

水の波の振幅減衰率の評価

九州大学応用力学研究所 岡村 誠 (OKAMURA Makoto)
Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

壁による減衰を考慮した水の波の振る舞いをポテンシャル流の数値シミュレーションで可能なことを示す。具体的には、壁での粘性の効果を壁に垂直方向の速度がゼロとならないという補正効果として、数値シミュレーションに取り入れる。

1 はじめに

粘性効果を取り入れた水の波の時間発展に関する研究は、非粘性の方程式に実験結果と一致するような大きさの線形減衰項を加えるのが普通である。たとえば、ファラデー波のように振動容器内に生成される波の振る舞いを扱うとき [1] などが、その典型である。容器の大きさと波長が同程度ならば、減衰は波全体でほぼ一様に起こるだろうから、この方法でいいであろう。しかし、容器の大きさに比べて小さい波長の場合にはよくない。この場合には、容器の壁近くの波がはじめに減衰して、そのあとに壁から離れたところの波が減衰し始める。このような現象を壁での粘性の効果を取り入れたポテンシャル流の数値シミュレーションで可能なことを示す。

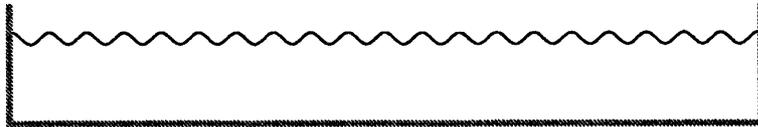
ここでは、2次元線形定在波の簡単な場合で、減衰補正効果を評価する。線形波の減衰効果は古くから、研究されている。例えば、エッジ波 [2]、円筒容器内の定在波 [3]、矩形容器内の定在波 [4] などで減衰率が評価されている。ここでは、Mei & Liu [5] の定式化に従う。表面張力を取り入れた線形波の減衰率を評価した研究もある [6] が、ここでは表面張力は無視する。表面張力を含んだ興味深い現象については「表面張力の物理学」[7] を参照。この本では固体表面に置かれた液体の広がり（濡れ）という難しい問題も議論されている。

実際の現象は、上で述べたような単純な定在波ではない。しかし、粘

性補正効果は壁近傍でのみ効いてくるので，補正効果を評価するとき
に定在波であると仮定しても悪くないということに注意しておく。た
だし，非線形の効果は高次の補正として効いてくるが，ここでは線形
波のみを扱う。

2 定式化

$x=0$ と $x=L$ に2枚の壁があり，その間に水が入っていて，波数 k の
定在波が励起しているとする。図では，見栄え上，底を描いているが，
無限深さとする。



表面張力の効果は取り入れていない。静止自由表面は $y=0$ とする。基
礎方程式は2次元線形ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} - 1 \quad (2)$$

となる。ここで，空間 x, y は波数 k ，時間 t は線形振動数 $\omega = \sqrt{gk}$ ，圧
力は $k/(g\rho)$ で無次元化されている。ただし，

$$\epsilon^2 \equiv \frac{\nu k^2}{\sqrt{gk}} \ll 1 \quad (3)$$

のように粘性効果は弱いとする。連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

である。表面 $y=\eta$ での（線形）運動学的条件と応力の連続条件は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - v = 0, \quad -pn_i + \epsilon^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j = 0 \quad (5)$$

となる。底 $y \rightarrow -\infty$ での条件と壁 $x=0, x=L$ での条件は

$$(u, v) \rightarrow 0, \quad u = v = 0 \quad (6)$$

となる。流速を渦なしと渦あり

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = (U, V) \quad (7)$$

に分解する。 \mathbf{U} は壁近傍の狭い境界層内でのみゼロとならないので、 x 方向を引き伸ばした座標 ζ を導入する。

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\zeta, y, t), \quad \zeta = \frac{x}{\epsilon} \quad (8)$$

無限深さの線形定在波を粘性係数に関する微小パラメータである ϵ で展開する。

$$\phi = \phi_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon\phi_1(\mathbf{x}, t) + O(\epsilon^2) \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0(\zeta, y, t) + \epsilon\mathbf{U}_1(\zeta, y, t) + O(\epsilon^2) \quad (10)$$

$O(\epsilon^0)$ の境界層解 $\mathbf{U}_0(\zeta, y, t)$ の x 成分 $U_0 = 0$ で、 y 成分 V_0 は以下の式から決まる。

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial \zeta^2} \quad (11)$$

$$V_0 = -\left. \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right|_{x=0}, \quad \text{on } \zeta = 0 \quad (12)$$

$$V_0 \rightarrow 0, \quad \text{as } \zeta \rightarrow \infty \quad (13)$$

V_0 が求まると U_1 は連続の式

$$\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0, \quad \Rightarrow \quad U_1 = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial V_0}{\partial y} d\zeta \quad (14)$$

から決まる。つまり、境界条件(12)が $-\partial\phi_0/\partial y = f(y)e^{i\omega t}$ のように与えられているならば、

$$V_0 = f(y)e^{i\omega t} \exp\left[-\frac{(1+i)\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}\zeta\right] \quad (15)$$

のように V_0 が決まる。具体的に、数値シミュレーションに組み込む場合には、 $f(y)$, ω が数値的に求まっているので、(15)より、 V_0 が決まり、それを(14)に代入すると U_1 が求まる。壁に垂直方向の流速 U_1 がポテンシャル流の通常の定式化に対する補正項となり、減衰効果をもたらすと期待できる。

参考文献

- [1] J. Miles & D. Henderson, Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22** (1990) 143–165.
- [2] F. Ursell, Edge waves on a sloping beach. *Proc. Roy. Soc.* **A214** (1952) 79–97.
- [3] K. M. Case & W. C. Parkinson, Damping of surface waves in an incompressible liquid. *J. Fluid Mech.* **2** (1957) 172–184.
- [4] G. H. Keulegan, Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. *J. Fluid Mech.* **6** (1959) 33–50.
- [5] C. C. Mei & L. F. Liu, The damping of surface gravity waves in a bounded liquid. *J. Fluid Mech.* **59** (1973) 239–256.
- [6] L. M. Hocking, The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech.* **179** (1987) 253–266.
- [7] ドウジェンヌ, プロシヤール-ヴィアール, ケレ (奥村剛訳), 表面張力の物理学. 吉岡書店 (2003).