

イオンプラズマ波の高次近似について

横浜国立大学 工学府 神林克明(Katsukai Kanbayashi)

横浜国立大学 工学研究院 大塚一路(Kazumiti Ohtsuka)

横浜国立大学 工学研究院 渡辺慎介(Shinsuke Watanabe)

Yokohama National University

1. 概要

プラズマ中を伝わる低周波のイオンプラズマ波について理論的考察を行った。通減摂動法の高次近似を用いて孤立波解を求め、波の幅と振幅を摂動展開した場合（幅展開）と、波の速度と振幅を摂動展開した場合（速度展開）とを比較、考察した。その結果、波の速度を展開した場合の方が良い近似となっていることがわかった。

2. 理論

プラズマ中を伝わる低周波のイオンプラズマ波を考える。正の電荷 $+e$ をもつ種類のイオンと負の電荷 $-e$ を持つ電子から構成されるプラズマを考える。イオンも電子も衝突はないと仮定する。電子の温度を T_e とし、イオンの温度 T_i は0とする。これは通常の放電などでつくられるプラズマでは $T_e \gg T_i$ であることを取り入れ、イオン温度を無視した。一次元の波動伝播を考え、 x 方向のみに変化が起これるとすると、イオンの連続の式と運動方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \tag{1}$$

$$M \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{2}$$

と書ける。 n はイオンの数密度、 v はイオンの流れの速度を表す。 φ は静電ポテンシャルであり、 M はイオンの質量を表す。電子の密度はボルツマン分布に従うとすると

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{\chi T_e}\right), \tag{3}$$

となる。ここで n_e と n_0 はポテンシャルの値が φ および0の時の電子密度を表す。 χ は Boltzmann 定数である。Poisson の方程式は

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n), \tag{4}$$

である。これら(1)~(4)の四つの式に対して、変数を次のように書き改める

$$k_D x \rightarrow x, \quad \frac{v}{c_0} \rightarrow v, \quad \frac{n}{n_0} \rightarrow n, \quad \frac{n_e}{n_0} \rightarrow n_e,$$

$$\omega_{pi} t \rightarrow t, \quad \frac{e\varphi}{\chi T_e} \rightarrow \varphi.$$

ここで $k_D \equiv \left(\frac{x_0 e^2}{\varepsilon_0 \chi T_e} \right)$ はデバイ波数、 $\omega_{pi} = \left(\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 M} \right)^{\frac{1}{2}}$ はイオンプラズマ周波数

$c_0 \equiv \left(\frac{\chi T_e}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$ は音速である。さらに形を変えずに速度 c で進む波を考え、 $\eta = x - ct$ とおく。こ

れらの変換により(1)~(4)式は

$$-c \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} (nv) = 0, \quad (5)$$

$$-c \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \exp \varphi - n, \quad (7)$$

となる。 $|x| \rightarrow \infty$ においては、波が存在しないと仮定する。境界条件は

$$n_e \rightarrow 1, \quad n \rightarrow 1, \quad v \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad (8)$$

となる。よって(5)式を η について一度積分し、この境界条件を適用すると

$$-cn + nv = -c, \quad (9)$$

となる。(6)を η で一度積分すると

$$v = c \pm \sqrt{c^2 - 2\varphi}, \quad (10)$$

となるので、この v の符号の負の方を採用し(9)に代入すると

$$n = \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

となる。これを(7)式に代入すると

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = e^\varphi - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

となる。この式は形を変えずに一定速度 c で進む孤立波を表す。この方程式を解析的に解くことができない。しかし、摂動展開をもちいて近似的に解を求めることはできる。そして、数値計算で解を求めることもできる。本研究では、速度展開、幅展開の2種類の摂動展開を比較した。また、(12)式を数値的に解いたものを数値解とした。

続いて摂動展開の仕方を述べる。まず、 $c=1+\Delta c$ として(12)式に代入し φ と Δc が1より十分小さいと仮定し0付近で(12)式を展開して整理すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} &= 2\Delta c\varphi - \varphi^2 - 3\Delta c^2 + 6\Delta c\varphi^2 - \frac{7}{3}\varphi^3 + 4\Delta c^3\varphi - 15\Delta c^2\varphi^2 \\
&+ 15\Delta c\varphi^3 - \frac{13}{3}\varphi^4 - 5\Delta c^4\varphi + 30\Delta c^3\varphi^2 - \frac{105}{2}\Delta c^2\varphi^3, \\
&+ 35\Delta c\varphi^4 - \frac{118}{15}\varphi^5 + \dots
\end{aligned} \tag{13}$$

となる。ここで速度展開の場合、次のように展開する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \varepsilon^4\varphi_4 + \dots, \\ \Delta c = \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^3 c_3 + \varepsilon^4 c_4 + \dots, \\ \eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi. \end{array} \right. \tag{14}$$

上式を(13)に代入して ε のオーダーごとに整理すると

$$\varepsilon^2 \text{のオーダー} : \frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} = 2c_1\varphi_1 - \varphi_1^2, \tag{15}$$

$$\varepsilon^3 \text{のオーダー} : \frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2} = 2c_1\varphi_2 + 2c_2\varphi_1 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3c_1^2\varphi_1 + 6c_1\varphi_1^2 - \frac{7}{3}\varphi_1^3, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^4 \text{のオーダー} : \frac{d^2\varphi_3}{d\xi^2} &= 2c_1\varphi_3 + 2c_3\varphi_1 - 2\varphi_1\varphi_3 - 3c_1^2\varphi_2 + 6c_1c_2\varphi_1 \\
&+ 12c_1\varphi_1\varphi_2 + 6c_2\varphi_1^2 - 7\varphi_1^2\varphi_2 + 4c_1^3\varphi_1 - 15c_1^2\varphi_1^2 \\
&+ 15c_1\varphi_1^3 - \frac{13}{3}\varphi_1^4 + 2c_2\varphi_2 - \varphi_2^2
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^5 \text{のオーダー} : \frac{d^2\varphi_4}{d\xi^2} &= -5c_1^4\varphi_1 + 12c_1^2c_2\varphi_1 - 3c_2^2\varphi_1 - 6c_1c_3\varphi_1 + 2c_4\varphi_1 + 30c_1^3\varphi_1^2 \\
&- 30c_1c_2\varphi_1^2 + 6c_3\varphi_1^2 - \frac{105}{2}c_1^2\varphi_1^3 + 15c_2\varphi_1^3 + 35c_1\varphi_1^4 - \frac{118}{15}\varphi_1^5 \\
&+ 4c_1^3\varphi_2 - 6c_1c_2\varphi_2 + 2c_3\varphi_2 - 30c_1^2\varphi_1\varphi_2 + 12c_2\varphi_1\varphi_2 + 45c_1\varphi_1^2\varphi_2, \\
&- \frac{52}{3}\varphi_1^3\varphi_2 + 6c_1\varphi_2^2 - 7\varphi_1\varphi_2^2 - 3c_1^2\varphi_3 + 2c_2\varphi_3 + 12c_1\varphi_1\varphi_3 \\
&- 2\varphi_2\varphi_3 + 2c_1\varphi_4 - 2\varphi_1\varphi_4 - 7\varphi_1^2\varphi_3
\end{aligned} \tag{18}$$

となる。それぞれのオーダーの方程式を解くと、 ε^2 のオーダーより

$$\varphi_1 = 3c_1 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{1}{2}c_1} \xi. \tag{19}$$

ε^3 のオーダーより、 $A = 3c_1$, $S = \text{sech}^2 \sqrt{\frac{1}{2}c_1} \xi$ とすると

$$\varphi_2 = -\frac{3}{2}A^2S^2 + \frac{7}{4}A^2S^4, \quad c_2 = \frac{1}{6}A^2, \quad (20)$$

となる。以下同様に、 ε^4 のオーダーより

$$\varphi_3 = \frac{51}{40}A^3S^2 - \frac{1223}{240}A^3S^4 + \frac{943}{240}A^3S^6, \quad c_3 = \frac{5}{54}A^3, \quad (21)$$

ε^5 のオーダーより

$$\varphi_4 = -\frac{881}{1200}A^4S^2 + \frac{19391}{2400}A^4S^4 - \frac{10429}{600}A^4S^6 + \frac{16143}{1600}A^4S^8, \quad c_4 = -\frac{35}{648}A^4. \quad (22)$$

よって(14)式に (19)~(22) 式を代入すると、波の最大振幅 φ_{\max} と速度 c は

$$\varphi_{\max} = \varepsilon A + \frac{1}{4}\varepsilon^2 A^2 + \frac{13}{120}\varepsilon^3 A^3 + \frac{17}{320}\varepsilon^4 A^4, \quad (23)$$

$$c = 1 + \frac{1}{3}\varepsilon A + \frac{1}{6}\varepsilon^2 A^2 + \frac{5}{54}\varepsilon^3 A^3 + \frac{35}{648}\varepsilon^4 A^4, \quad (24)$$

となる。

続いて幅展開の場合を求める。まず、(14)式の速度展開の c_2 以降を無視して

$$\Delta c = \varepsilon c_1,$$

とする。この変換により(16)式は

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2} = 2c_1\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3c_1^2\varphi_1 + 6c_1\varphi_1^2 - \frac{7}{3}\varphi_1^3. \quad (25)$$

(19)式を改めて次のようにおく

$$\varphi_1 = 3c_1 \text{sech}^2 \sqrt{\frac{1}{2}c_1} D\xi, \quad (26)$$

$$D = 1 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2 + \varepsilon^3 d_3 + \varepsilon^4 d_4 + \dots. \quad (27)$$

上式を(15)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} &= 2c_1\varphi_1 - \varphi_1^2 + (4c_1d_1\varphi_1 - 2d_1\varphi_1^2)\varepsilon + (2c_1d_1^2\varphi_1 + 4c_1d_2\varphi_1 - d_1^2\varphi_1^2 - 2d_2\varphi_1^2)\varepsilon^2 \\ &\quad + (4c_1d_1d_2\varphi_1 + 4c_1d_3\varphi_1 - 2d_1d_2\varphi_1^2 - 2d_3\varphi_1^2)\varepsilon^3 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

となり、新たに ε の項が出てくるので、それぞれのオーダーの方程式に繰り込む。

(25)式は

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2} = 2c_1\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3c_1^2\varphi_1 + 6c_1\varphi_1^2 - \frac{7}{3}\varphi_1^3 - 4c_1d_1\varphi_1 + 2d_1\varphi_1^2, \quad (29)$$

となる。この方程式を解くと

$$\varphi_2 = -2A^2S^2 + \frac{7}{4}A^2S^4, \quad d_1 = -\frac{1}{4}A,$$

となる。ここで、 $S = \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{1}{2}c_1} D\xi$ 、 $A = 3c_1$ とした。

φ_1 の時と同様に φ_2 を(29)式に代入し、新しく出てきた ε の項を繰り込む。その結果得られた ε^4 のオーダーの方程式を解くと

$$\varphi_3 = \frac{1079}{360}A^3S^2 - \frac{1643}{240}A^3S^4 + \frac{943}{240}A^3S^6, \quad d_2 = \frac{23}{288}A^2$$

同様に ε^5 のオーダーより

$$\varphi_4 = -\frac{20417}{5400}A^4S^2 + \frac{60979}{3600}A^4S^4 - \frac{55861}{2400}A^4S^6 + \frac{16143}{1600}A^4S^8, \quad d_3 = -\frac{91}{3456}A^3$$

波の最大振幅 φ_{\max} と幅 d は

$$\varphi_{\max} = \varepsilon A - \frac{1}{4}\varepsilon^2 A^2 + \frac{29}{360}\varepsilon^3 A^3 - \frac{1225}{43200}\varepsilon^4 A^4, \quad (30)$$

$$D = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon A + \frac{23}{288}\varepsilon^2 A^2 - \frac{91}{3456}\varepsilon^3 A^3, \quad (31)$$

となる。

3. 結果

(23)、(24)式を図にしたものが図1であり、(30)、(31)式を図にしたものが図2である。幅展開も速度展開も、より高次の項まで考慮した方が数値解とより大きな振幅で一致していることがわかる。

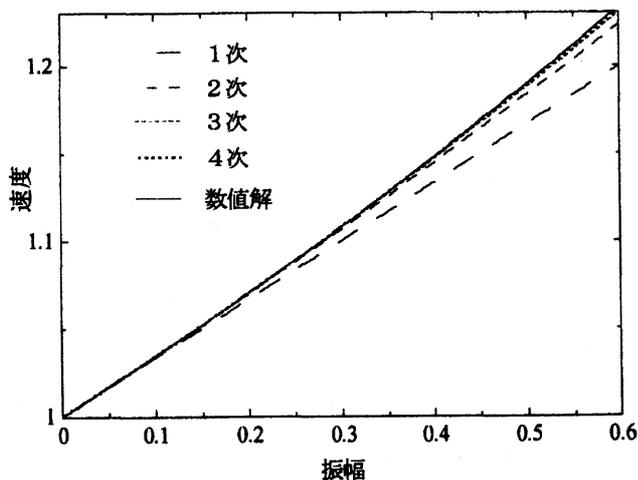


図1. 振幅と速度の関係 (速度展開)

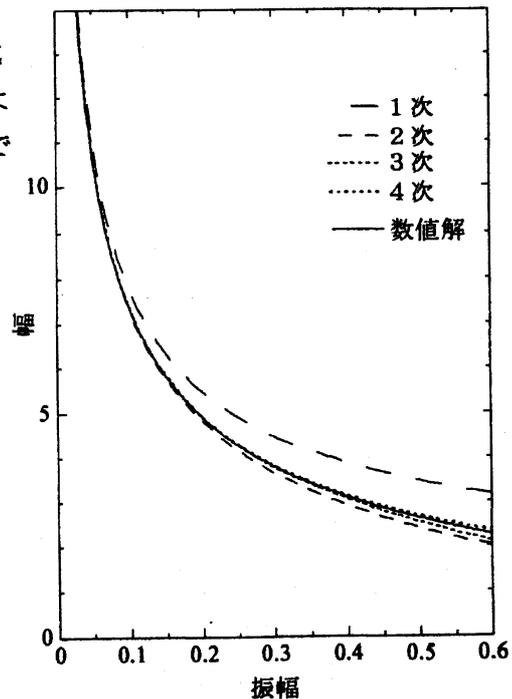


図2. 振幅と幅の関係 (幅展開)

速度展開の場合も幅展開の場合も4次まで考慮した場合が最もよく数値解と一致していることがわかったので、次に速度展開と幅展開の4次の場合を比べる。

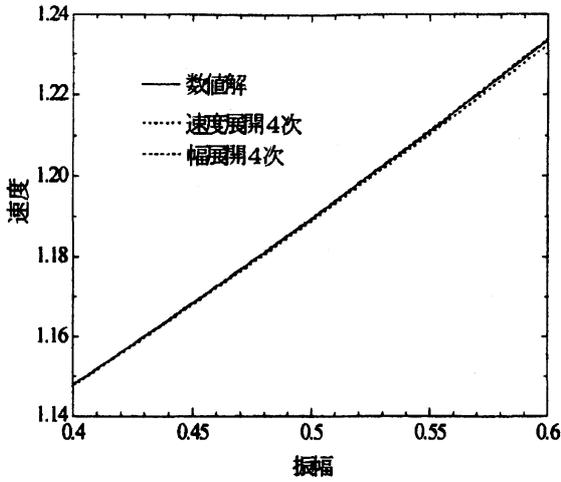


図3. 振幅と速度の関係 (比較)

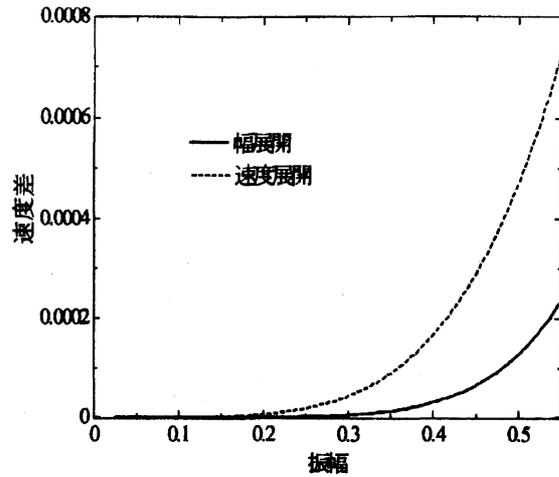


図4. 図3における数値解との速度の差

図3は速度展開と幅展開の振幅と速度の関係について比べたものである。幅展開、速度展開いずれも4次の項まで考慮したものを用いた。どちらも数値解との差が微小であることがわかる。よって、どちらが数値解とより一致しているかを調べるために、それぞれ数値解との差を取ったものが図4である。これより、振幅と速度の関係では速度展開より幅展開の方が数値解とより大きな振幅のところで一致していることがわかる。次に振幅と幅の関係をみる。

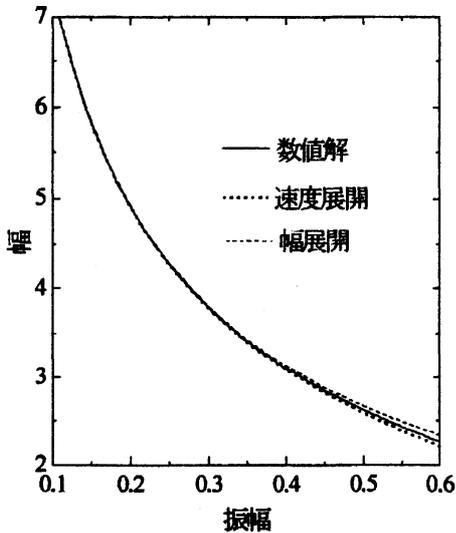


図5. 振幅と幅の関係 (比較)

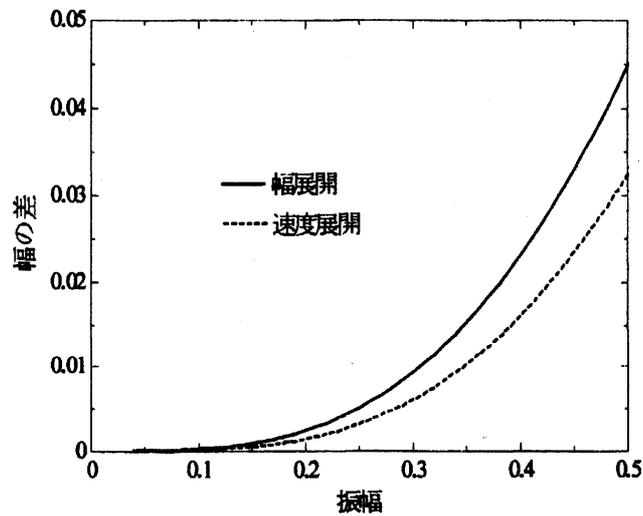


図6. 図5における数値解との幅の差

図5は振幅と幅の関係を速度展開と幅展開で比べたものである。こちらも4次まで展開したものを用いている。幅展開よりも速度展開のほうがより数値解と一致しているように見える。そこでもっと正確に判断するために幅展開、速度展開それぞれと数値解との幅の差をとった。それを図6に示す。これより明白に速度展開の方がよりよく数値解と一致していることがわかる。

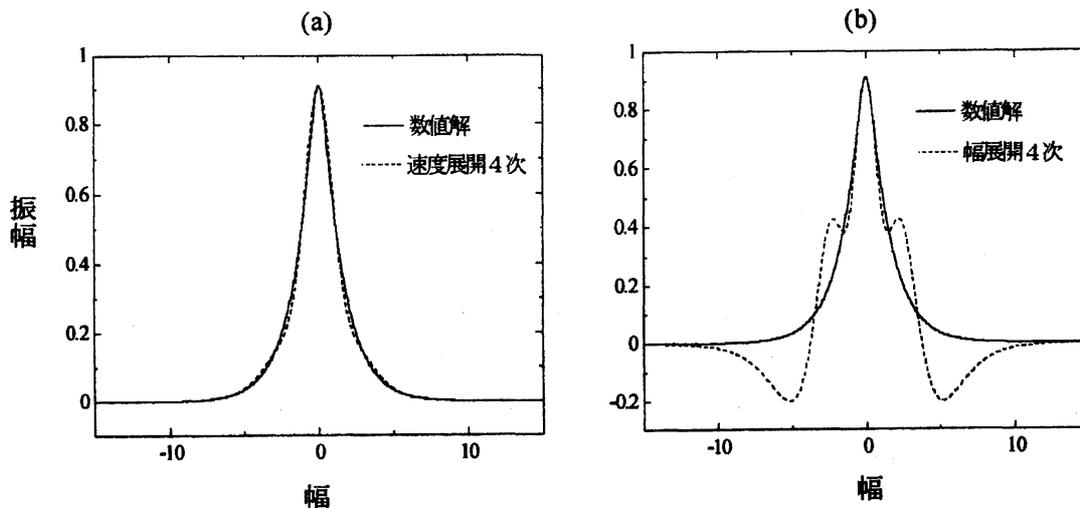


図7. 振幅 0.91 のイオンプラズマ波の波形 (a):速度展開, (b):幅展開

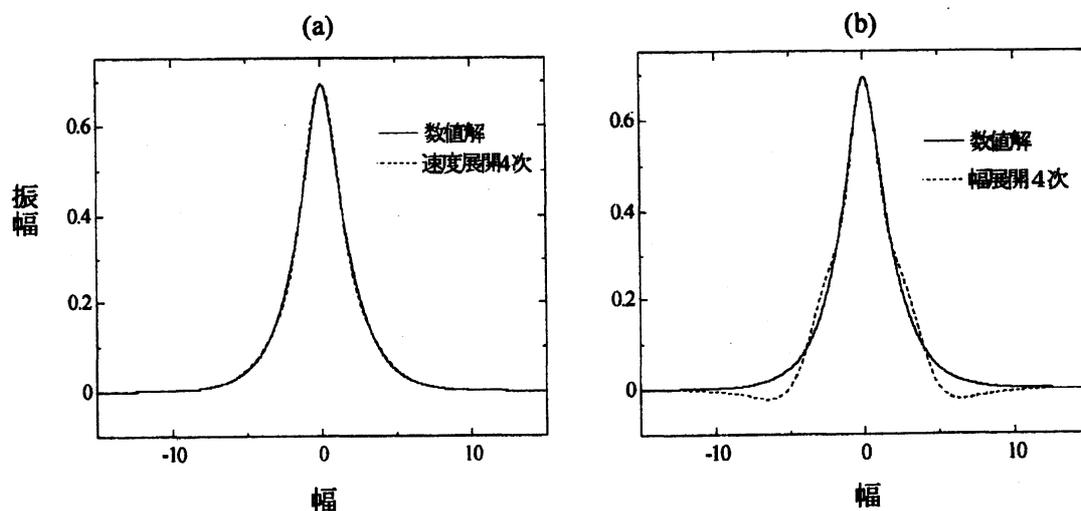


図8. 振幅 0.69 のイオンプラズマ波の波形 (a):速度展開, (b):幅展開

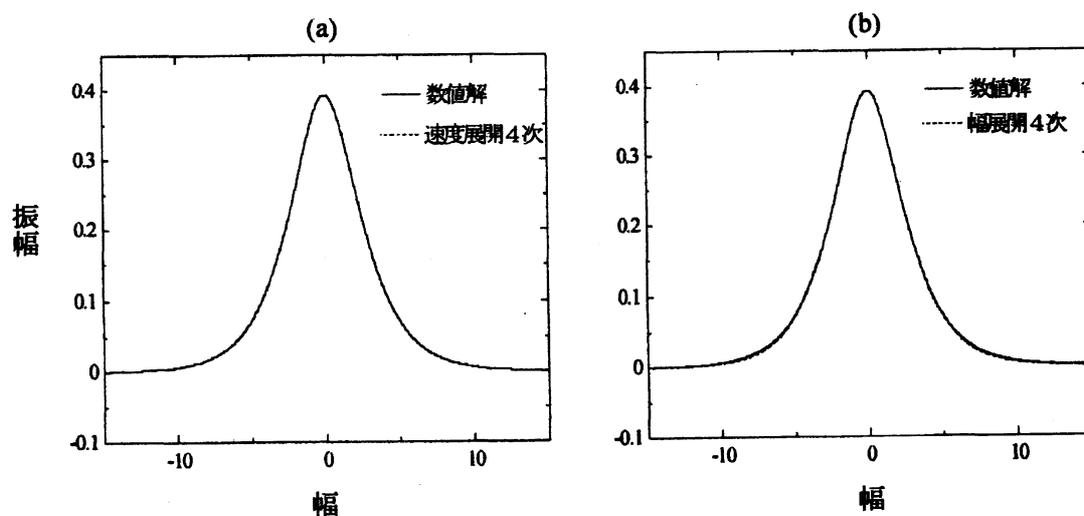


図9. 振幅 0.39 のイオンプラズマ波の波形 (a):速度展開, (b):幅展開

次に、波形をみる。速度展開と幅展開をそれぞれ数値解と比べたものを振幅を変えて図示する。それが図7～図9である。それぞれ、左側が速度展開、右側が幅展開を数値解と比較したものである。ここでも当然ながら4次の展開まで考慮したものをを用いている。

図を一つ一つ見ていく。振幅が0.91の場合、幅展開の方は明らかに数値解との違いが見られる。速度展開の方も少しではあるが数値解との差がみられる。速度展開は0.69以降ほぼ数値解と一致していると言える。幅展開の場合は数値解と一致しているといえるのは振幅が0.39の場合のみである。このことから、大まかに速度展開の場合は波の振幅が0.69以下で、幅展開の場合は波の振幅が0.39以下で数値解と一致しているといえる。つまり、速度展開の方がより振幅の大きなところで数値解と一致している。幅展開の場合、振幅が大きなところで明らかに孤立波とは違った形となっている。これは幅展開の限界を示していると考えられる。それと比べて速度展開は数値解とのずれは少しあるものの振幅の大きなところでも孤立波の形をしている。しかも、数値解とのずれもそれほど大きくない。この事からもイオンプラズマ波の波形に関しては速度展開の方が幅展開より明らかに良い結果を与えると言える。

4. 結論

波形は速度展開の方がより大きな振幅で数値解と一致した。振幅と幅の関係においても速度展開の方が数値解とよく一致した。振幅と速度の関係においては幅展開の方が数値解とよく一致した。振幅と速度の関係における数値解との差は 10^4 のオーダーであるのに対し振幅と幅の関係における数値解との差は 10^2 のオーダーである。これらのことから考えると、全体的に速度展開のほうの方がよりよい結果を与えているといえる。なぜこういう結果になったか考えることが今後の課題である。

5. 参考文献

- (1) S.Watanabe and B.Jiang, *Physics of Fluid B.5* (1993), 409-414
- (2) 渡辺慎介(1985), “ソリトン物理入門”, 培風館