

## ベナール対流におけるヘキサゴンパターンと複合ロールの安定性

大阪大学・大学院基礎工学研究科 小川知之 (Toshiyuki Ogawa)  
Graduate School of Engineering Science  
Osaka University

## 1 はじめに

古典的な Rayleigh-Bénard 対流のパターン形成の問題を力学系の中心多様体理論による標準的な方法で再考する。Boussinesq 近似モデルを上下対称な境界条件下で考えると正六角形パターンが臨界レイリー数付近で不安定に現れることは [5] 等で知られている。また [2] は Boussinesq 近似モデルを含み上下対称性を仮定したままで一般的な分岐構造の枠組みを与えた。しかしいずれも正六角形パターンなどの複合モードのまわりでの固有値を求めてはいない。一方、池田等 [3] は臨界レイリー数直後で熱伝導解に小さな擾乱を与え数値シミュレーションを行うと上下対称な境界条件下で正六角形パターンが（むしろ安定に）得られることを報告している。そこで、ここでは解析的に計算できる最も簡単な場合の上下とも自由境界条件を与えた設定で、正六角形パターンとロール解などが同時に分岐する状況下で臨界モードの中心多様体上の標準形を求めそれらの定常解の競合を調べることを目標にする。3次までの標準形により、不変トーラスの存在がわかるが正六角形パターンはそのトーラス内の平衡点に対応する。トーラス内のダイナミクスはより高次の標準形により記述されるがここでは、3次までの標準形からわかる不変トーラスの安定性のみを考察する。例えば、正六角形パターンの定常解としてのトーラスに横断的な方向の固有値を求めると、確かに不安定だが、正の固有値に比べ負の固有値の絶対値が非常に大きいことなどがわかった。したがって、古くからの理論的な結果とも合致し、かつ池田等の結果もサポートするように思われる。すなわち不安定方向のダイナミクスは遅いので数値シミュレーションで見えにくいのではないかと推測される。

また、純粋なロール解と複合したロール解の競合関係を調べるとプラントル数によっては、複合モードロール解が安定になる場合があることがわかった。ここでも安定性は複合モード解を含むトーラスの安定性を意味する。

なお、西田等 [4] は同じ状況設定で詳細な分岐の数値解析を行っている。彼らは臨界レイリー数から遠く離れたところで安定な正六角形パターンがあることを主張しており、ここで扱う状況とは異なる。また、境界条件が非対称な場合は、標準形にいわゆる六角形モードの2次のレゾナンスが混入し安定な正六角形パターンが得られることが知られているが、それとも異なる状況であることを注意しておく。

## 2 問題設定

よく知られているように, Boussinesq 近似モデルの自明解である熱伝導解からの摂動の時間発展は無次元化を施した形で書くと以下のようになる.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + R\theta \mathbf{e}_z + \Delta \mathbf{u} \\ \theta_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = (w + \Delta \theta)/P \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ただし,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$  で  $R, P$  はそれぞれレイリー数, プラントル数である. 境界条件は上下とも自由境界条件で考える.

$$u_z = v_z = w = \theta = 0 \quad (z = 0, 1). \quad (2.2)$$

これにより解は上下対称性を持つ. すなわち以下の変換で不変である.

$$(u, v, w, \theta, p)(t, x, y, z) \mapsto (u, v, -w, -\theta, p)(t, x, y, 1-z)$$

さらに  $(x, y)$  方向には  $(2\pi/\alpha, 2\pi/\beta)$  の周期境界条件を与えて未知関数をフーリエ展開する:

$$\mathbf{u} = \sum_{(m,n,l) \in \mathbf{Z}^3} u_{m,n,l} e^{i(m\alpha x + n\beta y + l\pi z)}$$

ここで簡単のため  $(m, n, l) = \mathbf{m}$  として  $u_{m,n,l} = u_{\mathbf{m}}$  と表すことにする. フーリエ係数のエルミート対称性は  $u_{\mathbf{m}} = u_{-\mathbf{m}}$  で系の上下対称性は

$$\begin{aligned} u_{m,n,l} &= u_{m,n,-l}, \\ v_{m,n,l} &= v_{m,n,-l}, \\ w_{m,n,l} &= -w_{m,n,-l}, \\ \theta_{m,n,l} &= -\theta_{m,n,-l}, \\ p_{m,n,l} &= p_{m,n,-l} \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる. さて (2.1) をフーリエ係数の方程式に書き直せば以下になる.

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{\mathbf{m}} \\ \dot{v}_{\mathbf{m}} \\ \dot{w}_{\mathbf{m}} \\ \dot{\theta}_{\mathbf{m}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & -im\alpha \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & -in\beta \\ 0 & 0 & -\omega^2 & R & -il\pi \\ 0 & 0 & 1/P & -\omega^2/P & 0 \\ im\alpha & in\beta & il\pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{m}} \\ v_{\mathbf{m}} \\ w_{\mathbf{m}} \\ \theta_{\mathbf{m}} \\ p_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_{\mathbf{m}} \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)v\}_{\mathbf{m}} \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)w\}_{\mathbf{m}} \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta\}_{\mathbf{m}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ここで,  $\omega^2 = m^2\alpha^2 + n^2\beta^2 + l^2\pi^2$  である. (2.4) を (2.3) の条件下で考えれば (2.1) と境界条件 (2.2) を満たす. さらに非圧縮の式から圧力と速度の  $w$  を消去すればフーリエ係数の時間発展は次の加算無限個の常微分方程式系に帰着される:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{\mathbf{m}} \\ \dot{v}_{\mathbf{m}} \\ \dot{\theta}_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} = M_{\mathbf{m}} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{m}} \\ v_{\mathbf{m}} \\ \theta_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_{\mathbf{m}} \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)v\}_{\mathbf{m}} \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta\}_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} + k_{\mathbf{m}} \begin{pmatrix} m\alpha \\ n\beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (l \neq 0) \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{v}_m \end{pmatrix} = M_{(m,n,0)} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_m \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)v\}_m \end{pmatrix} + k_{(m,n,0)} \begin{pmatrix} m\alpha \\ n\beta \end{pmatrix} \quad (l=0) \quad (2.6)$$

ここで、行列  $M_m$  と  $k_m$  は次で定める。

$$k_m = \frac{1}{\omega^2} (m\alpha \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_m + n\beta \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)v\}_m + l\pi \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)w\}_m),$$

$$M_m = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & -ml\pi\alpha R/\omega^2 \\ 0 & -\omega^2 & -nl\pi\beta R/\omega^2 \\ -m\alpha/l\pi P & -n\beta/l\pi P & -\omega^2/P \end{pmatrix}, \quad (l \neq 0),$$

$$M_m = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad (l=0)$$

行列  $M_m$  が 0 固有値 (実部 0) を持つのは  $l \neq 0$  のときのみで波数  $k$  ( $k^2 = m^2\alpha^2 + n^2\beta^2$ ) とレイリー数が  $R = R(k) = (k^2 + l^2\pi^2)^3/k^2$  の関係を満たすときであることはすぐわかる。以後レイリー数が最も低い値で不安定化する場合の  $l=1$  で考える。

同様のことを、方程式 (2.1) を 2次元に限定して、すなわち解が  $(x, z)$  にのみ依存するとした場合で、行っておこう。このとき未知関数は  $u, w, \theta, p$  でそのフーリエ係数の時間発展は次のように表される。ただし、先と同じ記号を用いるが添え字ベクトルは  $\mathbf{m} = (m, l) \in \mathbf{Z}^2$  で  $\omega^2 = m^2\alpha^2 + l^2\pi^2$  である。

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{\theta}_m \end{pmatrix} = M_m \begin{pmatrix} u_m \\ \theta_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_m \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta\}_m \end{pmatrix} + k_m \begin{pmatrix} m\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (l \neq 0) \quad (2.7)$$

$$\dot{u}_m = -\omega^2 u_m \quad (l=0) \quad (2.8)$$

行列  $M_m$  と  $k_m$  も同じ記号を用いるがここでは次で定める。

$$k_m = \frac{1}{\omega^2} (m\alpha \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_m + l\pi \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)w\}_m),$$

$$M_m = \begin{pmatrix} -\omega^2 & -ml\pi\alpha R/\omega^2 \\ -m\alpha/l\pi P & -\omega^2/P \end{pmatrix}, \quad (l \neq 0)$$

ここで、非線形項を形成する合成積部分を計算しておこう。

$$\{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_m = \sum_{\substack{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = \mathbf{m} \\ l_1 \neq 0}} \frac{i\alpha(m_2 l_1 - m_1 l_2)}{l_1} u_{\mathbf{m}_1} u_{\mathbf{m}_2} \quad (2.9)$$

$$\{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta\}_m = \sum_{\substack{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = \mathbf{m} \\ l_1 \neq 0}} \frac{i\alpha(m_2 l_1 - m_1 l_2)}{l_1} u_{\mathbf{m}_1} \theta_{\mathbf{m}_2} \quad (2.10)$$

$$\{(\mathbf{u} \cdot \nabla)w\}_m = \sum_{\substack{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = \mathbf{m} \\ l_1 l_2 \neq 0}} -\frac{im_2\alpha^2(m_2 l_1 - m_1 l_2)}{l_1 l_2 \pi} u_{\mathbf{m}_1} u_{\mathbf{m}_2} \quad (2.11)$$

ここで  $\mathbf{m}_i = (m_i, l_i)$  とした。

さて、上で得られた、加算無限個の常微分方程式系において、0 解の局所分岐解析を行うのが目標である。そのためには、線形部の固有値が臨界になるようなすべてのパラメーターの組  $(R, \alpha, \beta)$  に対し中心多様体を構成しその上の標準形を求めることが必要である。2次元問題では単純臨界点か隣り合う波数モード  $(n, n+1)$  の多重臨界点かの2とおりだけで、次節で計算を行う。3次元問題では特に正六角形パターンを生ずるアスペクト比  $1:\sqrt{3}$  の特別なサイズの領域でのみ計算することにする。

### 3 2次元問題： $(n, n+1)$ 複合モードロール解の安定性

ここでは、2次元の水槽問題における異なるモード数のロール解およびそれらの複合モードロール解の安定性を調べる。常微分方程式系 (2.7)(2.8) で 0 解の線形安定性が臨界になる条件は  $R = R(\alpha; m, l) = (m^2\alpha^2 + l^2\pi^2)^3 / m^2\alpha^2$  なので、 $x$  方向の水槽サイズを固定したとき、高々2つのモードが同時に不安定化する。すなわち与えられた  $\alpha$  に対して、ある  $R^*$  があり  $R < R^*$  では 0 解のすべての固有値は負であるようにできて、さらに次の2つのうちいずれかが成り立つ (図3 (左) も参照。図中、曲線が交差するところが多重臨界点である。):

- 単純臨界型: ある自然数  $n$  があり  $R^* = R(\alpha; \pm n, 1)$  かつ  $|m| \neq n$  であれば  $R < R(\alpha; m, 1)$ .
- 多重臨界型: ある自然数  $n$  があり  $R^* = R(\alpha; \pm n, 1) = R(\alpha; \pm(n+1), 1)$  かつ  $|m| \neq n, n+1$  であれば  $R < R(\alpha; m, 1)$ .

まず手始めに、単純臨界点ではロール解が超臨界的に現れることを確認する。  $\mathbf{m} \in S := \{(\pm n, \pm 1), (\pm n, \mp 1)\}$  (複号同順) のとき  $M_{\mathbf{m}}$  が 0 固有値を1つ持つ。したがって  $(u_{\mathbf{m}}, \theta_{\mathbf{m}})$  がともに中心多様体上の座標を与えるわけではなく、  $\mathbf{m} \in S$  では次のように対角化して  $\tilde{u}_{\mathbf{m}}$  を臨界モードと考えなければならない。すなわち

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{m}} \\ \tilde{\theta}_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_{\mathbf{m}} \\ \theta_{\mathbf{m}} \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{(1+P)m\alpha l\pi\omega^2} \begin{pmatrix} m\alpha & -lP\pi\omega^2 \\ m\alpha & l\pi\omega^2 \end{pmatrix}$$

により  $\mathbf{m} \in S$  に対しての方程式を書き換える:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}}_{\mathbf{m}} \\ \dot{\tilde{\theta}}_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+P}{P}\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{m}} \\ \tilde{\theta}_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)u\}_{\mathbf{m}} \\ \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta\}_{\mathbf{m}} \end{pmatrix} + Tk_{\mathbf{m}} \begin{pmatrix} m\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

これにより、中心多様体に対応する臨界モードは  $\tilde{u}_{\mathbf{m}} (\mathbf{m} \in S)$  の4つで、  $\tilde{\theta}_{\mathbf{m}} (\mathbf{m} \in S)$  と  $u_{\mathbf{m}}, \theta_{\mathbf{m}} (\mathbf{m} \notin S)$  は隷属モードである。また上下対称性より  $\tilde{u}_{(n,1)} = \tilde{u}_{(n,-1)}$  も従うので、中心多様体の局所座標は  $\tilde{u}_{(n,1)}, \overline{\tilde{u}_{(n,1)}}$  でとれる。従って臨界点近傍で、十分小さい  $\delta$  をとり  $|\tilde{u}_{(n,1)}| < \delta$  とすれば隷属モードはすべて  $O(\delta^2)$  である。中心多様体のダイナミクスとして3次元までの非線形項を求めたい。(3.1)の臨界モードの方程式の2次の非線形項から  $O(\delta^3)$  までの項を拾い出す。

さて (3.1) の  $\tilde{u}_{(n,1)}$  の式の非線形項は  $u_{\mathbf{m}_1}u_{\mathbf{m}_2}$  (ただし  $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = (n, 1)$ ) などからなるが、このうち  $O(\delta^3)$  までの項が現れる  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$  の組み合わせは  $((n, 1), (0, 0)), ((-n, 1), (2n, 0)), ((n, -1), (0, 2)), ((-n, -1), (2n, 2))$  のいずれかである。上下対称性から  $\theta_{(m,0)} = 0$  で、さらに2次元の設定では非圧縮の式から  $u_{(m,0)} = 0$  が従うので、上の4つの組み合わせのうち前者2つから現れる項は零である。最後の  $((-n, -1), (2n, 2))$  の場合も (2.9) (2.10) (2.11) よ

り零である。したがって臨界モード  $A := \tilde{u}_{(n,1)}$  の式の  $O(\delta^3)$  までに関与する隷属モードは  $B := u_{(0,2)}, C := \theta_{(0,2)}$  のみであり、単純な計算で以下が得られる。

$$\dot{A} = \lambda A + \frac{n^2\alpha^2 - \pi^2}{n^2\alpha^2 + \pi^2} n\alpha i AB + \pi\omega^2 i AC + O(\delta^4) \quad (3.2)$$

$$\dot{B} = -4\pi^2 B + O(\delta^4) \quad (3.3)$$

$$\dot{C} = -4\pi^2 C + 4\pi\omega^2 n^2\alpha^2 i |A|^2 + O(\delta^4) \quad (3.4)$$

ここで、 $\lambda = R - R^*$  は十分小さい ( $O(\delta^2)$ ) として中心多様体定理を適用する。中心多様体上の標準形を得るには、座標系  $A$  による中心多様体の近似を計算するか、次のように標準形変換を施し新しい座標のもとで中心多様体がフラットになるようにすればよい。すなわち  $p, q$  を未知として非線形変換： $\tilde{A} = A + pAB + qAC$  により 2 次の項を消去するように  $p, q$  をとれば

$$\dot{\tilde{A}} = \lambda \tilde{A} - \omega^4 n^2 \alpha^2 |\tilde{A}|^2 \tilde{A} + O(\delta^4) \quad (3.5)$$

が得られ、これはもちろんロール解が超臨界 Pitchfork 分岐で現れることを示す。

次に多重臨界点の場合を考えよう。 $n' = n + 1$  として  $\mathbf{m} \in S := \{(\pm n, \pm 1), (\pm n, \mp 1), (\pm n', \pm 1), (\pm n', \mp 1)\}$  (複号同順) のとき  $M_{\mathbf{m}}$  が 0 固有値を 1 つ持つ。したがって同様に  $M_{\mathbf{m}}$  を対角化すれば臨界モード (中心多様体の局所座標) は  $A := \tilde{u}_{(n,1)}, \bar{A} = \tilde{u}_{(-n,-1)}, B := \tilde{u}_{(n',1)}, \bar{B} = \tilde{u}_{(-n',-1)}$  の 4 つである。また、 $A = \tilde{u}_{(n,1)}$  に 3 次までに関与する隷属モードは  $C := u_{(0,2)}, D := \theta_{(0,2)}, E := u_{(n-n',2)}, F := \theta_{(n-n',2)}, G := u_{(n+n',2)}, H := \theta_{(n+n',2)}$  である。方程式からこれらに関する 3 次までの項を拾い出し 2 次の項を消去する標準形変換を行えば  $n \geq 2$  で次の標準形が得られる。 $n = 1$  の時はレゾナンス項があり 2 次に消去できない項が残り、[1] にあるような特別な手法をもとに解析可能であるが、煩雑なのでここでは省略する。

$$\begin{cases} \dot{\tilde{A}} = \tilde{A}(\lambda - a|\tilde{A}|^2 - b|\tilde{B}|^2) + O(\delta^4) \\ \dot{\tilde{B}} = \tilde{B}(\lambda' - c|\tilde{A}|^2 - d|\tilde{B}|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (3.6)$$

この 3 次の標準形は極座標表示により振幅のみの式に分離できる：

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda - ar^2 - bs^2) + O(\delta^4) \\ \dot{s} = s(\lambda' - cr^2 - ds^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (3.7)$$

ここで、 $r = |\tilde{A}|, s = |\tilde{B}|$  である。(3.7) は一般に  $r \geq 0, s \geq 0$  で 4 つの平衡点  $(0, 0), (r_1, 0), (0, s_1), (r^*, s^*)$  を持つ。 $r^* s^* \neq 0$  のとき  $(r^*, s^*)$  を複合モードロール解と呼ぼう。複合モード解のまわりの (3.7) の意味での線形化行列は  $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  なので  $\det N > 0$  のとき複合モード解は (3.7) の意味で安定である。(3.6) に戻ればこれは漸近安定な不変トーラスがあることを意味する。そのトーラス内に定常解があることまでは 3 次近似でわかるがトーラス内のモーションはより高次の近似を求めなければわからない。ここでは、不変トーラスの安定性のみを問題にする。図 1 は標準形の係数  $a, b, c, d$  の計算結果から求めたプラントル数と  $\det N$  の関係である。これは、少なくとも低いモード相互作用においてはプラントル数が小さければロール解が不安定で複合モードロール解が安定であることを示している。

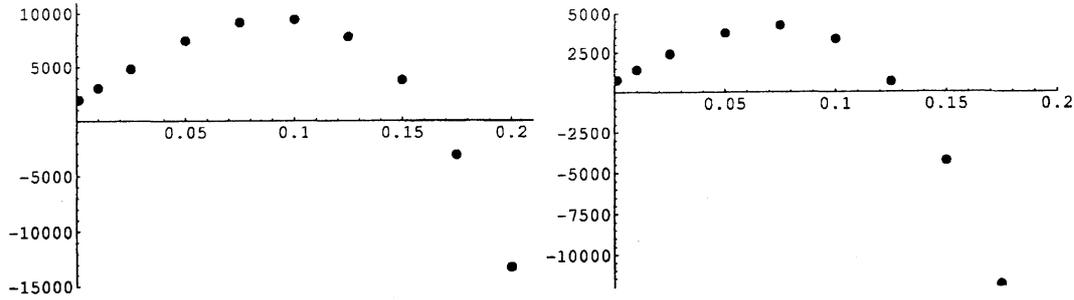


図 1: 複合  $n - (n + 1)$  モードの安定性. 横軸: プラントル数  $P$ , 縦軸:  $\det N$ . 左図  $n = 2$ , 右図  $n = 3$ .

#### 4 3次元問題: 正六角形パターンの安定性

臨界レイリー数からロールや正六角形パターンが現れる場合を考察する. すなわち  $R = R(k) = (k^2 + \pi^2)^3 / k^2$  が  $k = k_c$  で最小値を取るとして  $(\alpha, \beta) = k_c(1, \sqrt{3})$  のサイズの領域で考えよう. ( $R = R(k_c)$  のことを臨界レイリー数と呼ぶ.)  $R = R(k_c)$  で3方向のロールモードが不安定化する. より正確には  $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^3$  のうち  $\mathbf{m} = (\pm 2, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  の12通り (ここでは複号同順でなくすべての組み合わせとする) のときのみ行列  $M_{\mathbf{m}}$  が0固有値を1個ずつ持ちそれ以外の固有値はすべて負である. 前節同様にこれらの臨界モードに中心多様体縮約を行い, その有限次元力学系を解析すれば正六角形やロールやパッチワークキルト定常解などの間の競合が理解できる. エルミート対称性や上下対称性などから12個の臨界モードは  $\tilde{u}_{(2,0,1)}, \tilde{u}_{(-1,1,1)}, \tilde{u}_{(-1,-1,1)}$  で代表される. 3次までで関与するすべての隷属モードは  $u_{\mathbf{m}_i}, v_{\mathbf{m}_i}, \theta_{\mathbf{m}_i}$ ,  $i = 1, \dots, 9$  の27個である. ここで  $\mathbf{m}_1 = (0, 0, 2)$ ,  $\mathbf{m}_2 = (3, -1, 0)$ ,  $\mathbf{m}_3 = (3, 1, 0)$ ,  $\mathbf{m}_4 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{m}_5 = (1, -1, 0)$ ,  $\mathbf{m}_6 = (3, -1, 2)$ ,  $\mathbf{m}_7 = (3, 1, 2)$ ,  $\mathbf{m}_8 = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{m}_9 = (1, -1, 2)$  である. ただし対称性より  $\theta_{\mathbf{m}_2}, \theta_{\mathbf{m}_3}, \theta_{\mathbf{m}_4}, \theta_{\mathbf{m}_5}$  はすべて0である. さらに適当な標準形変換を施し, 新しい座標を  $A_1, A_2, A_3$  とすると係数  $a, b, c$  の詳細は省くが, 中心多様体上のダイナミクスは次の標準形方程式に帰着される.

$$\dot{A}_i = A_i(\mu - a|A_i|^2 - b|A_j|^2 - b|A_k|^2) \quad (4.1)$$

ただし  $i, j, k$  は互いに異なりそれぞれ1, 2, 3のいずれかとする. なお, 一般の境界条件のもとでは  $\overline{A_j A_k}$  のヘキサゴン・レゾナンスが発生しこの2次の項が残るが, ここでは系の上下対称性によりこの項は自動的に排除されている.

さて(4.1)から極座標  $A_i = r_i e^{i\phi_i}$  を用いて振幅方程式を分離すると,

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\mu - a r_1^2 - b r_2^2 - b r_3^2) \\ \dot{r}_2 = r_2(\mu - b r_1^2 - a r_2^2 - b r_3^2) \\ \dot{r}_3 = r_3(\mu - b r_1^2 - b r_2^2 - a r_3^2) \end{cases} \quad (4.2)$$

が得られるが, これは定常解として

- (O) : (0, 0, 0)
- (R) :  $(r^\dagger, 0, 0), (0, r^\dagger, 0), (0, 0, r^\dagger)$

- (PQ) :  $(r^\dagger, r^\dagger, 0), (0, r^\dagger, r^\dagger), (r^\dagger, 0, r^\dagger)$
- (H) :  $(r^*, r^*, r^*)$

を持つ。これらは (O) : 自明解, (R) : ロール解, (PQ) : パッチワーク・キルト解, (H) : 正六角形パターンである。それぞれ (4.2) の意味で正の線形化固有値の数は (O) : 3, (R) : 0, (PQ) : 1, (H) : 2 である。特に (H) での線形化固有値は  $b-a > 0, b-a > 0, -a-2b < 0$  であり, 正と負の固有値の絶対値の比  $(b-a)/(a+2b)$  を求めたのが図 2 である。この比はプラントル数に依存するがかなり小さい値 (たとえば  $P=1$  では  $0.00757\dots$ ) で, いくつかの値を計算した限り  $P$  に関して単調減少である。したがって, ヘキサゴン (に対応するトーラス) は (トーラスに横断的な方向のダイナミクスをみると) サドルであり, 安定方向の指数に比べて不安定方向の指数は非常に小さいことがわかる。

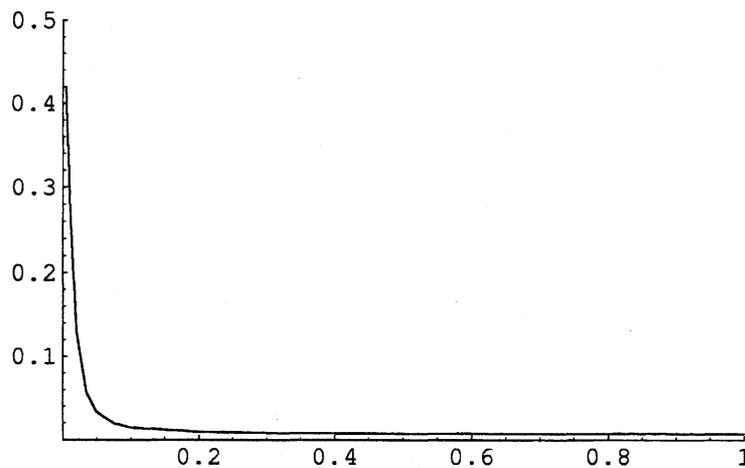


図 2: ヘキサゴンの安定/不安定比. 横軸: プラントル数  $P$ , 縦軸:  $(b-a)/(a+2b)$ .

## 5 さいごに

本稿では Rayleigh-Bénard 問題の Boussinesq 近似モデルにおいて, 上下対称な自由境界条件, また空間方向は与えられた矩形サイズの周期境界条件 (もしくは反射壁) を設定し, レイリー数に関して first instability が起こるときの分岐解析を行った。2次元の問題ではすべての場合 (図 3 (左)) を検討したが, 3次元の場合は特別なサイズの矩形 (図 3 (右)) の黒点に相当する波数  $(\alpha, \beta)$  に対する矩形サイズ  $(\frac{2\pi}{\alpha}, \frac{2\pi}{\beta})$  のみで検討した。中心多様体の標準形計算は目下のところ手計算で行っているが, 計算機による数式処理を用いて分岐解析アルゴリズムを開発することができれば非常に有効であろうと思われる。

ここで得られた安定性に関する結果は, 1 節にも述べたように池田等の数値シミュレーション結果とも合致するように見えるが, やはりこの観点から Boussinesq 近似モデルに対して詳細な数値シミュレーションを再度行う必要がある。

また, 山田・藤村 [6] は, より一般的な境界条件や浮力近似に対し数値的に標準形の係数を求める方法を開発した。その特別な場合として今回ここで扱った対称な境界条件の場合も固有値を求めることができるが, 詳細は現在照合中である。

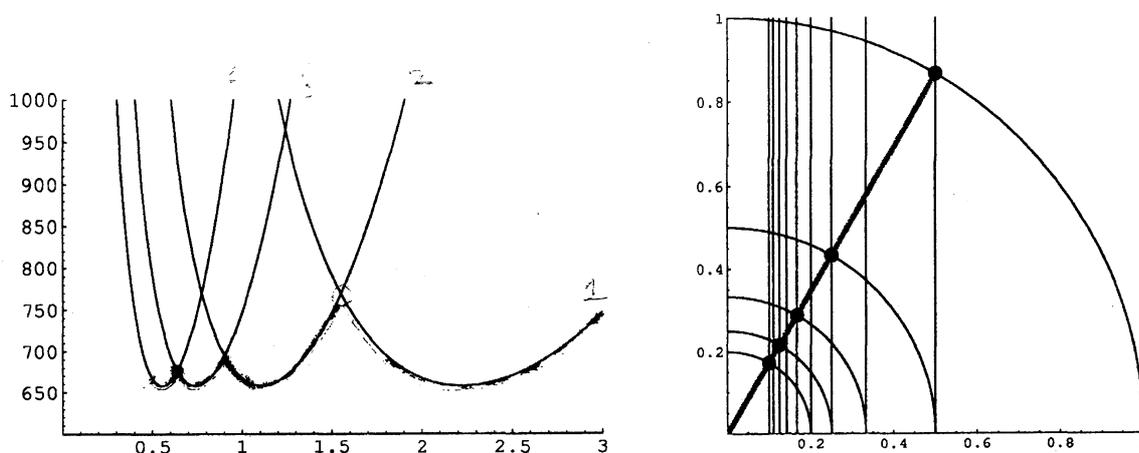


図 3: 左図は各モード数の臨界安定曲線を描く。ただし横軸は波数  $\alpha$  , 縦軸はレイリー数  $R$  で, 右から順に曲線  $R = R(\alpha; 1, 1), \dots, R(\alpha, 4, 1)$  を表示。太線は 2次元問題の first instability . 右図実線は臨界レイリー数で不安定化する波数  $(\alpha, \beta)$  の集合。横軸, 縦軸はそれぞれ波数  $\alpha, \beta$  である。黒点は本稿で調べた波数。実際には灰色点線上の波数パラメーターすべてでヘキサゴンが生じる。

## 参考文献

- [1] D.ARMBRUSTER, J.GUCKENHEIMER AND P.HOLMES, *Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold*, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), pp.676-691.
- [2] M.GOLUBITSKY, J.W.SWIFT AND E.KNOBLOCH, *Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection*, Physica 10 D, 1984, 249-276.
- [3] 池田勉, 長山雅晴, 木村忠信, 非平衡系の内部構造—正六角形対流パターン・らせん燃焼波—, 数学セミナー, 38(6), 1999, 30-33.
- [4] T.NISHIDA, T.IKEDA AND H.YOSHIHARA, *Pattern formation of heat convection problem*, in Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics (eds. I.Babuska, P.G.Ciarlet and T.Miyoshi), Lecture Notes in Computational Sciences and Engineering Vol.19, Springer, 2002, 209-218.
- [5] A.SCHLÜTER, D.LORTZ AND F.H.BUSSE, *On the stability of steady finite amplitude convection*, J.Fluid Mech., 23(1), 1965, 129-144.
- [6] 山田祥子, 藤村薫, 密度が温度の弱い 2 次関数である場合の Rayleigh-Bénard 対流パターン, 数理解析研究所講究録, vol.1339, 2003, 145-153.