する研究の進展を期待したい [2]．

2.1 Lax 対の構成法（Lax pair Generating Technique）

まずは $(1+1)$ 次元可積分方程式の代表格である KdV 方程式 (1) を例にとり, 可積分方程式に付随する Lax 対の構成法（**Lax pair Generating Technique**）を紹介する.

λ をスペクトル パラメータとして, Lax 対を,

$$L = \partial_x^2 + u - \lambda \equiv L_{\mathrm{KdV}} - \lambda, \tag{4}$$
$$T = \partial_x L_{\mathrm{KdV}} + T' + \partial_t, \tag{5}$$

とおく. ここで, $\partial_x L_{\mathrm{KdV}} = \partial_x^3 + u\partial_x + u_x$ である. 作用素 T' は両立条件（**Lax 方程式**）:

$$[L, T] = 0, \tag{6}$$

を満たすように後で決められる未定作用素であり, $u, u_x, \cdots$ やそれらの積や商などの多項式で与えられる. いま作用素 T' の形を

$$T' = P\partial_x + Q, \tag{7}$$

と予想する[4] と, Lax 方程式 (6) から

$$P = \frac{1}{2}u, \quad Q = -\frac{1}{4}u_x, \tag{8}$$

と未定項が決まる[5]. このとき, KdV 方程式 (1) と その Lax 対 (4), (5) の具体的な表式が与えられる. ただし, $\dfrac{d\lambda}{dt} = 0$ とする[6].

2.2 高次元化

高次元化と言っても, ただやみくもに x 以外の新しい空間座標を導入しただけでは, 元の系がもっていた可積分性は消失する. それではどうすればよいのか $\cdots$. ここで紹介する高次元化法は, **高次元可積分方程式系を得るという問題を, 低次元可積分方程式に付随する Lax 対をいかに高次元化すれば良いかという問題**に帰着している. ここでも KdV 方程式 (1) の Lax 対 (4), (5) を具体例にとって, 可積分性を**保持したまま**空間高次元化できる方法を具体的に紹介する [5].

KdV 方程式 (1) に付随する Lax 対の作用素 T(5) を

$$L = L_{\mathrm{KdV}} - \lambda, \tag{9}$$
$$T = \partial_z L_{\mathrm{KdV}} + T' + \partial_t, \tag{10}$$

のように次元拡張する. ここで, z は新しく導入した空間座標であり, また $\partial_z L_{\mathrm{KdV}} = \partial_x^2\partial_z + u\partial_z + u_z$ である. このとき Lax 方程式 (6) より,

$$T' = \left(\frac{1}{2}\partial_x^{-1}u_z\right)\partial_x - \frac{1}{4}u_z, \tag{11}$$

及び 高次元 KdV 方程式:

$$u_t + uu_z + \frac{1}{2}u_x\partial_x^{-1}u_z + \frac{1}{4}u_{xxz} = 0 \tag{12}$$

---

4 ここでより高階の微分作用素を仮定すると, KdV 階層が得られる.
5 正確には積分定数が P, Q のそれぞれに付く. しかし, それらは適当なスケール変換で消すことができるので省略した.
6 これを iso-spectral 問題という.

が得られる．ただし，ここでは $\frac{d\lambda}{dt} \neq 0$ となる[7]．これは Calogero-Bogoyavlensky-Shiff(CBS) 方程式と呼ばれる高次元可積分方程式であり，V 字型のソリトン波解をもつことが広く知られている [3]．もちろん $z = x$ とすれば，KdV 方程式 (1) に次元還元される．

このように Lax 対が存在すれば，その形を変形することにより，Lax 可積分性を保持した新しい高次元可積分方程式が導出できるということになる．最近この方法が素粒子理論で活発に議論されている非可換空間においても有効であることが報告されている [7]．

3 高次元 generalized KdV 方程式

本節では，$(1+1)$ 次元 gKdV 方程式 (2) と その Lax 対を構成し，Lax 対の空間次元拡張法を用いて，高次元 gKdV 方程式を導出する．

3.1 $(1+1)$ 次元 generalized KdV 方程式の Lax 対

$(1+1)$ 次元 gKdV 方程式 (2) の Lax 対を

$$L = \frac{1}{g(t)}(\partial_x^2 + u) - \lambda \equiv \frac{1}{g(t)} L_{\mathrm{GKdV}} - \lambda, \tag{13}$$

$$T = \partial_x L_{\mathrm{GKdV}} + T' + \partial_t, \tag{14}$$

と考える．ただし，λ は $\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0$ を満たす．このとき Lax 方程式 (6) より，作用素 T'：

$$T' = \frac{1}{2}\left(u - \frac{xg'(t)}{g(t)}\right)\partial_x - \frac{1}{4}\left(u_x - \frac{g'(t)}{g(t)}\right) \tag{15}$$

と，$(1+1)$ 次元 gKdV 方程式 (2) を導出できる．

3.2 $(2+1)$ 次元 generalized KdV 方程式

gKdV 方程式 (2) の高次元化について述べる．Lax 対の作用素 T(14) を

$$L = \frac{1}{g(t)}(\partial_x^2 + u) - \lambda \equiv \frac{1}{g(t)} L_{\mathrm{GKdV}} - \lambda, \tag{16}$$

$$T = \partial_z L_{\mathrm{GKdV}} + T' + \partial_t, \tag{17}$$

のように次元拡張する．Lax 方程式 (6) より，

$$T' = \frac{1}{2}\left(\partial_x^{-1} u_z - \frac{xg'(t)}{g(t)}\right)\partial_x - \frac{1}{4}\left(u_z - \frac{g'(t)}{g(t)}\right), \tag{18}$$

及び $(2+1)$ 次元 gKdV 方程式

$$u_t + uu_z + \frac{1}{2}u_x\partial_x^{-1}u_z + \frac{1}{4}u_{xxz} - \frac{g'(t)}{g(t)}u - \frac{xg'(t)}{2g(t)}u_x = 0 \tag{19}$$

が得られる．このとき $\frac{\partial\lambda}{\partial t} \neq 0$ である．この方程式を generalized Calogero-Bogoyavlensky-Schiff(gCBS) 方程式 (12) と呼ぶことにする．$z = x$ とすれば，方程式 (19) は gKdV 方程式 (2) に次元還元される．

[7] これを non iso-spectral 問題という [8]．

4 modified方程式の導出

4.1 $(1+1)$次元 generalized mKdV方程式

gKdV方程式 (2) の modified方程式を導出する. Lax対を

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{g(t)}(\partial_x^2 + v\partial_x) - \lambda = \frac{1}{g(t)}L_{\mathrm{GmKdV}} - \lambda, && (20)\\
T &= \partial_x L_{\mathrm{GmKdV}} + T' + \partial_t, && (21)
\end{aligned}
$$

とする. ただし, $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$を満たす. この作用素 $L(20)$ は, gKdV方程式 (2) の作用素 $L(13)$ にゲージ変換をおこなうことによって得られる. Lax方程式 (6) に代入すると, 作用素 T' が

$$
T' = \frac{1}{2}v\partial_x^2 + \left(\frac{3}{8}v^2 - \frac{1}{4}v_x - \frac{xg'(t)}{2g(t)}\right)\partial_x \tag{22}
$$

と定まり, generalized modified KdV(gmKdV) 方程式 [10]：

$$
v_t - \frac{3}{8}v^2 v_x + \frac{1}{4}v_{xxx} - \frac{g'(t)}{2g(t)}v - \frac{xg'(t)}{2g(t)}v_x = 0, \tag{23}
$$

が導出できる. 方程式 (23) は modified KdV方程式：

$$
v_t - \frac{3}{8}v^2 v_x + \frac{1}{4}v_{xxx} = 0, \tag{24}
$$

に独立変数 t の関数 $g(t)$ に関する項が加わった可積分な方程式である. gKdV方程式 (2) と gmKdV方程式 (23) の間の Miura変換は

$$
u = -\frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2}v_x \tag{25}
$$

によって与えられる.

4.2 $(2+1)$次元 generalized mKdV方程式

$(1+1)$次元 gmKdV方程式 (23) の Lax対 (20), (21) を

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{g(t)}(\partial_x^2 + v\partial_x) - \lambda = \frac{1}{g(t)}L_{\mathrm{GmKdV}} - \lambda, && (26)\\
T &= \partial_z L_{\mathrm{GmKdV}} + T' + \partial_t, && (27)
\end{aligned}
$$

のように高次元化する. ただし, $\frac{\partial \lambda}{\partial t} \neq 0$を満たす. このとき Lax方程式 (6) より, 作用素 T' が

$$
T' = \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}v_z)\partial_x^2 + \left(\frac{1}{2}v\partial_x^{-1}v_z - \frac{1}{8}\partial_x^{-1}(v^2)_z - \frac{1}{4}v_z - \frac{xg'(t)}{2g(t)}\right)\partial_x \tag{28}
$$

と定まり, そして $(2+1)$次元 gmKdV方程式：

$$
v_t - \frac{1}{4}v^2 v_z - \frac{1}{8}\partial_x^{-1}(v^2)_z + \frac{1}{4}v_{xxz} - \frac{g'(t)}{2g(t)}v - \frac{xg'(t)}{2g(t)}v_x = 0, \tag{29}
$$

が導出できる. $(2+1)$次元 gKdV方程式 (19) と $(2+1)$次元 gmKdV方程式 (29) とは, Miura変換 (25) で結ばれている.

5 generalized Harry-Dym 方程式

5.1 ホドグラフ変換

本節では, ホドグラフ変換 [11] による考察を紹介する. 結果として gmKdV 方程式 (23) と ホドグラフ変換で関係付けられるような gHD 方程式を導出する. まず, 微分作用素を

$$\frac{1}{\sqrt{g(t)}}\partial_X = \frac{1}{\sqrt{g(t)}}u\partial_x \tag{30}$$

と変換する. これをホドグラフ変換と呼ぶ. そしてこれを 2 回連続作用させると,

$$\frac{1}{g(t)}\partial_X^2 = \frac{1}{g(t)}(u^2\partial_x^2 + uu_x\partial_x) = \frac{1}{g(t)}u^2\partial_x^2 + \frac{1}{\sqrt{g(t)}}u_x\partial_X \tag{31}$$

となる. $\sqrt{g(t)}u_x = -v$ とおいて, 整理すると

$$\frac{1}{g(t)}(\partial_X^2 + v\partial_X) = \frac{1}{g(t)}u^2\partial_x^2 \tag{32}$$

を得る. 左辺は gmKdV 方程式 (23) の作用素 $L(20)$, 右辺が generalized HD(gHD) 方程式の作用素 L であると考えることができる.

5.2 (1 + 1) 次元 generalized Harry-Dym 方程式

先程導いた Lax 対の作用素 L を用いて, 可積分な方程式を構成する. gHD 方程式の Lax 対は,

$$L = \frac{1}{g(t)}u^2\partial_x^2 - \lambda \equiv \frac{1}{g(t)}L_{\mathrm{GHD}} - \lambda, \tag{33}$$

$$T = u\partial_x L_{\mathrm{GHD}} + T' + \partial_t, \tag{34}$$

である. これは iso-spectral 問題である. Lax 方程式 (6) から, 作用素 T' が

$$T' = -\frac{1}{2}u^2u_x\partial_x^2 \tag{35}$$

と定まり, (1 + 1) 次元 gHD 方程式：

$$u_t + \frac{1}{4}u^3u_{xxx} - \frac{g'(t)}{2g(t)}u = 0 \tag{36}$$

が導出できる. これまでと同様に Harry-Dym 方程式 [11]：

$$u_t + \frac{1}{4}u^3u_{xxx} = 0 \tag{37}$$

に関数 $g(t)$ に依存する項が加わった形になっている.

5.3 (2 + 1) 次元 generalized Harry-Dym 方程式

それでは Non-isospectral Lax 対を

$$L = \frac{1}{g(t)}u^2\partial_x^2 - \lambda \equiv \frac{1}{g(t)}L_{\mathrm{GHD}} - \lambda, \tag{38}$$

$$T = u\partial_z L_{\mathrm{GHD}} + T' + \partial_t, \tag{39}$$

のように高次元化する．このとき，Lax 方程式 (6) から，作用素 T' は

$$T' = u^3\left(1+\partial_x^{-1}(u_z/u^2)\right)\partial_x^3+(u^2-u^3)\partial_x^2\partial_z+\left(\frac{3}{2}u^2u_x-2u^2u_z+\frac{3}{2}uu_z+\frac{3}{2}u^2u_x\partial_x^{-1}(u_z/u^2)\right)\partial_x^2 \quad (40)$$

と定まり，(2 + 1) 次元 gHD 方程式：

$$u_t+\frac{1}{4}u^3u_{xxx}-\frac{1}{4}uu_xu_{xz}+\frac{1}{4}uu_{xx}u_z+\frac{1}{4}u^2u_{xxz}+\frac{1}{4}u^3u_{xxx}\partial_x^{-1}(u_z/u^2)-\frac{g'(t)}{2g(t)}u=0 \quad (41)$$

が導出できる．$z = x$ とおけば，式 (41) は式 (36) にリダクションされる．

（補足）別の高次元化について

これまでは，Lax 対の作用素 T を高次元化することで，高次元可積分方程式を導出してきた．他方，Lax 対の作用素 L を高次元化することも可能である [4]．例えば，gKdV 方程式 (2) では，Lax 対を

$$L=\frac{1}{g(t)}L_{\mathrm{GKdV}}+\partial_y, \quad (42)$$

$$T=\partial_xL_{\mathrm{GKdV}}+T'+\partial_t, \quad (43)$$

のように高次元化する．作用素 L に別の空間変数 y を導入する．generalized Kadomtsev-Petviashvili(gKP) 方程式：

$$u_t+\frac{3}{2}uu_x+\frac{1}{4}u_{xxx}-\frac{g'(t)}{g(t)}u-\frac{xg'(t)}{2g(t)}u_x+\frac{3}{4}g(t)^2\partial_x^{-1}u_{yy}=0, \quad (44)$$

や gmKP 方程式：

$$v_t-\frac{3}{8}v^2v_x+\frac{1}{4}v_{xxx}-\frac{g'(t)}{2g(t)}v-\frac{xg'(t)}{2g(t)}v_x+\frac{3}{4}g(t)^2\partial_x^{-1}v_{yy}-\frac{3}{4}g(t)v_x\partial_x^{-1}v_y=0 \quad (45)$$

が導出される．方程式 (44) と 方程式 (45) を結ぶ Miura 変換は $u=-\frac{1}{4}v^2-\frac{1}{2}v_x-\frac{1}{2}g(t)\partial_x^{-1}v_y$ である．更に，高次元 gHD 方程式も導出できる [9]．

6 結言

筆者は**可積分性を保持したまま**低次元から高次元に拡張される際の「**世襲される性質**」と「**消滅する性質**」，及び「**新しく生まれる性質**」を探求することを研究の目的の一つにしている．この小論では筆者が共同研究者との最近の研究結果の一端を報告した．

本小論では，gKdV 方程式系の Lax 対を紹介し，その Lax 対を空間次元拡張することにより，新しい高次元方程式を導出した．gKdV 方程式 (2) の $g(t)$ を適当なものに置き換えれば，円筒方程式などいろいろな可積分方程式が導出できる．本小論では，gKdV 方程式に付随する Lax 対を構成し，Lax 対を高次元化することで高次元 gKdV 方程式を導出した．そして，それと Miura 変換により関係付けられるような gmKdV 方程式とその Lax 対を構成し，その高次元化も議論した．最後に，gmKdV 方程式の Lax 対をホドグラフ変換することによって，gHD 方程式に付随する Lax 対を構成し，その高次元方程式も導出した．我々が導出してきた方程式は，Lax 可積分な方程式である．紙数の制限上詳しく報告できないが，これらの方程式は Painlevé 判定法 [12] もパスしており，Painlevé 可積分であることを附記しておく [9]．

ところで，最近筆者は共同研究者と，Painlevé 判定法をパスするような**独立変数が係数に陽に現れる**高次元 Burgers 方程式 及び 高次元 KdV 方程式の導出に成功している [13]．これらはまた別の機会に報告したい．

謝辞

筆者に本研究集会で発表する機会を与えて下さいました世話人の吉永隆夫先生（大阪大・基礎工）に御礼を申し上げます. 小林 匡氏（京大・情報, 院生）との共同研究は大変有意義なものでした. 小林氏に深く感謝します. 本研究を進めるにあたり有益な助言や参考文献を紹介して下さった土田 隆之氏（東大・数理）に感謝します.

最後に本研究は平成１３年度笹川科学研究助成（**13-089K**），平成１４年度富山県大若手教員奨励研究 及び 科研費（**若手 B: 15740242**）の補助により進められたものであることを附記します.

参考文献

[1] 「可積分系」がもつ共通した性質については, 例えば, 以下の文献が参考になる：

- V. E. Zakharov（編）, *What Is Integrability ?*, Springer-Verlag, 1990,
- 和達 三樹,「非線形波動」(岩波講座現代の物理学１４), 岩波書店, 1992,
- 大貫 義郎・吉田 春夫,「力学」(岩波講座現代の物理学１), 岩波書店, 1994.

[2] 本研究集会において, 関連する話題が阿部剛久先生 (芝浦工大 システム工) によって行われた.

[3] S.-J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama, *J. Phys.* A **31**, 3337 (1998).

[4] S.-J. Yu, K. Toda and T. Fukuyama, *J. Phys.* A **31**, 10181 (1998); K. Toda and S.-J. Yu and T. Fukuyama, *Reps. Maths. Phys.* **44**, 247 (1999); S-J Yu, K. Toda and T. Fukuyama, *Theor. and Math. Phys.* **122(No. 2)**, 256 (2000).

[5] S-J Yu and K. Toda, *J. Nonlinear Maths. Phys.* **7**, 1 (2000); K. Toda and S.-J. Yu, *J. Maths. Phys.* **41**, 4747 (2000); K. Toda and S.-J. Yu, *Reps. Maths. Phys.* **48**, 255 (2001); K. Toda and S.-J. Yu, *Inverse Problems* **17**, 1053 (2001); K. Toda and S.-J. Yu, *J. Nonlinear Maths. Phys.* **9**, 207 (2002).

[6] T. Chou, *J. Phys.* A **20**, 359 (1987).

[7] K. Toda, *Journal of High Energy Physics*, PRHEP-unesp2002/038 (2002); M. Hamanaka and K. Toda, *Phys. Lett.* A **316**, 77 (2003); M. Hamanaka and K. Toda, *hep-th/0309265*.

[8] O. I. Bogoyavlensky, *Maths. USSR. Izv.* **34**, 245 (1990); P. A. Clarkson, P. R. Gordoa and A. Pickering, *Inverse Problems* **13**, 1463 (1997).

[9] 小林 匡, 修士論文（京都大学大学院 情報学研究科, 2004 年 3 月） 及び その参考文献.

[10] T. Chou, *J. Phys.* A **20**, 367 (1987).

[11] R. A. Kraenkel and A. I. Zenchuk, *Math. Comp. Sim.* **55**, 483 (2001); M. Błaszak, *Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1998.

[12] J. Weiss, *J. Maths. Phys.* **24**, 1405 (1983); R. Conte（編）, *The Painlevé Property One Century Later*, Springer-Verlag, 2000; 戸田 晃一, 慶應大 日吉紀要 自然科学, **32**, 1 (2002).

[13] T. Kobayashi and K. Toda, 論文準備中.