数理解析研究所講究録 1368 巻 2004 年 49-56

粘性を考慮した平面液体シートの解析

阪大・基礎工　菅 健太郎 (Kentarou Kan)
阪大・基礎工　吉永 隆夫 (Takao Yoshinaga)
Faculty of Engineering Science, Osaka University

1　はじめに

液体シートの振る舞いはシート面上の表面張力波の安定性に大きく依存することはよく知られている．このような安定性の問題は流体力学での代表的な問題の一つであるばかりでなく，平板への塗装やコーティングにおけるカーテンフローコート法 [1]，噴水などの水空間の設計 [2] 等への応用において重要である．

液体シートに関する研究は古くから行われているが，特に外部流を考慮した非粘性の平面液体シートを伝播する微小攪乱には，二つのモードが存在することが知られている [3]．一つは，図 1.1 に示すようにシート断面の中心線は直線で厚みが変化することによって起こる対称モード，もう一つは図 1.2 に示すようにシートの厚みは一定で中心線が変化することによって起こる反対称モードである．線形ではこの二つのモードが互いに独立であり，外部流を考慮しない場合にはこれら両モードとも安定である．しかし，外部流を考慮した場合，長波長攪乱に対して両モードとも不安定となり，その領域は液体粘性を考慮した場合の方が非粘性の場合よりも拡大するが，外部流がなければ粘性は攪乱を安定化させるだけであることが明らかにされた [4]．

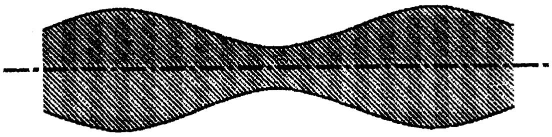


図 1.1: 対称モード

図 1.2: 反対称モード

一方，大変形する液体シートの解析では，シート表面が自由境界であるため境界条件が本質的に非線形となり，その解析的取り扱いは一般に困難である．しかし，シートが薄い場合，'薄膜近似' を用いて近似的にシートの運動が記述できることが知られている．この近似ではシート内部での諸量の値を中心面上での値に置き換えることにより比較的簡単であるが強い非線形性をもつ発展方程式を導くことができる [5,6]．そして，この方程式を数値的に調べることにより両モードとも線形安定であるにも関わらず，大きな攪乱を加えた場合にはシート破断が起きることが明らかにされた [5]．しかし上の解析では，液体粘性が考慮されておらず，大変形するシートの振る舞いに及ぼすこの影響がいまだ明らかにされていない．

そこで本研究では，外部流を考慮しない粘性液体シートに薄膜近似を適用し，粘性を考慮した非線形発展方程式を導出する．その後，その発展方程式を基に線形解析と非線形数値解析を行い，液体シートの振舞に対する粘性の影響を明らかにする．

2 問題の定式化

図 2.1 に示すような二次元平面液体シートを考える．座標系は主流方向を x, シートの厚み方向を y とする直交座標系をとる．シート厚みの半分を a とし，中心面は $y=\eta(x,t)$, 上下界面は $y=\eta\pm a=h_\pm(x,t)$ で規定されている．さらに，流体の x,y 方向の速度成分をそれぞれ u,v とする．平衡状態でシートは平らであり，そのときの半厚みを A_0, 主流速度を U_0 とする．また,σ は界面での表面張力係数,ρ は液体の密度,μ は液体の粘性係数であり，液体は非圧縮と仮定する．

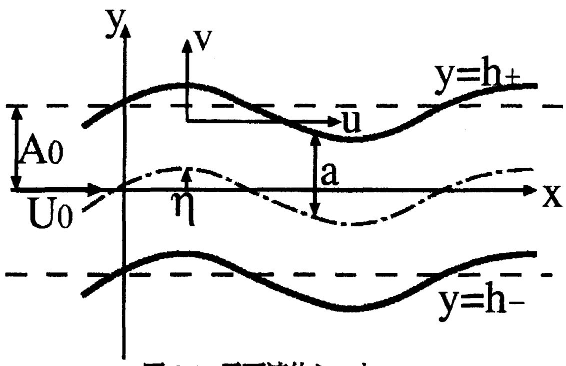


図 2.1: 平面液体シート

2.1 基礎方程式および境界条件

まず，基礎方程式で連続の式は，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{2.1}$$

N-S 方程式の x,y 成分はそれぞれ

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2.2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2.3}$$

で与えらる．この三つの基礎方程式を次に述べる境界条件の下で解く．このとき，シート両界面 $y=h_\pm$ で運動学的条件より

$$v=\frac{\partial h_\pm}{\partial t}+u\frac{\partial h_\pm}{\partial x}, \tag{2.4}$$

を満足しなければならない．またシート両界面での接線方向と法線方向の応力連続条件より，

$$\begin{aligned}p_\pm=&\mp\sigma\frac{\partial^2 h_\pm}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial h_\pm}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\\&+\frac{2\mu}{1+(\frac{\partial h_\pm}{\partial x})^2}\left\{\left[1-\left(\frac{\partial h_\pm}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial h_\pm}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$2\frac{\partial h_\pm}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left[1-\left(\frac{\partial h_\pm}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \tag{2.6}$$

を得る．ここで $p_\pm$ はそれぞれ $y=h_\pm$ での圧力である．

2.2 薄膜方程式

上で示された基礎方程式及び境界条件に以下で示す薄膜近似を用いて非線形発展方程式を導出する．まず，シート厚みが薄いとして u,v,p を中心面からの距離 $|y-\eta|$ で

$$u = u_0+u_1(y-\eta)+u_2(y-\eta)^2+\cdots, \tag{2.7}$$

$$v = v_0+v_1(y-\eta)+v_2(y-\eta)^2+\cdots, \tag{2.8}$$

$$p = p_0+p_1(y-\eta)+p_2(y-\eta)^2+\cdots, \tag{2.9}$$

のように展開する.基礎方程式と境界条件に上式を代入し,$O(\partial a/\partial x) \simeq O(a)$ と仮定しシート厚みの2乗程度 $O(a^2)$ 以上の微小項を無視すると,最終的に a,η,u_0,v_0 に関する四連立の非線形発展方程式(薄膜方程式)を得る.その方程式を代表長さ A_0,代表速度 U_0 で無次元化した結果を以下に示す:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\partial(a u_0)}{\partial x}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_0 - u_0\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial t} &= -u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{We}\left(\frac{\partial P_s}{\partial x} - \frac{\Delta P_s}{2a}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\ &\quad + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_1\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2u_2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2u_2 - \frac{\partial P_v}{\partial x} + \frac{\Delta P_v}{2a}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right],\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_0}{\partial t} &= -u_0\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{We}\frac{\Delta P_s}{2a}\\ &\quad + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - v_1\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2v_2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2v_2 - \frac{\Delta P_v}{2a}\right].\end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで,u_1,u_2,v_1,v_2 は η, a, u_0, v_0 の関数であり,

$$u_1 = \left[1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-2}\left\{-\left[1-\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial v_0}{\partial x} + \left[3+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right\}, \tag{2.14}$$

$$v_1 = -\left[1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-2}\left[1-\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right), \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}u_2 = \left[1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-2}&\left\{\frac{1}{2}\left[3+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial v_1}{\partial x}\right.\\ &\left.\quad - \frac{\partial(\ln a)}{\partial x}\left[\left(1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)v_1 - \frac{\partial v_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}v_2 = \left[1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-2}&\left\{-\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right.\\ &\left.\quad - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial(\ln a)}{\partial x}\left[\left(1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)v_1 - \frac{\partial v_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

さらに $P_s,\Delta P_s,P_v,\Delta P_v$ は

$$P_s = \frac{p_{s+}+p_{s-}}{2}, \qquad \Delta P_s = p_{s+} - p_{s-}, \tag{2.18}$$

$$P_v = \frac{p_{v+}+p_{v-}}{2}, \qquad \Delta P_v = p_{v+} - p_{v-}. \tag{2.19}$$

ただし,

$$p_{s\pm} = \mp\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)\left[1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}, \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}p_{v\pm} = 2\left[1+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\right]^{-1}&\left\{\left[1-\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\right](v_1 \pm 2av_2)\right.\\ &\left.- \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{\partial a}{\partial x}\right)\left[u_1 + \frac{\partial v_0}{\partial x} - v_1\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm a\left(2u_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x} - 2v_2\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.21}$$

となる.また,上式で用いられている We,Re はそれぞれウェーバー数,レイノルズ数で以下のように定義している:

$$We = \frac{{U_0}^2}{\sigma/(\rho A_0)}, \qquad Re = \frac{\rho A_0 U_0}{\mu}. \tag{2.22}$$

3 線形解析

平衡状態を上線付き文字で表すとする．平衡状態での半厚み A_0 と主流速度 U_0 で無次元化しているので $\bar{a} = \bar{u}_0 = 1, \bar{\eta} = \bar{v}_0 = 0$ となる．これに波数 k と角周波数 ω をもつ以下の微小攪乱を加える:

$$a = \bar{a} + \hat{a}\exp\{i(kx - \omega t)\}, \tag{3.1}$$

$$\eta = \bar{\eta} + \hat{\eta}\exp\{i(kx - \omega t)\}, \tag{3.2}$$

$$u_0 = \bar{u}_0 + \hat{u}_0\exp\{i(kx - \omega t)\}, \tag{3.3}$$

$$v_0 = \bar{v}_0 + \hat{v}_0\exp\{i(kx - \omega t)\}. \tag{3.4}$$

上式を式 (2.10)〜(2.13) に代入し，二次以上の微小項を無視すると自明解 ($\hat{a} = \hat{\eta} = \hat{u}_0 = \hat{v}_0 = 0$) 以外の解は

$$\hat{\eta} = \hat{v}_0 = 0, \text{ かつ } \omega_\pm = k - \frac{2i}{Re}k^2 \pm k^2\sqrt{\frac{1}{We} - \frac{4}{Re^2}}, \tag{3.5}$$

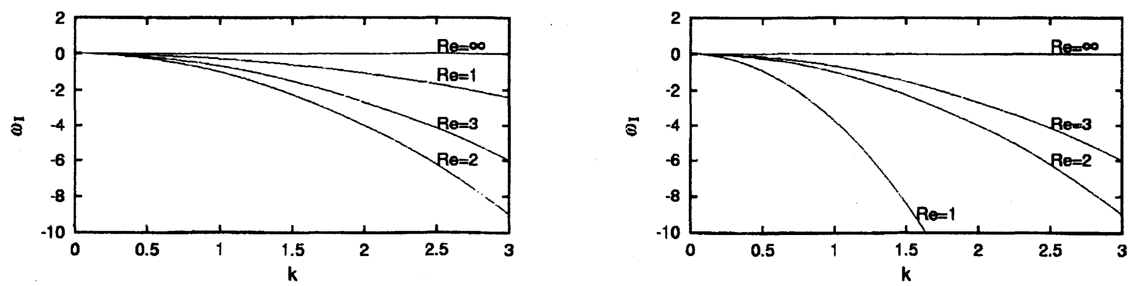
$$\hat{a} = \hat{u}_0 = 0, \text{ かつ } \omega_\pm = k \pm k\sqrt{\frac{1}{We}}, \tag{3.6}$$

となる．式 (3.5) は $\hat{\eta} = \hat{v}_0 = 0$ より対称モード，式 (3.6) は $\hat{a} = \hat{u}_0 = 0$ より反対称モードを示し，両モードに対し ω は二つずつ存在しそれぞれを $\omega_\pm$ としている．

以下では線形時間安定性を調べるため波数 k を実数，角周波数 ω を複素数 $\omega_R + i\omega_I$ とする．このとき，攪乱成分は $\exp\{\omega_I t\}\exp\{i(kx - \omega_R t)\}$ に比例するので，ω_I は増幅率となり，$\omega_I > 0$ の場合にシートは不安定となる．

3.1 対称モード

図 3.1(a)(b) にそれぞれ $\omega_\pm$ の場合の $We = 1$ での波数 k と増幅率 ω_I の関係を示す．どちらの場合も非粘性 ($Re = \infty$) では $\omega_I = 0$ となり，粘性がある場合には $\omega_I < 0$ となり，k が大きくなるほど $|\omega_I|$ は大きくなる．つまり，対称モードでは非粘性の場合に中立安定で，粘性は攪乱を減衰させ，その効果は高波数の攪乱に対してほど大きい．また $\omega = \omega_+$ の場合には $Re = 2\sqrt{We}$ で減衰率は最大となり，それより粘性が強い場合には減衰率は反対に低下する．一方，$\omega = \omega_-$ では粘性が強いほど減衰率は大きくなる．



(a) $\omega = \omega_+$　(b) $\omega = \omega_-$

図 3.1: 波数 k と増幅率 ω_I の関係 ($We = 1$ の場合)

3.2 反対称モード

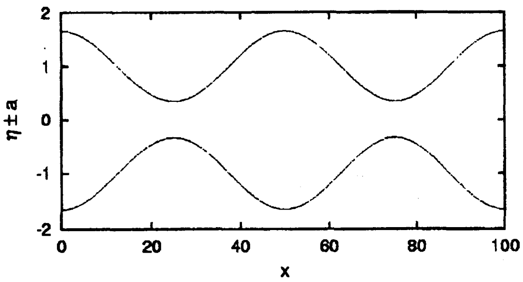
式 (3.6) より $\omega_\pm$ は常に実数となるので，いつでも中立安定である．すなわち，式 (3.6) がレイノルズ数を含まないことから，線形では粘性の影響が現れないことは明らかである．

4 数值解析

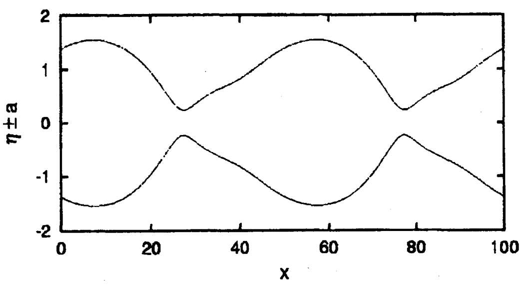
ここでは $t=0$ での初期値として，対称モードに対しては $a=1+\alpha\cos(kx), \eta=0, v_0=0$ を，反対称モードに対しては $\eta=\alpha\cos(kx), a=1, u_0=1$ に対するシートの時間発展を式 (2.10)〜(2.13) を数値的に解くことにより調べる．ただし，対称モードでの u_0 および反対称モードでの v_0 の値は線形解析で得られた結果を用いている．$We=1$ とし，波数 k は撹乱の波長が 50 となるように $k\simeq 0.1257$ として周期境界条件を用いている．また，計算法としては空間微分に中心差分を，時間発展にはルンゲ-クッタ法を用いている．

4.1 対称モード

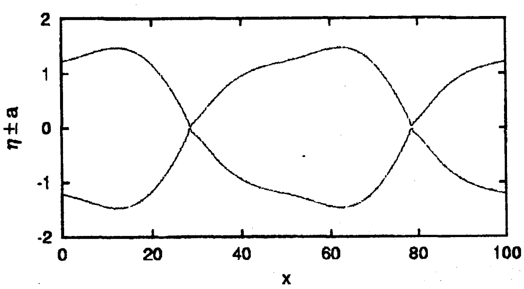
図 4.1 は $\alpha=0.65$ の対称モード撹乱を非粘性 ($Re=\infty$) シートに加えた場合の $t=0,50,94$ でのシート形状を示している．前節で述べたように線形解析によると，非粘性では中立安定である．それにも関わらず，大きな撹乱が加えられた場合シート厚みが薄くなる部分ができ，シート破断が起こる (図 4.1(c))．シート破断が起こる最小の初期撹乱振幅 α を臨界振幅 α_c とすると，非粘性では $\alpha_c\simeq 0.62$ となる．図 4.2 は $Re=2,\alpha=0.9$ の場合の時間発展を示しており，粘性は撹乱を減衰させシートを平らにすることがわかる．そのため,$\alpha=0.9$ という大きな撹乱を加えてもシートは破断しない．



(a) $t=0$

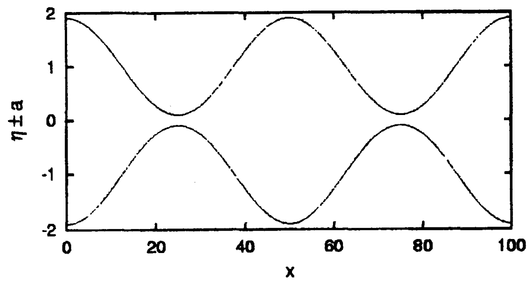


(b) $t=50$

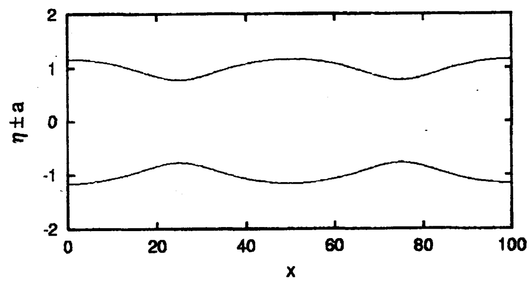


(c) $t=94$

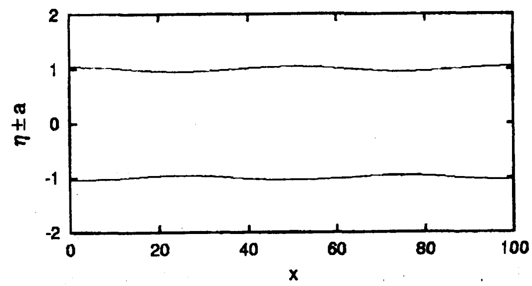
図 4.1: シートの時間発展 ($Re=\infty,\alpha=0.65$)



(a) $t=0$



(b) $t=100$

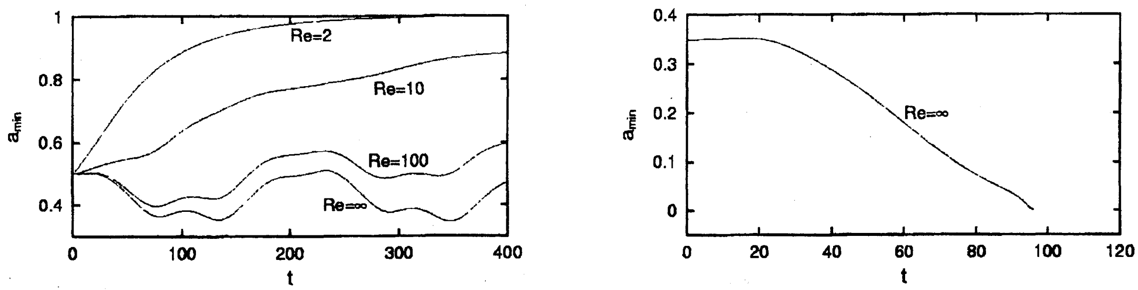


(c) $t=200$

図 4.2: シートの時間発展 ($Re=2,\alpha=0.9$)

図 4.3(a) は $\alpha=0.5$ での最小厚み a_{min} の時間変化を示している．非粘性では，線形解析によると最小厚みは一定のままであるが，非線形効果により最小厚みは薄くなったり，厚くなったりを繰り返す．最小厚みは粘性が弱い

場合 ($Re = 10, 100$) には増加減小を繰り返しながらもゆるやかに増加し，粘性が強い場合 ($Re = 2$) は単調に増加する．一方，図 4.3(b) は $Re = \infty, \alpha = 0.65$ の場合 ($\alpha > \alpha_c$) で，最小厚みが $a_{min} = 0$ となった $t = 94.2$ でシートは破断する．



(a) $\alpha = 0.5$　　(b) $\alpha = 0.65$

図 4.3: 最小厚み a_{min} の時間変化

図 4.4 は図 4.1(c) のシート内速度分布を示している．図より厚みが薄くなっている部分で主流方向と逆向きの流れが発生していることがわかる．図 4.5 は図 4.4 での中心面の速度 u_0 から主流速度 $\bar{u}_0$ を引いた $\tilde{u}_0(= u_0 - \bar{u}_0)$ を示しており，厚みが薄くなる $x \simeq 25.3, 75.3$ 近傍で大きな逆向き速度が現れていることがわかる．

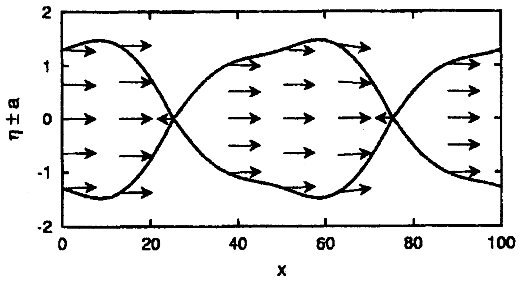


図 4.4: シート内の速度分布

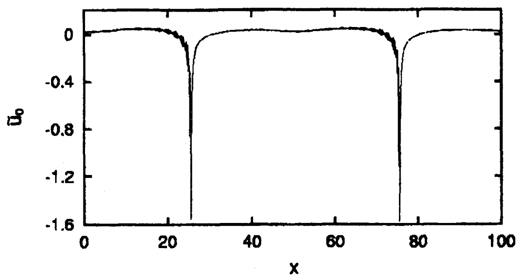


図 4.5: x 方向の速度変動

図 4.6 はレイノルズ数 Re と臨界振幅 α_c の関係を示している．Re が十分大きい場合,$\alpha_c \simeq 0.62$ であり，$Re = 1000$ 付近から α_c は急に増加し，$Re = 200$ ではすでに $\alpha_c = 1$ となっている．対称攪乱では,$\alpha < 1$ であるので，$Re \geq 200$ ではシートはどのような攪乱を加えても破断しないといえる．

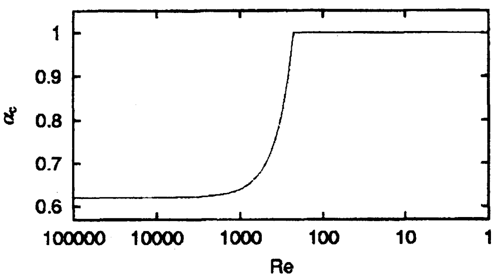
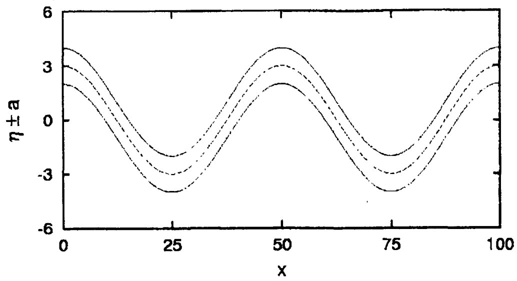


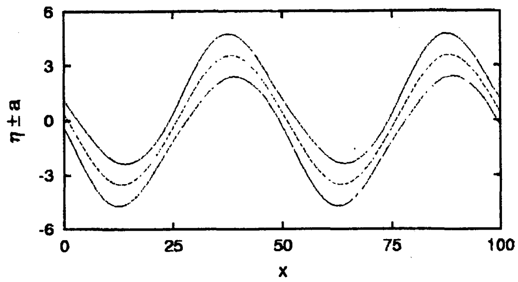
図 4.6: Re と臨界振幅 α_c の関係

4.2 反対称モード

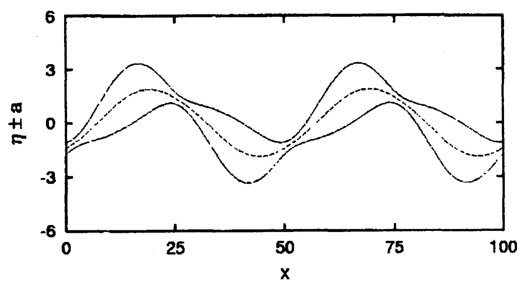
図 4.7 と図 4.8 は $\alpha = 3$ の反対称モード攪乱を非粘性 ($Re = \infty$) シートと粘性 ($Re = 1$) シートに加えた場合のシートの時間発展を示している．線形解析によると対称モードと反対称モードは独立である．しかし，非線形数値解析によると $Re = \infty$ では中心面に変動 (反対称攪乱) を加えているにも関わらず，時間が経つと大きな厚み変動 (対称攪乱) が起こっている．その厚み変動のため，シートには山と谷の部分に瘤ができ (図 4.7(c))，最終的に厚みが 0 となる部分ができ破断に至る．$Re = 1$ でも厚み変動が起こるが，非粘性の場合に比べると，その厚み変動は十分小さい．



(a) $t = 0$

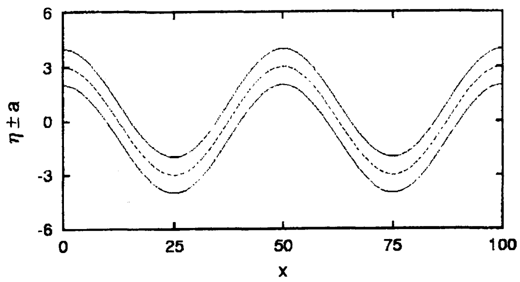


(b) $t = 70$

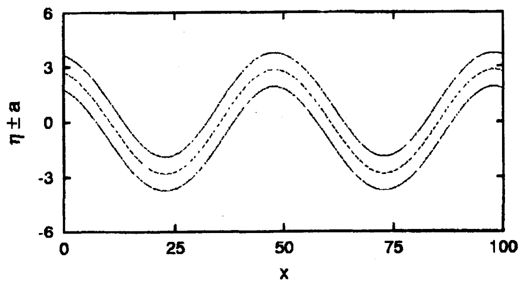


(c) $t = 140$

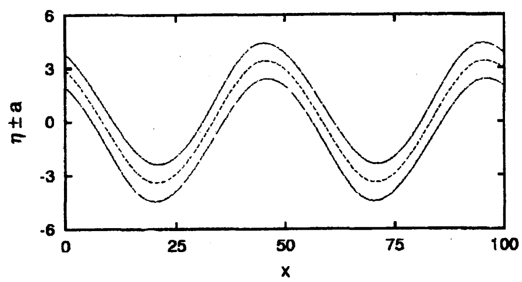
図 4.7: シートの時間発展 ($Re = \infty$,$\alpha = 3$)



(a) $t = 0$



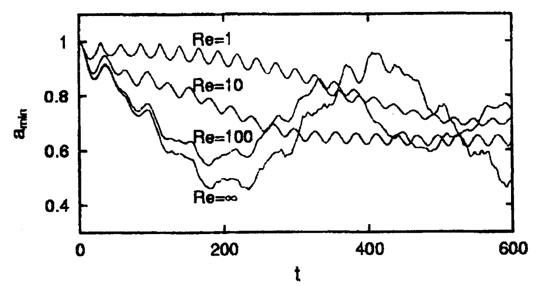
(b) $t = 100$



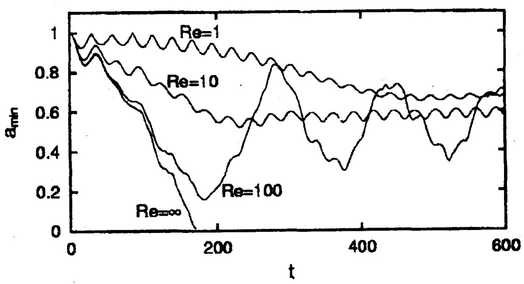
(c) $t = 200$

図 4.8: シートの時間発展 ($Re = 1$,$\alpha = 3$)

図4.9は$\alpha = 2.75$と$\alpha = 3$での最小厚みa_{min}の時間変化を示している．最小厚みは始めは薄くなったり，厚くなったりしながら減小していくが，ある程度薄くなると減小しなくなる (図4.9(a))．$\alpha = 3$の非粘性の場合($Re = \infty$)にはα = 3では$t \simeq 170$で最小厚みが0となり破断するが，粘性が強いほど最小厚みは薄くなりにくく粘性シート少なくとも$Re = 100$以下では破断しない．表1は$Re = \infty, 100, 10, 1$のシートに初期振幅振幅$\alpha = 2.75, 3, 5, 10, 15$の攪乱を与えた場合にシートが破断するかどうかを示しており，○は破断せず，×は破断しカッコの中の値は破断の起る時間を示している．表より粘性が強いほど臨界振幅α_cは大きくなり，破断に至るまでの時間も長くなることが明らかである．



(a) $\alpha = 2.75$



(b) $\alpha = 3.00$

図 4.9: 最小厚み a_{min} の時間変化

表 1: シートの破断

	$Re=\infty$	$Re=100$	$Re=10$	$Re=1$
$\alpha=2.75$	○	○	○	○
$\alpha=3$	× ($t=169.8$)	○	○	○
$\alpha=5$	× ($t=54.3$)	× ($t=86.2$)	○	○
$\alpha=10$	× ($t=33.2$)	× ($t=45.0$)	× ($t=151.9$)	○
$\alpha=15$	× ($t=25.3$)	× ($t=28.2$)	× ($t=35.0$)	× ($t=213.5$)

○:破断せず
×:破断

図4.10は$\alpha=3$の撹乱を非粘性シートに加えた場合の$t=160$でのシート内速度分布を示している．図4.11は図4.10での中心面の$\tilde{u}_0(=u_0-\bar{u}_0)$を示しており，対称モードの場合と同様に，厚みが薄くなる$x\simeq 22.7, 47.7, 72.7, 97.7$近傍で大きな逆向き速度が現れていることがわかる．

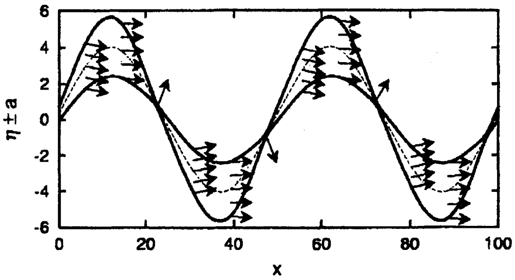


図 4.10: シート内の速度分布

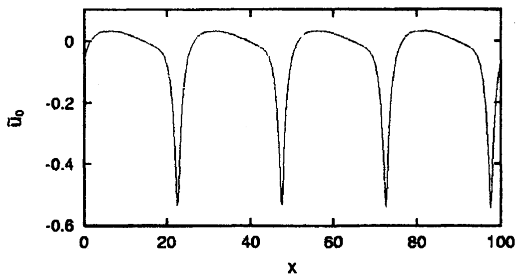


図 4.11: x 方向の速度変動

5 結論

これまでに得られた結果をまとめると以下のようになる:

- 長波領域で粘性を考慮した非線形発展方程式を導出した．
- 線形解析より，非粘性では両モードとも中立安定であり，さらに反対称モードでは粘性の効果は現れず，対称モードでは粘性はシートを安定化させる効果を持つ．そして，対称モードの一つ$(\omega=\omega_+)$では減衰率が$Re/\sqrt{We}=2$で最大となり，もう一つ$(\omega=\omega_-)$では粘性が強いほど減衰率は大きくなることがわかった．
- 非線形数値解析より，非粘性シートは崩壊を起こすが，両モードとも粘性はその崩壊を起りにくくする．特に対称モードではどのような大きさの撹乱に対しても粘性がある程度大きくなると崩壊は起らないことがわかった．

参考文献

[1] 島健太郎: 特殊機能塗料の開発 (1987),290.

[2]L.W.Casperson: J. Sound and Vibration **162**(1993),251.

[3] H. B. Squire: Brit. J. Appl. Phys. **4**(1953), 167.

[4] X.Li & R.S.Tankin: J. Fluid Mech. **226**(1991), 425.

[5] C.Mehring & W.A.Sirignano: J. Fluid Mech. **388**(1999), 69.

[6] T.Yoshinaga & K.Kotani: J.Phys. Soc. Jpn **70** (2001), 372.