

共鳴器を取り付けた導波管における音の局在モード

阪大院 基礎工 杉本信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

今堀秀彦 (Hidehiko IMAHORI)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

局在化や局在モードという言葉は元々の格子力学から始まり、今や色々な分野で使われている。しかし、現象や発生メカニズムは多様である。現象は線形と非線形に分けられる一方、媒質の一様性・非一様性が大きな役割を果たす。連続媒質が伝播方向に一様であれば局在化は起こらない。このため局在化には境界の存在をも含めた何らかの非一様性が必要である。中でも空間的な周期系や空間的に不連続な離散周期系はその特別な例である。周期系や離散系に小さな不均質が加わると、その回りに局在した振動モードが現れることがある。これに対し離散周期系でも非線形の場合には、局在したモードの存在が武野ら [1] によって示されており、盛んに研究されている [2]。

本報告では、無限に広がった平面導波管の中の音の伝播において、管に一对のヘルムホルツ共鳴器を取り付けると、取り付け方によってはある特定の周波数で線形の局在モードが発生することを示す。この場合、音は共鳴器近傍にのみ定在的に存在し、無限遠方に離れるにつれ消える。したがって共鳴器がいくら振動しても、音は無限遠方には漏れて（放射されて）こず、閉じこめられることになる。これに似た局在モードの存在は、既に導波管の内部に物体を置いた場合に知られている [3]。音の伝播はヘルムホルツ方程式で支配されているが、局在モードは数学的には開かれた領域でのラプラス演算子が伝播モードである連続スペクトルに加え、点スペクトルをもつことに相当する。この事実は 1950 年代に Ursell, Jones によって示されていたが、最近工学的な応用面から見直され、Bristol 大学のグループ等が盛んに研究している [4, 5]。彼らはそれを捕捉モード (trapped mode) と呼んでいるが、実質局在モードである。

局在モードの振幅は線形の範囲で任意であるから、その存在は無限遠方から音が入射する問題の解が一意でなくなることを意味する。したがって物理的には線形の局在モードはどのようにして励起されるか、現実にはおそらく非線形メカニズムを介して発生されるものと考えられるが、興味のあるところである。また、局在モードが意図的に励起できたとして、その振幅が大きくなれば局在したまま存在できるのか、それとも脱局在化するのか、今後の研究が待たれる。

2. 予備的事項

2.1. 二次元平面ダクト内の音の伝播

本題に入る前に、以下の解析に必要な幾つかの事柄を述べる。

散逸を無視した音の二次元伝播は次の波動方程式で記述される：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

ここで、 ϕ は速度ポテンシャル、 a_0 は音速を表し、 t は時間、 (x, y) は平面内の座標である。音圧（超過圧力） p' は、運動方程式から速度ポテンシャルによって、

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2)$$

と与えられる。これはベルヌーイの定理に他ならない。ただし、 ρ_0 は空気の密度である。

いま平行平板で挟まれた二次元ダクト内の伝播を考える。伝播方向に x 軸を、それに垂直に y 軸を取り、ダクトの中央面上に座標の原点をとる。ダクト幅を H とし、その半幅 $H/2$ を h とする。境界条件は、 $y = \pm h$ で $\partial\phi/\partial y = 0$ となる。これらより、(1)の素解は、 C を任意な定数として

$$\phi = C \cos \left[\frac{m\pi}{H}(y+h) \right] \exp[i(kx - \omega t)] \quad (3)$$

となり、角周波数 ω と波数 k の間に分散関係式

$$\omega^2 = \frac{a_0^2}{H^2} [(m\pi)^2 + (kH)^2] \quad (4)$$

が成り立つ。ここで、整数 m ($m = 0, 1, 2, \dots$)はモードを表す。

固有関数 $\cos[m\pi(y+h)/H]$ は m の偶数、奇数に応じて y の偶関数、奇関数になる。それらは、 $m = 0$ 以外では

$$\int_{-h}^h \cos \left[\frac{m\pi}{H}(y+h) \right] dy = 0 \quad (5)$$

を満足するので、(3)から導かれる x 方向の速度の断面にわたる平均がゼロになることに注意する。図1に分散関係を示す。横軸は無次元波数の絶対値 $|kH|$ を、縦軸は無次元角周波数 $H\omega/a_0$ を表す。直線は分散のない平面波のモード($m = 0$)を表し、実の曲線は波面が断面内で変化する分散性の伝播モードを表す。後者は

遮断周波数 $H\omega/a_0 = m\pi$ をもち、これより低い周波数では k は純虚数 $i\lambda$ になる。図1の破線は λH を表す。このモードはエヴァネセント(evanescent)モードと呼ばれ、波としては伝播できない。ちなみに、黒丸が後に示す局在モードの周波数である。

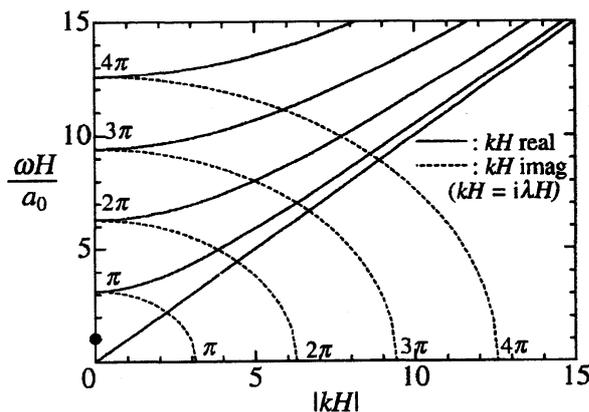


図1. 平面ダクト内の音の伝播の分散関係。

2.2. ヘルムホルツ共鳴器の応答と音響アドミッタンス

次に単一の二次元共鳴器の応答を考える。空洞内の空気に対しては、運動を無視し質量保存のみ課す。一方、スロート内の空気は、圧縮性を無視して、軸方向の運動量変化のみ考える。これらの式はそれぞれ以下のようになる：

$$S \frac{d\rho_c}{dt} = \rho_0 B w \quad \text{および} \quad \rho_0 L \frac{dw}{dt} = p'_t - p'_c. \quad (6)$$

ここで, $S, \rho_c, p'_c, p'_t, B, w, L$ はそれぞれ, 空洞面積, 空洞内の空気の密度, 空洞内の音圧, スロート入り口での音圧, スロート幅, スロート内の空気の速度, スロート長さである. 空洞内空気には断熱変化 ($dp'_c/d\rho_c = a_0^2$) を用い, (6) から w を消去すると

$$\frac{d^2 p'_c}{dt^2} + \omega_0^2 p'_c = \omega_0^2 p'_t \quad (7)$$

が得られ, $\omega_0 (= \sqrt{a_0^2 B/LS})$ は共鳴器の固有角周波数である. なお, スロート長さに対して管端補正をするのであれば, L に $2 \times 0.82r$ (r : スロート半径) を加えればよい.

次に, 角周波数 ω で調和振動する場合を考える:

$$\begin{bmatrix} p'_c \\ p'_t \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c \\ P_t \\ W \end{bmatrix} \exp(i\omega t). \quad (8)$$

ここで P_c, P_t, W は各複素振幅を表す. スロート入り口での音圧の複素振幅 P_t に対する流れ込む '体積' 速度の複素振幅 BW の比を共鳴器の音響アドミタンス Y と定義すると, 次のようになる:

$$Y \equiv \frac{BW}{P_t} = \frac{B}{\rho_0 L} \left(\frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (9)$$

2.3. 一つの共鳴器を取り付けた場合における放射減衰

図2に示すように, ダクト壁面に一つの共鳴器を取り付けた場合を考える. 取り付け位置を $x=0$ とする. 共鳴器が振動すると, スロートからダクトの左右に同じように音が放射される. x の正負の領域での音圧と x 方向の速度 $u (= \partial\phi/\partial x)$ をそれぞれ次のように与える:

$$p' = \begin{cases} +\rho_0 a_0 u = f(t - x/a_0) & \text{for } x > 0, \\ -\rho_0 a_0 u = f(t + x/a_0) & \text{for } x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

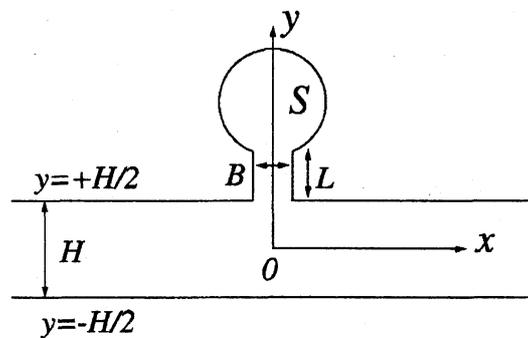


図2. 一つの共鳴器を取り付けた平面ダクト.

接続点 $x=0$ での境界条件を考える. 質量流束の連続から, $Bw = -2Hf(t)/\rho_0 a_0$ の関係が得られる. これより $x=0$ で $p' = f(t) = -(\rho_0 a_0/2H)Bw$ となる. 一方, 圧力連続から $p'_t = f(t)$ が必要である. 方程式(6)から, $Bw = (S/\rho_0 a_0^2) dp'_c/dt$ が成り立つので, $p'_t = -(S/2a_0 H) dp'_c/dt$ となる. これを(7)に右辺に代入すると,

$$\frac{d^2 p'_c}{dt^2} + c \frac{dp'_c}{dt} + \omega_0^2 p'_c = 0 \quad (11)$$

となる, ただし, $c = a_0 B/2HL$ である. この方程式は, 管の中の伝播 (放射) を考えると共鳴器の振動は減衰し, 定在振動できないことを示している. 散逸効果を全て無視して

いるにも拘わらず、管の中に放射された音がエネルギーを運び去るために共鳴器の振動が幾何学的に減衰する。この減衰を放射減衰と呼んで、散逸による減衰と区別する。

3. 一对の共鳴器を対向して取り付けられた場合の局在モード

3.1. 問題の設定

次に、図3に示すように、同一の共鳴器を対向して取り付けられた場合を考える。スロートの幅の中心を $x = 0$ にとり、半幅 $B/2$ を b とする。解くべき方程式は(1)と同じであるが、境界条件は次のようになる：

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{cases} \pm w^\pm & \text{for } -b < x < +b \text{ at } y = \pm h, \\ 0 & \text{for } x < -b \text{ and } +b < x \text{ at } y = \pm h. \end{cases} \quad (12)$$

ここで、複号は同順にとり、 w^\pm はそれぞれ共鳴器に入る向きを正とする。上付きの添え字 ' \pm ' によって、上下の共鳴器を区別する。

さて時間的に調和な振動 ($\omega > 0$) を仮定する：

$$\begin{bmatrix} \phi \\ p' \\ w^\pm \\ p'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x, y) \\ P(x, y) \\ W^\pm \\ P_c^\pm \end{bmatrix} \exp(i\omega t). \quad (13)$$

このとき Φ はヘルムホルツ方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = 0 \quad (14)$$

を満足する。ここで、 $k^2 = \omega^2/a_0^2$ である。スロート幅はダクト幅に比べて普通十分小さく、またスロート断面にわたる変化を考慮していないので、'体積' 速度の複素振幅 BW^\pm がスロート開口部の中心での音圧の複素振幅 $P(x=0, y=h^\pm)$ を用いて

$$BW^\pm = YP(x=0, y=h^\pm) \quad (15)$$

と表せるものとする。なお、 $B/H \rightarrow 0$ の極限を考えると、 $y = \pm h$ での境界条件は、 $\partial \phi / \partial y = Bw^\pm \delta(x)$ となる。

スロート入り口での境界条件を(13)を用いて書き直し、さらに W^\pm を次のように対称成分 W^s 、反対称成分 W^a に分解する：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{cases} +W^+ = W^a + W^s & \text{at } y = +h, \\ -W^- = W^a - W^s & \text{at } y = -h. \end{cases} \quad (16)$$

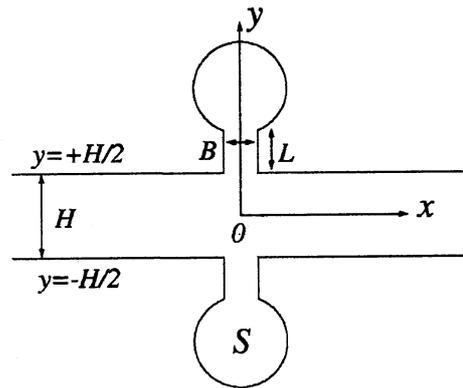


図3. 二つの同一の共鳴器を対向して取り付け平面ダクト。

ただし,

$$W^a = \frac{1}{2}(W^+ - W^-) \quad \text{および} \quad W^s = \frac{1}{2}(W^+ + W^-) \quad (17)$$

である. これより, 解を対称成分 ($W^+ = W^-$), 反対称成分 ($W^+ = -W^-$) それぞれについて求める.

3.2. フーリエ変換による解法

ここでは次に定義されるフーリエ変換を用いて, まず反対称成分について解を求める:

$$\hat{\Phi}(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{ikx} dx. \quad (18)$$

すると (1) は

$$\frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} - l^2 \hat{\Phi} = 0 \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty, \quad -h < y < h \quad (19)$$

となる. ここで, $l = (k^2 - \omega^2/a_0^2)^{1/2}$ である. 一方, 境界条件は

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{+b} W^a e^{ikx} dx = \frac{2W^a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kb)}{k} \quad \text{at} \quad y = \pm h \quad (20)$$

となるので, $\hat{\Phi}$ は容易に求まり

$$\hat{\Phi} = \frac{2W^a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kb)}{kl \cosh(lh)} \sinh(ly) \quad (21)$$

となる. これにフーリエ逆変換を施すと, Φ は

$$\Phi = \frac{W^a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kb) \sinh(ly)}{kl \cosh(lh)} e^{-ikx} dk \quad (22)$$

と求まる.

音圧は $P = -i\omega\rho_0\Phi(x, y)$ から求まるので, この関係を (15) に用いると

$$BW^a = -i\omega\rho_0 Y \frac{W^a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kb) \sinh(lh)}{kl \cosh(lh)} dk \quad (23)$$

が得られる. いま $W^a \neq 0$ であるので, ω は次の関係を満足しなければならないことが分かる.

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{1}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kb) \sinh(lh)}{kl \cosh(lh)} dk. \quad (24)$$

同様の解析は対称成分に対しても行うことができる. 実際, Φ は

$$\Phi = \frac{W^s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kb) \cosh(ly)}{kl \sinh(lh)} e^{-ikx} dk \quad (25)$$

となり, 周波数を決定する方程式は次のようになる:

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{1}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kb) \cosh(lh)}{kl \sinh(lh)} dk. \quad (26)$$

3.3. 周波数方程式

次に、周波数方程式 (24) の解を求める。このために、以下の無次元量を導入する：

$$\frac{H\omega}{a_0} = \frac{2h\omega}{a_0} \equiv \sigma, \quad \frac{H\omega_0}{a_0} = \frac{2h\omega_0}{a_0} \equiv \sigma_0, \quad k \equiv \frac{\omega}{a_0}\eta, \quad \chi = \frac{B}{H} = \frac{b}{h}. \quad (27)$$

この変換を行うと、(24) は次のように書き直せる：

$$\frac{L}{H} \left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma^2}{\sigma} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta(\eta^2 - 1)^{1/2}} \sin\left(\frac{1}{2}\chi\sigma\eta\right) \tanh\left[\frac{1}{2}\sigma(\eta^2 - 1)^{1/2}\right] d\eta. \quad (28)$$

右辺の被積分関数は $\eta = 0$ で正則であり、 $\eta \rightarrow \pm\infty$ では $\eta^{-2} \sin(\chi\sigma\eta/2)$ であるので、ここでは積分は発散しない。関数 $(\eta^2 - 1)^{1/2}$ の分岐点は $\eta = \pm 1$ にあるが、被積分関数全体としては $\tanh[(\sigma/2)(\eta^2 - 1)^{1/2}]$ があるために、 $\eta = \pm 1$ は通常点になる。しかし、被積分関数は $\cosh[(\sigma/2)(\eta^2 - 1)^{1/2}]$ がゼロになる、すなわち点 $(\sigma/2)(\eta^2 - 1)^{1/2} = \pm(2n - 1)\pi/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に一位の極をもつ。この点は

$$\eta = \pm \frac{i}{\sigma} \left[(2n - 1)^2 \pi^2 - \sigma^2 \right]^{1/2} \quad (29)$$

にあり、 σ の値に応じて実軸上から虚軸上に移る。もし、実軸上にあれば積分値は発散し、周波数方程式は根をもたないことになる。これから、 σ は π より小さいことが要求される。この場合には、(28) の積分値を I とおくと、 I は留数定理を用いると容易に以下のように求まる。

$$I = \tan\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sigma}{(2n - 1)^2 \pi^2 - \sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\chi\sqrt{(2n-1)^2\pi^2 - \sigma^2}}. \quad (30)$$

図 4 に (28) の右辺と左辺の値を σ に関して表す。ここで、 $L/H = 0.5$ 、 $\chi = 0.1$ 、 $\sigma_0 = \pi/2$ とおいた。二つの曲線の交点が求めている周波数 ($\sigma \approx 1.4098$) を与える。この値は勿論、最低の遮断周波数 π より小さいが、左辺がゼロである共鳴器の固有周波数 σ_0 よりも低いことが分かる。交点での σ の値は χ の値により変化する。破線は $\chi \rightarrow \infty$ の極限での右辺のグラフを表す。これから χ を大きくすると交点の周波数は下がり、破線との交点での値がその最小値である。

以上と同じ議論を対称モードについても行うと、(28) の右辺に相当する積分 ((26) の右辺) が $\eta = \pm 1$ で発散する。従って交点は存在しない。

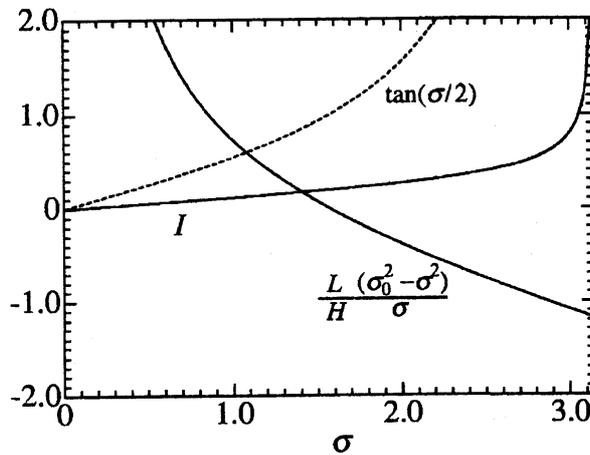


図 4. 周波数方程式 (28) の右辺と左辺の σ に関するグラフ ($L/H = 0.5$, $\chi = 0.1$, $\sigma_0 = \pi/2$).

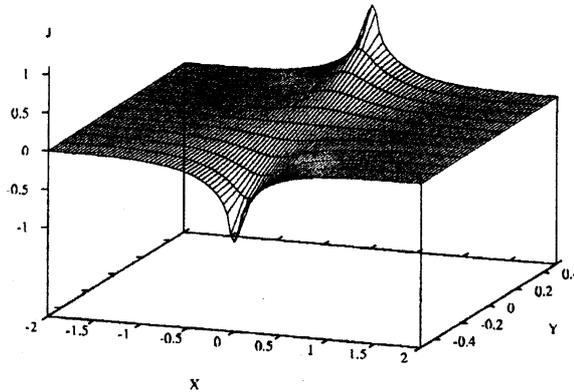


図5. 局在した $J(X, Y)$ のグラフ ($\sigma_0 = 1.4098$).

3.4. 圧力分布

反対称モードに対して得られた周波数で、 Φ が実際に共鳴器の近傍に局在することを見る。このためには、次の積分を実行すればよい：

$$\Phi = \frac{W^a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kb) \sinh(ly)}{kl \cosh(lh)} e^{-ikx} dk. \quad (31)$$

座標 (x, y) をそれぞれ (HX, HY) とおき、 $\Phi = (a_0 W^a / \omega) J$ とおいて無次元化すると、 J は

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{2}\chi\sigma\eta) \sinh[\sigma Y(\eta^2 - 1)^{1/2}]}{\eta(\eta^2 - 1)^{1/2} \cosh[\frac{1}{2}\sigma(\eta^2 - 1)^{1/2}]} e^{-i\sigma X\eta} d\eta \quad (32)$$

となる。関数 $\sin(\chi\sigma\eta/2)$ を複素表示し、被積分関数が $\eta = 0$ で正則であることに注意すると、(32) の積分は次のように変形できる：

$$J = \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh[\sigma Y(\eta^2 - 1)^{1/2}]}{\eta(\eta^2 - 1)^{1/2} \cosh[\frac{1}{2}\sigma(\eta^2 - 1)^{1/2}]} e^{-i\sigma(X-\chi/2)\eta} d\eta \quad (33)$$

$$- \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh[\sigma Y(\eta^2 - 1)^{1/2}]}{\eta(\eta^2 - 1)^{1/2} \cosh[\frac{1}{2}\sigma(\eta^2 - 1)^{1/2}]} e^{-i\sigma(X+\chi/2)\eta} d\eta. \quad (34)$$

ここで、 P は $\eta = 0$ で主値をとることを意味する。この積分も留数定理を用いると容易に次のように求めることができる。領域 $|X| > \chi/2$ では、

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sigma}{\lambda_n^2} \sin[(2n-1)\pi Y] \left[e^{-(|X|+\chi/2)\lambda_n} - e^{-(|X|-\chi/2)\lambda_n} \right] \quad (35)$$

となり、領域 $|X| < \chi/2$ では、

$$J = \frac{\sin(\sigma Y)}{\cos(\sigma/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sigma}{\lambda_n^2} \sin[(2n-1)\pi Y] \left[e^{(|X|-\chi/2)\lambda_n} + e^{-(|X|+\chi/2)\lambda_n} \right] \quad (36)$$

となる。ただし、 $\lambda_n = [(2n-1)^2\pi^2 - \sigma^2]^{1/2}$ である。式(35)から、 $|X| \rightarrow \infty$ では $\Phi \rightarrow 0$ になり、 Φ は共鳴器の近傍に局在することが分かる。図5に J のグラフを示す。これは速度ポテンシャルのグラフであるが、スケールを除けば音圧分布に相当している。関数 $(-1)^n \sin[(2n-1)\pi Y] = \cos[(2n-1)\pi(Y+1/2)]$ に注意すると、解は第2.1.節で示した奇数の m の値をもつ、すなわち反対称の分散性のエヴァネッセントモードで表されることが分かる。したがって局在モードには平面波モードは含まれず、放射減衰が起こらない。これが局在化を可能にする。

4. 結果と議論

平面ダクトに同一の共鳴器を対向して取り付けると、散逸を無視した線形理論の範囲で、ある特定の周波数で定在的に振動する局在モードの存在が示された。この周波数は一つ存在し、ダクトの全ての遮断周波数や共鳴器の固有周波数より低い。ダクトに何も取り付けなければ平面波モードしか存在しない低い周波数で、局在化が発生することは面白く、応用面で有用であろう。ちなみに、ヘルムホルツ共鳴器に代わって、1/4波長管など違う形状の空洞を取り付けると、幾つかこのような周波数が出現する。それらは音響アドミッタンスを調べれば容易に分かる。局在モードは、音圧がダクト中央面に対して反対称に変化する反対称モードで、対称な局在モードは存在しない。これは、対称モードでは放射減衰が現れるために局在化できないためである。また、共鳴器をダクトの上下面で千鳥に取り付ける場合にも存在しないことが示される。

ところで、周波数方程式の根を求める際に、 $\sigma > \pi$ であれば極が実軸上に現れることを述べた。いま求めた解は散逸をゼロとした極限であることを考えると、散逸が少しでもあれば極は複素 η 面の実軸から散逸の程度に応じて僅かに上下ずれることになる。いま方程式(1)に散逸効果を人工的に取り入れた次の方程式を考える：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right). \quad (37)$$

ここで、左辺第2項目が人工的な粘性項を表し、係数 ε はある適当な ω に対して $0 < \varepsilon/\omega \ll 1$ である。本来の散逸に代わってなぜ人工粘性を考えるのか説明が必要である。ダクト内の実際の音に対して散逸は二つのメカニズムに起因して生じる。一つは空気そのものの拡散によるものであり、もう一つは壁面での境界層摩擦によるものである。可聴周波数では、前者は後者に比べて大変小さく、その効果は(37)では第2項の形ではなく、 $\Delta \partial \phi / \partial t$ (Δ はラプラシアン) なる形で取り込まれる。それに対し、境界層摩擦効果は履歴を伴う時間の非整数 3/2 階微分で表される [6]。実際にはこうした項を通して散逸効果を取り入れるのが筋であるが、ここでは散逸がどう極を移動させるか見るだけなので、簡単のため(37)の第2項のような項を考えるのである。

いま $\pi < \sigma < 3\pi$ なる場合を考えると、 $\cosh[(\sigma/2)(\eta^2 - 1)^{1/2}] = 0$ に起因する極は、

$$\eta = \pm \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\sigma^2}} \left[1 - \frac{i\varepsilon H}{2a_0\sigma(1 - \pi^2/\sigma^2)} + \dots \right] \quad (38)$$

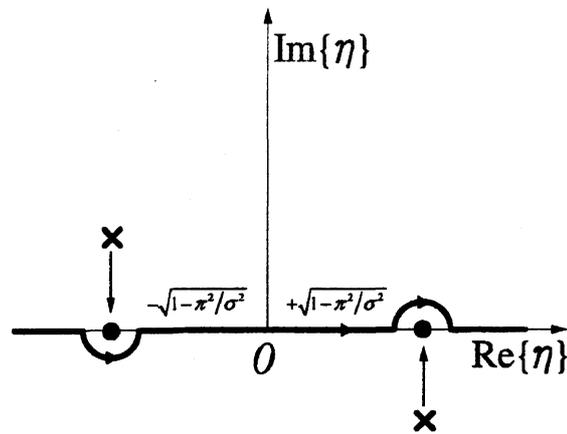


図 6. 散逸係数 $\varepsilon \rightarrow 0$ による極の移動と迂回積分路.

となり, 図 6 の \times 印で示すように実軸からずれる. これから, $\varepsilon H/a_0 \rightarrow 0$ の極限をとると, 実軸に沿った積分 (21) は $\eta = -\sqrt{1-\pi^2/\sigma^2}$ では下に, $\eta = \sqrt{1-\pi^2/\sigma^2}$ では上に迂回せざるを得なくなる. この迂回路をそれぞれ微小な半径の半円にとると, 実軸上の積分は積分の主値をとることにより求められるが, 迂回路からの寄与 (留数の半分) を考慮する必要がおこる. この迂回路からの寄与は虚数の値を与えるので, 周波数方程式の右辺は複素数になり, 局在モードの周波数は実数ではなくなる, したがってこの場合, 定在振動は存在しない.

参考文献

- [1] Sievers, A. J. & Takeno, S., "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 970-973 (1988).
- [2] 武野正三: "格子力学と非線形波動," 数理科学 9 月, 54-61 (1995)
- [3] Evans, D. V., "Trapped acoustic modes," *IMA J. Appl. Math.*, **49**, 45-60 (1992).
- [4] Evans, D. V., Levitin, M., & Vassiliev, D., "Existence theorem for trapped modes," *J. Fluid Mech.*, **261**, 21-31 (1994).
- [5] Porter, R. & Evans, D. V. "Trapped modes about tubes bundled in waveguides," in *Diffraction and scattering in fluid mechanics and elasticity*, (eds. Abrahams, I. D., Martin, P. A. & Simon, M. J.) Kluwer, 87-94 (2002).
- [6] Sugimoto, N. & Horioka, T., "Dispersion characteristics of sound waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**, 1446-1459 (1995).