

# 気泡を含む静止気液二相媒質中の 2つのモードの波の振舞い

江頭 竜 (Ryu Egashira), 矢野 猛 (Takeru Yano),  
藤川重雄 (Shigeo Fujikawa)

北海道大学大学院工学研究科

Division of Mechanical Science, Graduate School of Engineering,  
Hokkaido University

## 1 はじめに

気泡を含む液体中では、単相の場合に比して多種多様な波動現象が現われる。従来の研究により、例えば、気液二相媒質中の音速は、一般に気体単相あるいは液体単相中の音速よりも低下すること、波の分散性、ソリトンやポイド波の特性など、多くの興味深い波動特性が明らかにされてきた。一方、未だ十分に解明されていない気液二相媒質中の波動現象の一つに、一般に振幅が大きく伝播速度の小さい主要な波（この波の長波長極限の伝播速度は混相流の分野で現在も広く用いられている「等温平衡音速」）に先行して伝播するプリカーサの伝播がある。プリカーサの振幅は小さく、実験的に観測しにくいことから、プリカーサの先端がほぼ液単相中の音速で伝播する [1] こと以外には、その伝播特性は明らかにされてこなかった。また、理論的及び数値的研究においても、波の分散性と関連付けたプリカーサに関する詳細な解析はなされていない。本研究で示すように、方程式によってプリカーサの伝播を記述するためには、液体の圧縮性を考慮する必要がある。しかしながら、気泡を含む液体中の波動に関する従来の多くの解析では、液体の圧縮性は気体の圧縮性に比べて十分小さいとして、液体の圧縮性を無視した方程式が用いられてきた。液体の圧縮性を無視した方程式で記述できるのは、従来の伝播速度の小さい主要な波のモードだけである。結局、液体を非圧縮性流体とした方程式が波動伝播の解析に用いられてきたことと、工業的に、より重要であることから、従来、詳細に調べられてきたのは、一般に振幅が大きく伝播速度の小さい波のモードの方であり、液体の圧縮性によって生じるプリカーサに対応する波のモードは十分に調べられたこなかったといえる。

本研究で用いる支配方程式系は、これまでに著者らが、キャビテーションをとまなう高速気泡流の流れ場を記述するために導出した平均化モデル方程式である [2]。キャビテーションでは、気泡が激しく崩壊し、その崩壊時の気泡壁の速度は液体単相中の音速にも匹敵するほど高速になるため、導出されたモデル方程式系では、液体の圧縮性が考慮されて

いる。このため、このモデル方程式系は、従来の液体非圧縮の場合の波のモードと、液体の圧縮性によって生じる波のモードの2つのモードを記述することができる。

本研究の目的は、気泡を含む液体中の波動伝播の解析を液体の圧縮性を考慮して行なうことによって、プリカーサを含めて液体の圧縮性によって生じる波のモードの振る舞いを明らかにすることである。また、液体の圧縮性が、従来の液体非圧縮の場合の波のモードに及ぼす影響についても明らかにする。

## 2 支配方程式と無次元化

既報 [2] において、著者らが導出した平均化モデル方程式系をまとめておく。気相と液相の質量保存の式、気相と液相の運動量保存の式をそれぞれ以下にまとめておく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha \rho_G^*) + \frac{\partial}{\partial x_i^*}(\alpha \rho_G^* u_{Gi}^*) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_L^*] + \frac{\partial}{\partial x_i^*}[(1-\alpha)\rho_L^* u_{Li}^*] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha \rho_G^* u_{Gi}^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*}[\alpha \rho_G^* u_{Gi}^* u_{Gj}^*] \\ &= -\alpha \frac{\partial p_G^*}{\partial x_i^*} - \beta \left[ \frac{D_G}{Dt^*}(\alpha \rho_L^* u_{Gi}^*) - \frac{D_L}{Dt^*}(\alpha \rho_L^* u_{Li}^*) \right], \\ \frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_L^* u_{Li}^*] + \frac{\partial}{\partial x_j^*}[(1-\alpha)\rho_L^* u_{Li}^* u_{Lj}^*] \\ &= -(1-\alpha) \frac{\partial p_L^*}{\partial x_i^*} - P^* \frac{\partial \alpha}{\partial x_i^*} + \beta \left[ \frac{D_G}{Dt^*}(\alpha \rho_L^* u_{Gi}^*) - \frac{D_L}{Dt^*}(\alpha \rho_L^* u_{Li}^*) \right]. \end{aligned}$$

ここで、有次元量には\*を付し、下添え字のGとLはそれぞれ気相と液相に関する量を表わす。 $t^*$ は時間、 $x_i^*$ は空間座標、 $\alpha$ はボイド率(気相体積率)を表わし、 $\rho^*$ は密度、 $u_i^*$ は流速ベクトル、 $p^*$ は圧力でこれらは体積平均量である。また、 $P^*$ は気泡壁近傍液体の表面平均圧力と体積平均液体圧力の差、 $\beta$ は仮想質量係数であり、 $D_k/Dt^* = \partial/\partial t^* + u_{ki}^* \partial/\partial x_i^*$ はk相(kがGのとき気相、kがLのとき液相)に乗ったラグランジュ微分である。方程式を閉じるために、その他の支配方程式として、気相と液相の状態方程式、気泡内気体の質量保存の式、液体の圧縮性を考慮したKellerらの気泡壁の運動方程式、気泡壁での気泡半径方向の圧力のつり合い式、ボイド率の定義式をそれぞれ以下にまとめておく。

$$\begin{aligned} p_G^* &= \left( \frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} \right)^\gamma p_{G0}^*, & \frac{p_L^* + B^*}{p_{L0}^* + B^*} &= \left( \frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} \right)^n, & \rho_G^* &= \left( \frac{R_0^*}{R^*} \right)^3 \rho_{G0}^*, \\ \left( 1 - \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) R^* \frac{D_G^2 R^*}{Dt^{*2}} + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) \left( \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right)^2 \\ &= \left( 1 + \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) \frac{P^*}{\rho_{L0}^*} + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*} \frac{D_G}{Dt^*} (p_L^* + P^*), \\ p_G^* - p_L^* - P^* &= \frac{2\sigma^*}{R^*}, & \alpha &= \frac{4}{3} \pi R^{*3} n_B^*. \end{aligned}$$

ここで、添え字0の変数は基準状態を表わし、 $\gamma$ はポリトロブ指数、 $n$ と $B^*$ は定数で水の場合、 $n = 7.15$ 、 $B^* = 304.9 \text{ MPa}$ である。 $c_{L0}^* = \sqrt{n(p_{L0}^* + B^*)/\rho_{L0}^*}$ は液単相中の音速、 $R^*$ は気泡半径、 $\sigma^*$ は表面張力係数、 $n_B^*$ は気泡数密度である。

流れ場の代表長さに代表波長  $\lambda^*$  を、代表速度に液単相中の音速  $c_{L0}^*$  をとり、以下のよ  
うな無次元変数を導入する。

$$\begin{aligned} t &= \frac{c_{L0}^*}{\lambda^*} t^*, & x_i &= \frac{x_i^*}{\lambda^*}, & u_{ki} &= \frac{u_{ki}^*}{c_{L0}^*}, & \rho_k &= \frac{\rho_k^*}{\rho_{L0}^*}, \\ p_k &= \frac{p_k^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}, & P &= \frac{P^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}, & R &= \frac{R^*}{R_0^*}, & n_B &= \lambda^{*3} n_B^*, \\ B &= \frac{B^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}, & \sigma &= \frac{\sigma^*}{R_0^* \rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}, & c_{L0} &= \frac{c_{L0}^*}{c_{L0}^*}. \end{aligned} \quad (1)$$

### 3 分散関係

多数の気泡を含む液体中の線形平面波の伝播を考える。はじめ、全ての気泡の中心と周  
囲液体が静止し、気泡は振動していないものとし、気泡数の分布及び全ての物理量が一樣  
であるとする。この状態を基準状態とし、基準状態の変数には添え字 0 を付す。基準状  
態からの摂動を考えるため、 $|\epsilon| \ll 1$  とし、 $O(\epsilon)$  の変動量の変数に ' を付して、各変数  
を以下のように摂動展開する。

$$\begin{aligned} u_G &= \epsilon u'_G, & u_L &= \epsilon u'_L, & \rho_G &= \rho_{G0}(1 + \epsilon \rho'_G), & \rho_L &= 1 + \epsilon \rho'_L, \\ p_G &= p_{G0}(1 + \epsilon p'_G), & p_L &= p_{L0}(1 + \epsilon p'_L), & P &= \epsilon P', \\ R &= 1 + \epsilon R', & \alpha &= \alpha_0(1 + \epsilon \alpha'), & n_B &= n_{B0}(1 + \epsilon n'_B). \end{aligned} \quad (2)$$

前節で示した支配方程式系を (1) 式のもとに無次元化した後、(2) 式を代入し、 $O(1)$  の項  
をとると、 $O(1)$  の変数間の関係が以下のように得られる。

$$p_{L0} = \frac{1}{n}, \quad p_{G0} = p_{L0} + 2\sigma, \quad \alpha_0 = \frac{4}{3}\pi\delta^3 n_{B0} \quad (3)$$

これらは静止一様の基準状態を満足している。さらに、 $O(\epsilon)$  の項をとると、以下のよう  
な線形化された支配方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \frac{\partial \rho'_G}{\partial t} + \frac{\partial u'_G}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho'_L}{\partial t} - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \frac{\partial u'_L}{\partial x} &= 0, \\ (\rho_{G0} + \beta) \frac{\partial u'_G}{\partial t} - \beta \frac{\partial u'_L}{\partial t} + p_{G0} \frac{\partial p'_G}{\partial x} &= 0, \\ (1 - \alpha_0 + \beta \alpha_0) \frac{\partial u'_L}{\partial t} - \beta \alpha_0 \frac{\partial u'_G}{\partial t} + (1 - \alpha_0) p_{L0} \frac{\partial p'_L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 R'}{\partial t^2} = \frac{P'}{\delta^2}, & p'_G = \gamma \rho'_G, & \rho'_L = p_{L0} p'_L, & \rho'_G = -3R', \\ \alpha' = n'_B + 3R', & p_{G0} p'_G - p_{L0} p'_L - P' &= -2\sigma R'. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\delta$  は代表波長  $\lambda^*$  に対する代表気泡径  $R_0^*$  の比を表わす無次元パラメータである。  
なお、気泡壁の運動方程式を線形化した際、気泡半径方向の振動の減衰に寄与する項は省  
略した。

(4) 式から以下のような線形分散関係式が得られる.

$$\omega^4 - \left( \frac{k^2}{1-\alpha_0} + \frac{a}{\delta^2} \right) \omega^2 + \frac{b}{\delta^2} \frac{k^2}{1-\alpha_0} = 0. \quad (5)$$

ただし,  $\rho_{G0} \ll 1$  とし,

$$a = \omega_B^2 + \frac{3\alpha_0}{1-\alpha_0}, \quad b = \omega_B^2 + \frac{3\alpha_0}{1-\alpha_0} \frac{1-\alpha_0+\beta}{\beta} \gamma p_{G0} \quad (6)$$

とおいた. ここで,  $\omega_B$  は単一気泡の無次元固有角振動数,  $k$  は無次元波数,  $\omega$  は無次元角振動数であり, それぞれ以下のように無次元化してある.

$$\omega_B = \frac{R_0^*}{c_{L0}^*} \omega_B^*, \quad k = \lambda^* k^*, \quad \omega = \frac{\lambda^*}{c_{L0}^*} \omega^*. \quad (7)$$

(5) 式から直ちに, 波数  $k$  の関数として4つの  $\omega$  が以下のように得られる.

$$\omega_{1\pm} = \pm \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\delta^2 k^2}{1-\alpha_0} + a \right) - \sqrt{\left( \frac{\delta^2 k^2}{1-\alpha_0} + a \right)^2 - \frac{4b\delta^2 k^2}{1-\alpha_0}} \right]}, \quad (8)$$

$$\omega_{2\pm} = \pm \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\delta^2 k^2}{1-\alpha_0} + a \right) + \sqrt{\left( \frac{\delta^2 k^2}{1-\alpha_0} + a \right)^2 - \frac{4b\delta^2 k^2}{1-\alpha_0}} \right]}. \quad (9)$$

ただし, 複合同順である. (8), (9) 式の二重根号の中身が正となる条件は, 球形気泡の場合 ( $\beta = 1/2$ ),  $(3-2\alpha_0)\gamma p_{G0} < 1$  となる. この条件は, 実際の状況ではほとんどの場合満たされる. よって, 全ての実数の  $k$  に対して, 4つの実数の  $\omega$  が存在する. 一方, 従来のモデル方程式の導出でなされているのと同様に液相非圧縮近似を課して分散関係式を導出しなすと, 2つの  $\omega$  が以下のように求められる.

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{b}{3\alpha_0 + \delta^2 k^2}} k. \quad (10)$$

(8), (9), (10) 式の複合は同じ伝播特性を持つ波が逆方向に伝播することを表わしているだけであり, 各式を1つのモードと数えることにし, これ以降, 正符号についてのみ考える. この場合, 液相の圧縮性を無視すると, 波動伝播のモードは1つであるのに対し, 液相の圧縮性を考慮すると, 2つのモードが存在する. 便宜上, (8), (9), (10) 式のような分散関係式で表わされる波動伝播のモードをそれぞれ slow mode, fast mode, incompressible liquid mode と名付けることにする.

物理量の値を具体的に表1のように設定した場合の, 波数  $k$  に対する角振動数  $\omega$  のグラフの一例を図1に示す. パラメータ  $\delta$  を0.01に固定し, ボイド率  $\alpha_0$  を  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  とした. 図1(a)は slow mode と fast mode の比較を, 図1(b)は slow mode と incompressible liquid mode の比較を表わす. 点線はボイド率  $\alpha_0 \rightarrow 0$  の極限 (液单相極限) であり,  $\omega = k$  は液单相音波を,  $\omega = \omega_B/\delta$  は単一気泡の固有振動のモードを表わしている. 図1(a)より, ボイド率ゼロの極限では, 液单相音波のモードと単一気泡の固

表 1. 計算条件 (水-空気系)

液相の基準圧力 $p_{L0}^*$	101325 Pa
液相の基準密度 $\rho_{L0}^*$	998.2 kg/m <sup>3</sup>
気泡の代表径 $R_0^*$	0.001 m
表面張力 $\sigma^*$	0.07275 N/m
系の温度 $T^*$	293.15 K
ポリトロプ指数 $\gamma$	1.0

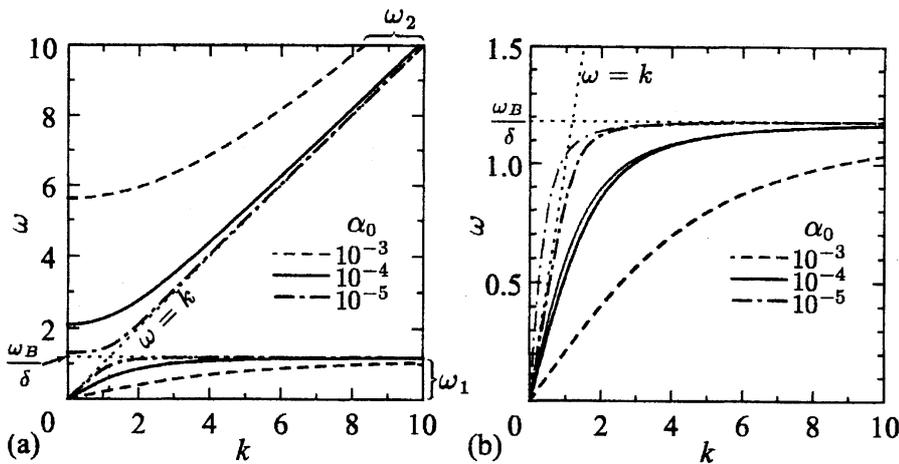


図 1. 分散関係 ( $\delta = 0.01$ ). (a)slow mode と fast mode, (b)slow mode (太線) と incompressible liquid mode (細線)

有振動のモードに帰着するが、それらのモードに slow mode と fast mode のどちらが帰着するかは、 $k = \omega_B/\delta$  の波数を境に入れ替わる。図 1(b) からは、液相の圧縮性を考慮した場合の slow mode が従来の incompressible liquid mode に対応しているのがわかる。図 1(b) のグラフ上で見られる 2つのモードの相異は液相の圧縮性によるものであり、液相の圧縮性が無視できなくなるほどボイド率が微小になると両者の相異が顕著になってくる。

図 2 は、表 1 の条件でボイド率を  $\alpha_0 = 10^{-4}$  に固定し、4種類の  $\delta$  を与えた場合の群速度を示している。図 2 より、slow mode と fast mode の群速度は 1 点で交わり、ある波数において群速度の大きさは逆転する。交点の波数  $k_c$  と群速度  $v_{gc}$  はそれぞれ以下のように得られる。

$$k_c = \frac{\sqrt{(1-\alpha_0)b}}{\delta}, \quad v_{gc} = \sqrt{\frac{b}{(1-\alpha_0)(a+3b)}} \quad (11)$$

slow mode の群速度は長波長極限で最大値をとり、fast mode の群速度の最大値は液単相中の音速に漸近していく。

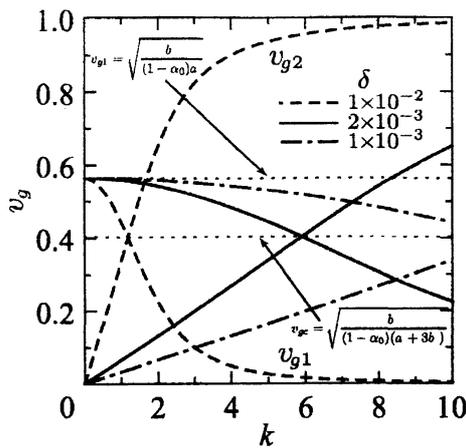


図 2. 群速度に与える  $\delta$  の影響  
( $\alpha_0 = 10^{-4}$ )

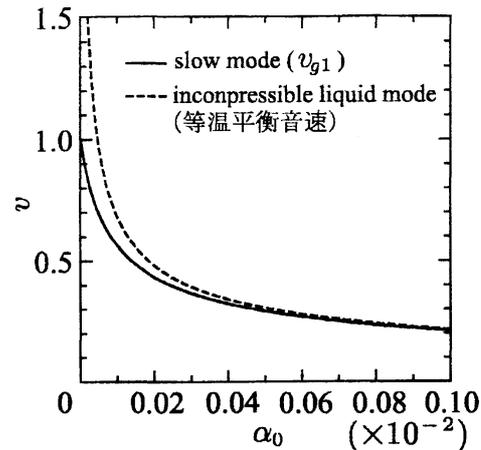


図 3. 長波長極限の波の伝播速度の比較

群速度の長波長極限を考える。混相流の分野で現在も広く用いられている等温平衡音速の式は、液相非圧縮近似のもとに長波長極限の波の伝播速度として導出され、以下のように与えられる。

$$v = \sqrt{\frac{p_{L0}}{\alpha_0(1-\alpha_0)}} \quad (12)$$

また、slow mode の群速度の長波長極限は以下のように得られる。

$$\lim_{k \rightarrow 0} v_{g1} = \sqrt{\frac{b}{(1-\alpha_0)a}} \quad (13)$$

図 3 は等温平衡音速 (12) 式と slow mode の長波長極限 (13) 式との比較を示す。ボイド率が微小になっていくと、等温平衡音速の式は液単相中の音速を超えて発散していく一方で、slow mode は液単相中の音速に近づいていく。なお、fast mode の群速度の長波長極限はゼロである。

## 4 数値解析

ここでは、線形化された支配方程式 (4) 式を MacCormack 法を用いて数値的に解く。静止一様の基準状態から気泡が振動を開始しないように平衡状態を保ちつつ、以下のような液相圧力の分布を与える。

$$p'_L(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos 2\pi x + 1), & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq |x|. \end{cases} \quad (14)$$

条件は図 2(b) と同じに設定する。3 種類の  $\delta$  を与えた場合の無次元時刻  $t = 100$  における液相圧力の波形を図 4 に示す。

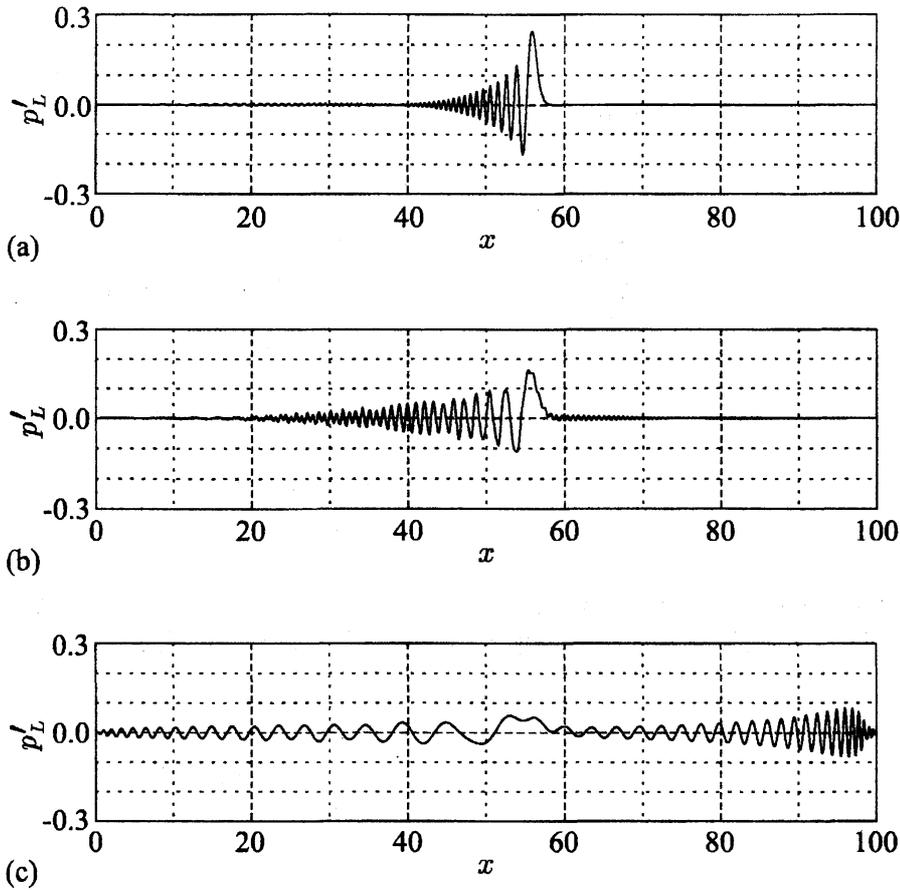


図 4.  $t = 100$  における液相圧力の波形. (a)  $\delta = 0.001$ , (b)  $\delta = 0.002$ , (c)  $\delta = 0.01$

図 4 より, 前方部の波と後方部の波は異なる特性をもった波であることが推察される. 特に,  $\delta = 0.002$  の場合, 波形の前方部にプリカーサのような波形が観察される. これらの波のモードを特定するために, 停留位相の方法を用いて描かれる波形を数値計算で得られた波形に重ね合わせる. 図 5(a) では停留位相の方法によって slow mode の波形を, (b) と (c) では fast mode の波形を描いた. 図 5 より, 前方部の波は fast mode の波によって構成され, 後方部の波は振幅の大きい slow mode と 振幅の小さい fast mode の波から構成されていることがわかった.

## 5 結論

以上の結果をまとめると以下のようなになる.

1. 液相非圧縮近似の支配方程式で記述される気液二相媒質中の波動伝播のモードは 1 つ (incompressible liquid mode) であるのに対し, 液相の圧縮性を考慮した場合, 2 つの波動伝播のモード (slow mode, fast mode) が記述される.

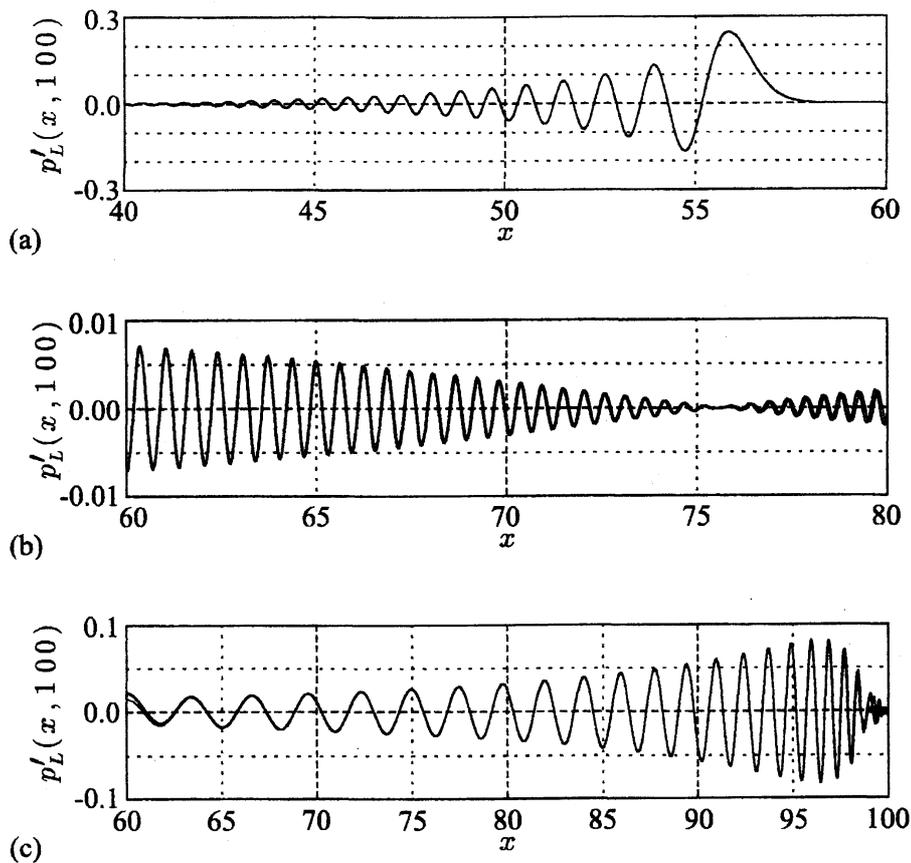


図 5. 数値計算によって得られた波形 (図 4) (太線) と停留位相の方法を用いて描いた波形 (細線) の比較. (a)  $\delta = 0.001$ , slow mode, (b)  $\delta = 0.002$ , fast mode, (c)  $\delta = 0.01$ , fast mode

2. incompressible liquid mode は slow mode に対応する.
3. ボイド率が微小になっていくと, 等温平衡音速の式は液単相中の音速を超えて発散していく一方で, slow mode は液単相中の音速に近づいていく.
4. 液相の圧縮性を考慮して記述される fast mode の波の振る舞いは, 代表波長と代表気泡径の比を表わすパラメータによって大きく異なる.

## 参考文献

- [1] 大谷清伸, 杉山 弘, 溝端一秀, "気泡を含む液体中を伝播する強い衝撃波と気泡崩壊," 日本機械学会論文集 B 編 68-670, 1646-1652(2002).
- [2] Egashira, R., Yano, T., Fujikawa, S., "Analysis of Wave Propagation in a Bubbly Liquid Based on a Two-Fluid and Three-Pressure Model," *Multiphase Science and Technology* (2004 年, 掲載決定).