

量子カオスとナノサイエンス¹

— 重力制御下での巨視的波束の量子干渉効果について —

大阪市立大学大学院 工学研究科 中村勝弘², 中園直史³
(Katsuhiko Nakamura and Naofumi Nakazono)
Graduate School of Engineering, Osaka City University

1 はじめに

講演では、まず、量子カオスと量子輸送についてレビューをおこなった。特に、開放系量子ドットにおける磁気コンダクタンスのフラクタル構造の謎の理論的な説明を行なった。開放系量子ドットをモデル化するものとして、サドルを持つユニバーサルな力学系であるヘノン=ハイレス系を採用する。ヘノン=ハイレス系では、系のエネルギー（フェルミエネルギー）がポテンシャルのサドルの値に近づくと、(1) カオスの海の中に互いに自己相似な周期軌道の family が出現すること、(2) family の構成員の面積は幾何級数をなしていること、がわかっている。電気伝導率（久保公式）に対する半古典表式に重要な寄与をする周期軌道は、上記の family に属する自己相似な周期軌道の集団である。磁場の効果は摂動論的に取り扱い、周期軌道の面積との積の形で位相因子に入り込む。周期軌道の和で表された電気伝導率（久保公式）の理論結果を見ると、各項の振幅と位相が、幾何級数的に変化していくワイエルシュトラス型の関数形になっており、そのフラクタル次元は、実験結果を良く再現する。また、フラクタル次元は、ポテンシャルサドルの曲率と一対一に対応しており、これも実験結果と一致する。これらの結果は、既に Agung Budiyo 氏との一連の共同論文として発表されている。

本稿では、講演の後半部で展開した非線形シュレーディンガー方程式と量子干渉効果について詳しく記載しよう。これは、他の学術論文に未発表のものである。この研究の究極の目的は、量子カオスの研究を「カオスの量子論的徴候」の研究にとどめないで、文字どおり、量子ダイナミクスにおけるカオスの誕生を見い出すことにある。近年、ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) の研究で着目されている Gross-Pitaevskii 方程式 (GPE) は、非線形シュレーディンガー方程式 (非線形項を持つシュレーディンガー方程式) であり、巨視的波動のカオスの誕生を期待できる力学系である。ここでは、時間発展の初期段階の考察に限定し、特に干渉問題に着目する。モデルは一電子干渉の実験で周知の二重スリットを用い、重力落下によりスリットで分裂した巨視的波束の

¹この原稿は、数理解析研究所研究集会「力学系理論の展開と応用」での講演に基づいている。

²E-mail: nakamura@a-phys.eng.osaka-cu.ac.jp

³E-mail: nakazono@a-phys.eng.osaka-cu.ac.jp

干渉縞を考察した。本研究では非線形項が干渉縞に及ぼす影響を明らかにした。また近年、宇宙開発プロジェクトに伴う微小重力、重力変調下における物理実験の企画立案が広く求められていることを考慮し、重力項を地表重力に固定せず、変調させることでの干渉縞に対する影響も明らかにした。非線形シュレーディンガー方程式に基づくエネルギースペクトルの計算や遷移確率の考察はここでは行なわない。

2 Gross-Pitaevski 方程式 (GPE) と無次元化

BEC 系は Gross-Pitaevskii 方程式 (GPE) により記述される。GPE は非線形シュレーディンガー方程式である。絶対零度付近では N_0 の粒子が同じ 1 粒子量子状態を占めている。単純な描像では系の多体波動関数は 1 粒子の波動関数の N_0 重積として書ける。これはハートリー多体波動関数である。もし、原子の相互作用が無ければ波動関数は 1 原子の時間依存シュレーディンガー方程式を満たす。しかし、BEC では原子が 2 体衝突により相互作用している。原子は極低温のため正面衝突つまり s 波衝突が重要となる。そして BEC は希薄気体のため、原子-原子相互作用はデルタ関数的で、強さが s 波散乱長 a で与えられるポテンシャルで近似できる。各原子はそれ以外の原子の存在による平均場で付加的なポテンシャルを感じる。局所的な原子密度に比例するこのポテンシャルはシュレーディンガー方程式に取り込まれる。その結果 GPE は次の式になる。

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V_{\text{trap}} \phi + u_0 |\phi|^2 \phi \quad (1)$$

ここで、 $u_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} N_0$ であり、 a は散乱長、 m は原子の質量。実験の再現などを通して GPE の正当性は確かめられている。

時間 1 次元、空間 2 次元系の GPE は次式のようにになる。

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \phi + u_0 |\phi|^2 \phi \quad (2)$$

ここで、 $u_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m l_z} N_0$ は 2 次元の相互作用であり、トラップポテンシャルは等方的とした。ここで N_0 は原子数であり、 $l_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ は特長的長さである。本研究では 2 次元系で重力を用いるので式 (2) に $mgy\phi$ (y 方向への重力落下) の項を加えて考察する (g は重力加速度)。 $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ の長さ (トラップの大きさ) を用いて無次元化する。

$$t' = \omega t, x' = \frac{x}{l}, y' = \frac{y}{l}, \phi' = l \phi$$

上の関係を式 (2) に代入し無次元化を行う。

$$i \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \phi' + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \phi' + u'_0 |\phi'|^2 \phi' + g' y' \phi' \quad (3)$$

ここで、 $u'_0 = 4\pi N_0 \frac{g}{\omega^2}$ 、 $g' = \frac{g}{\omega^2}$ である。また、重力はトラップを切った後の時間発展のときに加えるので初期波束の生成には寄与しないとす。

初期波束は次式で与えられる。

$$\phi'_{ini} = \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta}} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta}(x'^2 + y'^2)\right) \quad (4)$$

初期波束の幅 ($\sqrt{\Delta}$) はエネルギー最小化条件で与えることにしよう。無次元化されたエネルギーの表式は

$$E' = \int d^2\vec{r}' \left[\frac{1}{2} |\nabla\phi'|^2 + V'_{trap} |\phi'|^2 + \frac{u'_0}{2} |\phi'|^4 \right] \quad (5)$$

初期波束の式 (4) を式 (5) に代入する。

$$E' = \frac{1}{2\Delta} + \frac{\Delta}{2} + \frac{u'_0}{4\pi\Delta} \quad (6)$$

エネルギー最小化条件より、波束の幅は

$$\frac{\partial E'}{\partial \Delta} = -\frac{1}{2\Delta^2} + \frac{1}{2} - \frac{u'_0}{4\pi\Delta^2} = 0 \quad (7)$$

で決まる。式 (7) より Δ は

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{u'_0}{2\pi}} \quad (8)$$

となる。この初期波束を用いて、以下の考察を行う。

3 モデルと計算方法

ここで、モデルと計算方法について説明しよう。本研究では BEC の干渉問題を考察することを目的とする。干渉を考察する上で有名な一電子干渉の 2 重スリットを用いることにした。BEC は巨視的量子状態であり、通常の量子力学と違い観測しても波束の収縮が生じない非破壊の測定が出来るメリットがある。また、GPE は線形シュレディンガー方程式にはない非線形項を持っている。この非線形性は Feshbach 共鳴によりある程度自由に变化させることができる。つまり、系に対する非線形性の影響の考察に適している。本研究では干渉縞にこの非線形性がどのように影響を及ぼすのかを明らかにする。また、重力制御下での考察も行う。

モデルは 2 次元の重力系で、BEC を重力落下させ 2 重スリットを通過させることで 2 つに分かれた BEC が互いに干渉する様子を考察する。系が従う GPE と用意する初期波束は、それぞれ、式 (2)、式 (3) を用いて計算を進めていく。ここで注目したいのは干渉縞に対する非線形性の効果と重力の影響である。式 (3) を見てもわかるように非線形項により初期波束の大きさが異なってくる。初期波束の大きさが変わることによる影響、つまり初期波束と 2 重スリットの大きさの関係が異なる影響を取り除きたい。そのために閉じ込めポテンシャルの振動数を変化させ初期波束の大きさが一定になるようにする。

具体的に、 $x' - y'$ 平面での閉じ込めポテンシャルの振動数 ω を非線形項 u'_0 に対応して調節し、

$\omega \rightarrow \omega\Delta$ にする ($u_0 = 4\pi N \frac{e}{l_z}$ における l_z は2次元の閉じ込めポテンシャルに関与しないため不変)。この異方的スケージングにより GPE と初期波束は次式になる。

$$i \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \phi' + \frac{\Delta^2}{2} (x'^2 + y'^2) \phi' + u_0' |\phi'|^2 \phi' + g' y' \phi' \quad (9)$$

$$\phi'_{ini} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right) \quad (10)$$

時間発展に際して閉じ込めポテンシャル (式 (9) の右辺第2項) を取り除いて重力落下させるので計算上は非線形項 u_0' に依存して特別なことは起こらない式になっている。

初期波束を時間発展させるため、2次元平面を grid に分け、式 (9) を差分方程式にする。具体的な数値計算の方法について以下に述べよう。

まず、数値計算の方法を概念図を用いて説明し、具体的な差分方程式、計算する量などを示していく。差分方程式は陰解法で、値が収束するまで繰り返し計算を行うことになる。差分方程式には Crank-Nicolson 法や Peaceman-Rachford により開発された Alternating Direction Implicit Method (ADI 法) がある。ADI 法の利点は2次元においては精度を大きく落とすことなく比較的高速な点である。本研究では両方の方法で計算を行い同様の結果を得た。

最初に用意する計算領域に対して説明する。図1にこのモデルの計算領域を描いた。 $x' - y'$ 平面で考察を行う。 y' 方向に重力がかかっている。初期の位置 (0,0) に波束の中心を置き、重力落下させる。 $y' = 5$ の位置に2重スリットを設定する。スリットの幅を1、スリットの中心間の距離を4とした。また、干渉縞を観測する位置、つまりスクリーンは $y' = 18 (= L_{sc})$ に設置する。このスクリーンは2重スリットとは違い波束には影響は与えず、単に測定する位置のみを表すものになっている。数値計算は時刻0で初期波束を (0,0) に用意し、式 (9) からトラップポテンシャルを切ったもの、つまり

$$i \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \phi' + u_0' |\phi'|^2 \phi' + g' y' \phi' \quad (11)$$

に従う時間発展を考察する。初期波束は u_0' に依存せず、式 (10) で与えられる。

4 干渉縞 (線形極限)

最初に、線形極限 ($u_0 = 0$) での結果、つまり通常のシュレーディンガー方程式にしたがう波束の結果を示す。とくに、干渉縞に注目する。

ここでの重力は $g' = 1$ とし、スクリーンは $L_{sc} = 18$ に設定している。最終時刻は波束の重心が重力落下し、スクリーン位置に到達した際の値を参考にした。最終時刻 T_{max} は $T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g}}$ となる。また、 $\delta x_s = \delta y_s = 0.1, \delta t = 0.002$ で計算を行った。

図2は、線形極限での時間発展のダイナミクスである。巨視的波束が重力落下し、2重スリットを通過した後、2つに分かれ干渉する様子が読み取れる。これが線形極限 ($u_0 = 0$) で重力 $g' = 1$ の

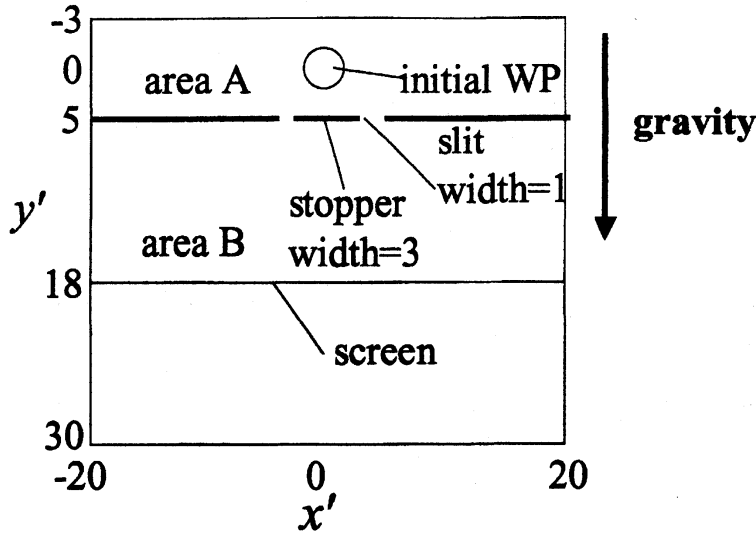


図 1: 数値計算を行う領域の図

干渉縞パターンである。スリットの上には、スリットの通過に失敗した波束の一部が残留し、それ自体がスリットに平行な方法に干渉縞を作っている。これからの議論は最終時刻 T_{max} で行う。

ところで、干渉縞が、2重スリットの片方を閉じた場合には生成しないことを示そう。Young の2重スリットで議論されるようにスリットの片方を閉じた場合との比較図を図3と図4は、それぞれ、スリットの片方を閉じた場合と両方開けた場合の波束のパターンである。さらに、図4に対応するスクリーン上での干渉縞パターンを図5に示した。これらは最終時刻での値である。明らかにスリットの片方を閉じた場合には干渉していないことがわかる。よって干渉には2つのスリットが必要であることが確認できた。今後は2重スリットのみ議論し、最終時刻 T_{max} での等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンを用いることにする。

5 干渉縞（非線形領域と重力制御）

線形極限での結果を基準とし、非線形性と重力の影響について議論する。これが、本稿の核心部分である。求める量は前章で示したように最終時刻 $T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{\mu c}}{g}}$ での等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンである。

ここでは非線形項を $u'_0 = -3, 0, 20$ の3パターン、重力を $g' = 1, 3, 5$ の3パターンとし、全体として9パターンの計算を行った。等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンより非線形性の効果、重力の影響を明らかにする。非線形性は波束の粒子性、波動性に関係し、重力はスクリーン上に到達した時の波束の速度を変化させる（deBroglie 波長の変化に対応）効果があると考えられる。これらがどのように干渉縞に影響を与えるのかを明らかにする。

図6は波束の等高線図をあらわしている。さらにスクリーン上での干渉縞パターンを図7に示

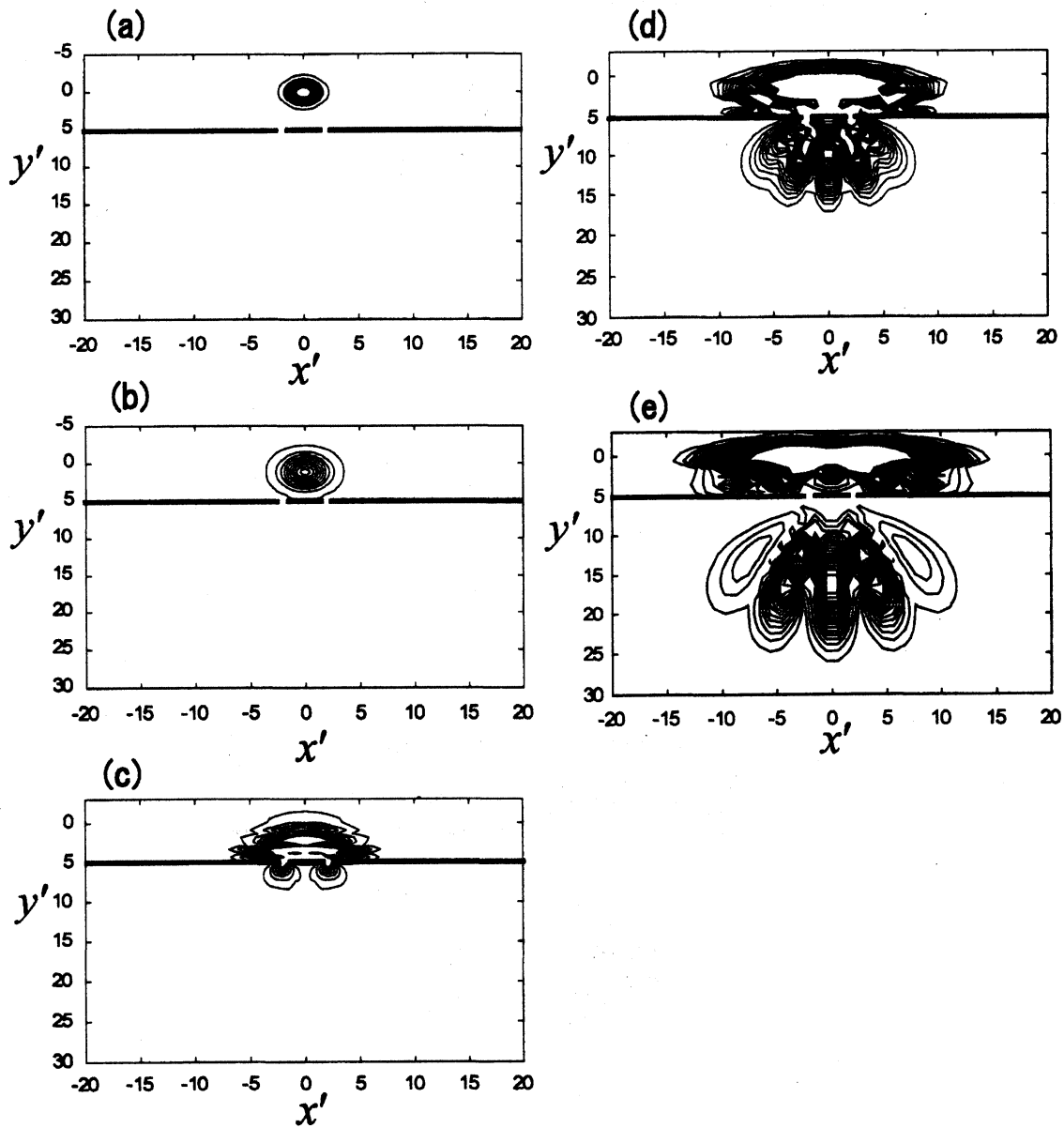


図 2: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。2重スリットの等高線図。(a)-(e) $t' = 0.0, 1.5, 3.0, 4.5, 6.0$ に対応。

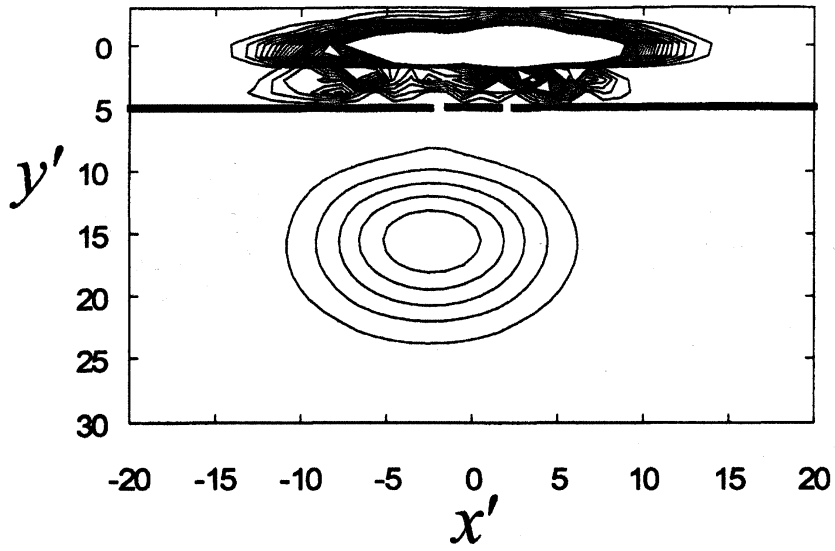


図 3: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。右のスリットを閉じた時の等高線図

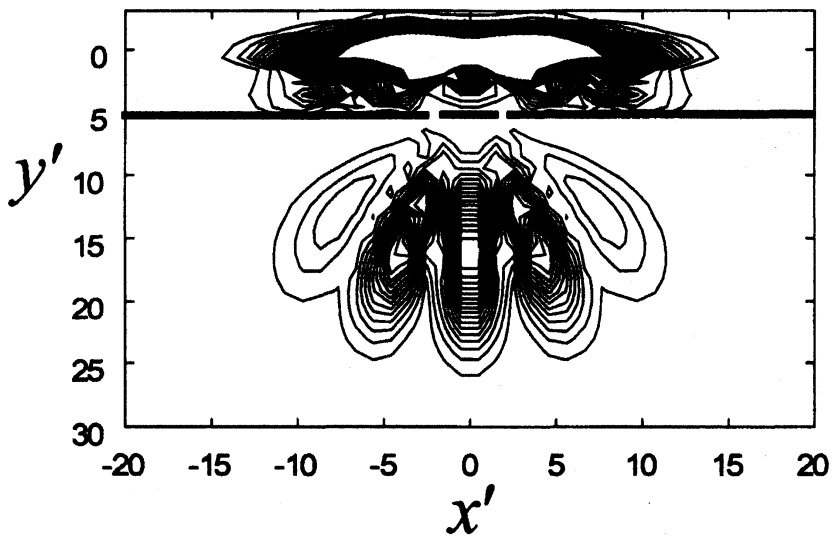


図 4: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。2重スリットの等高線図

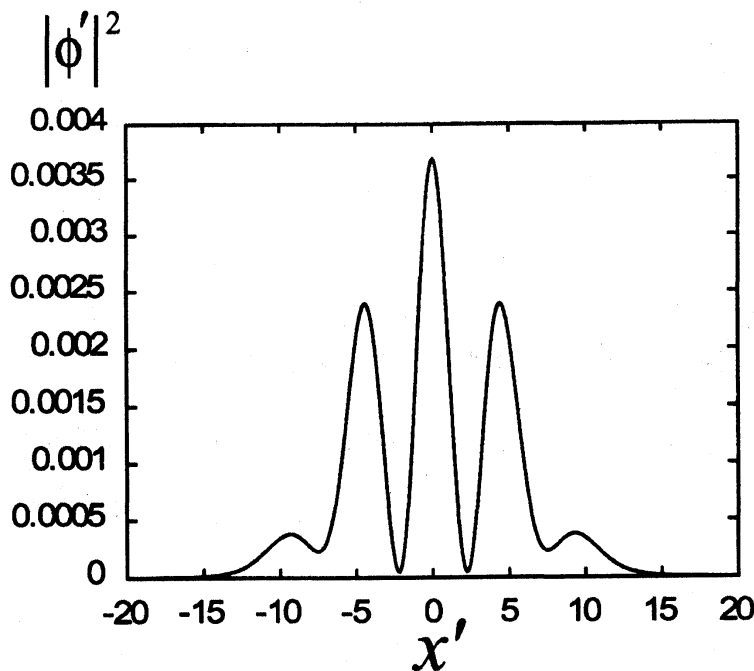


図 5: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。2重スリットのスクリーン上での干渉縞パターン

す。考察しやすくするため図7はスクリーン上で干渉縞パターンを規格化した値を用いている。縦軸は0-0.2で統一している。重力に注目した場合、干渉縞のピーク間隔が重力が増えるにつれて狭くなってきているのがわかる。これはスクリーン到達時の波束の速度が異なることにより、*deBroglie* 波長の変化が影響していると考えられる。次に、非線形性に注目すると波束が非線形項 u'_0 が大きいほど広範囲に広がっていることが確認できる。非線形性が負または小さいと波束が広がりにくい、つまり粒子性の性質を反映していると考えられる。また逆に非線形性が大きいと波束が広がりやすい、つまり波動性の性質を反映していると考えられる。さらに、スクリーン上の干渉縞パターンを用いて具体的な考察を行う。また、非線形項 $u'_0 = 50, 100$ に対しては重力 $g' = 5$ のみの結果を図8に示す

干渉縞パターンに対する非線形性と重力の影響を理論的に考察しよう。特に、スクリーン上での干渉縞パターンを用いて考察を行っていく。まずは非線形項一定とし、重力の影響を考察する。図7から干渉縞ピークの間隔を求める。結果を図9に示す。各 u'_0 に対して重力が干渉縞ピークの間隔を狭くしていることがわかる。これが干渉縞に対する重力の影響である。重力は波束の速度に影響を与える。重力制御下ではこの速度変化 (*deBroglie* 波長の変化) に対応した違いのある干渉が見られると考えられる。

干渉縞ピーク間隔は *deBroglie* 波長に比例する。具体的には最終時刻で *deBroglie* 波長が $\lambda' \equiv \frac{2\pi}{p'}$ であり、運動量 p' として波束の中心の「古典運動」の運動量を採用すると、 $p' = V_{max} = g'T_{max} = g'\sqrt{\frac{2L_{sc}}{g}} = \sqrt{2g'L_{sc}}$ となる。よって $\lambda' = \frac{2\pi}{\sqrt{2g'L_{sc}}}$ となる。 g' が増大すれば λ' が小さくなる。図9

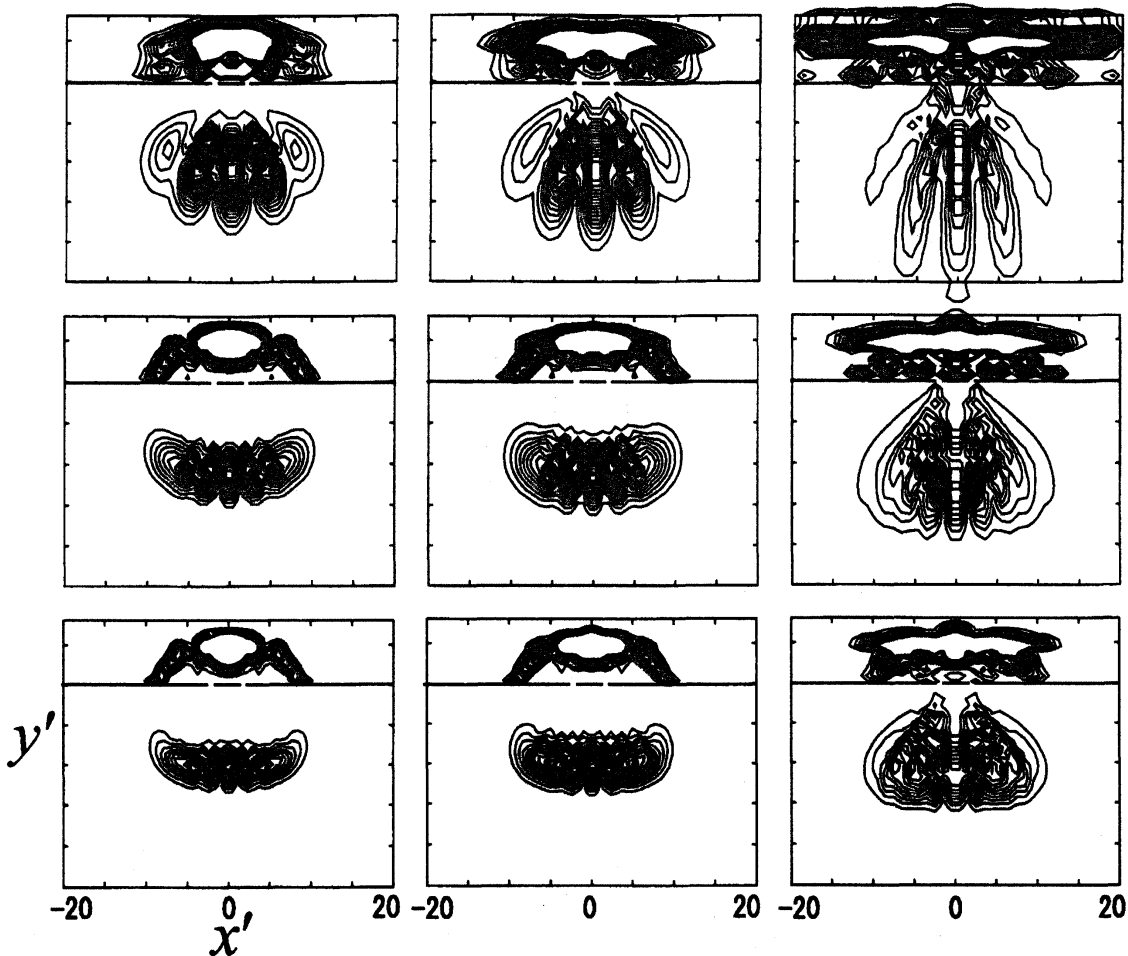


図 6: 等高線図。上から下へは重力の違い $g' = 1, 3, 5$ 。左から右へは非線形項の違い $u'_0 = -3, 0, 20$ 。

より、 $\lambda' \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ の関係が成立していることが読み取れる。

次に非線形性について着目する。非線形性は波束の広がりに関係している。つまり干渉の影響を受ける範囲の拡大を意味している。図 7 を見てもそれを理解することが出来る。また、ピーク数に着目すると $g' = 1$ ではピーク数の変化が見られない。これはピーク間隔が大きく、非線形性による波の広がりが起きても次のピークまで波が到達しないためであると考えられる。逆に $g' = 3, 5$ ではピーク数に変化が見られる。これは $g' = 1$ の場合と異なり、非線形性による波の広がりの影響で次のピークに波が到達するためピーク数が増加していると考えられる。

まとめると重力の増加は干渉縞ピーク間隔を狭める効果があり、非線形性の増大は波束の広がりを強める効果があることが明らかになった。これらの影響により、干渉縞が影響を受け、干渉縞ピーク数の増加 (図 10) などの現象を見ることが出来た。表 1 はピーク数の重力 (g') と非線形性 (u'_0) への依存性を示したものである。

波の広がりやピーク間隔が非線形性と重力にどのように依存しているかを明らかにすることにより、ピーク数の推測を行なおう。

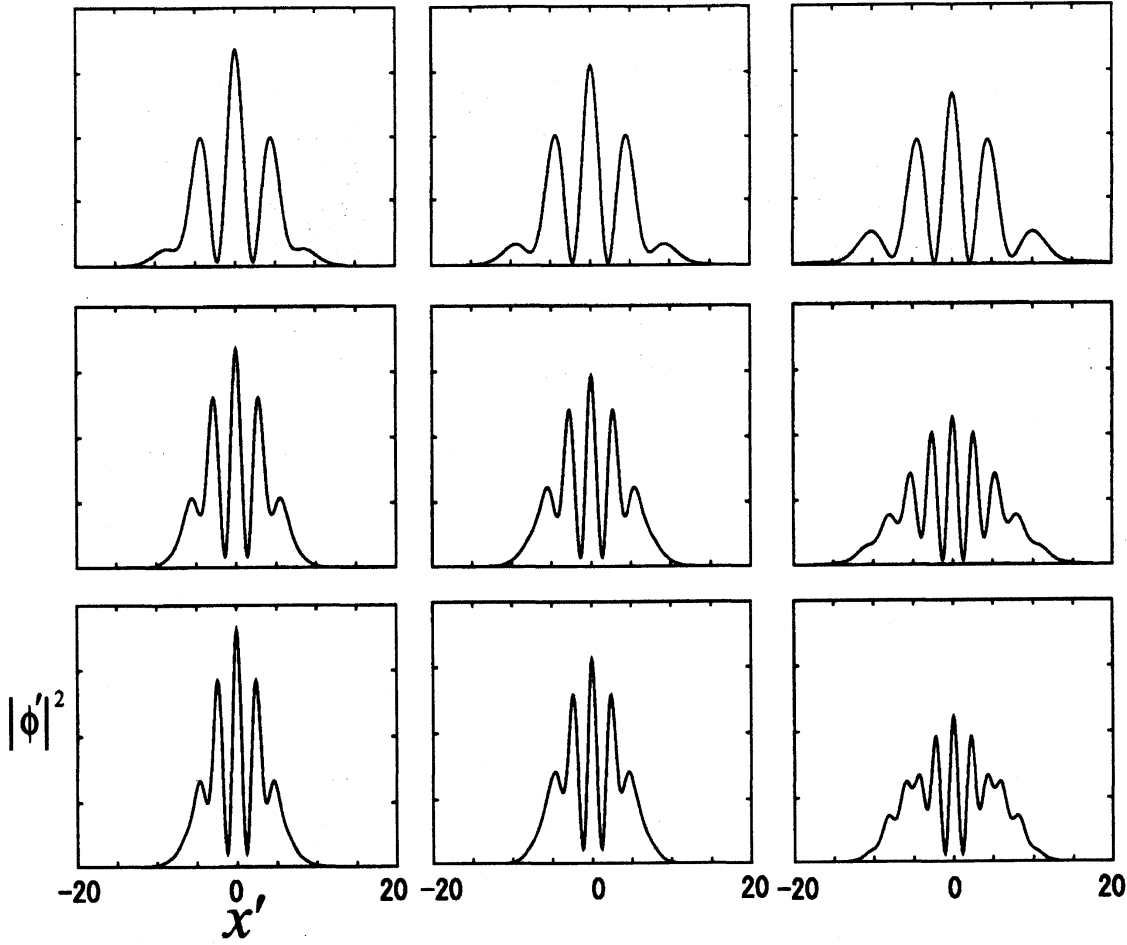


図 7: スクリーン上での干渉縞パターン。上から下へは重力の違い $g' = 1, 3, 5$ 。左から右へは非線形項の違い $u'_0 = -3, 0, 20$ 。

最初に波の広がりに対する推測を行う。ここでは波の広がり方だけに注目するので2次元波束を平面状円柱で近似 ($\phi = AR^{-1}$) する。GPE(閉じ込めポテンシャル、重力項は除く)は次式。

$$i\dot{\phi} = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + u_0 |\phi|^2 \right) \phi \quad (12)$$

この式に ϕ を代入する。

$$i(-R^{-2}\dot{R}) = -R^{-3} + A^2 u_0 R^{-3} = A^2 \left(u_0 - \frac{1}{A^2} \right) R^{-3} \quad (13)$$

$$\dot{R} = iA^2 \left(u_0 - \frac{1}{A^2} \right) R^{-1} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} R^2 \right) = iA^2 \left(u_0 - \frac{1}{A^2} \right) \quad (15)$$

t が大きな場合、波の広がりには次の関係になる。

$$R \approx \sqrt{u_0 - \frac{1}{A^2}} \sqrt{t} \quad (16)$$

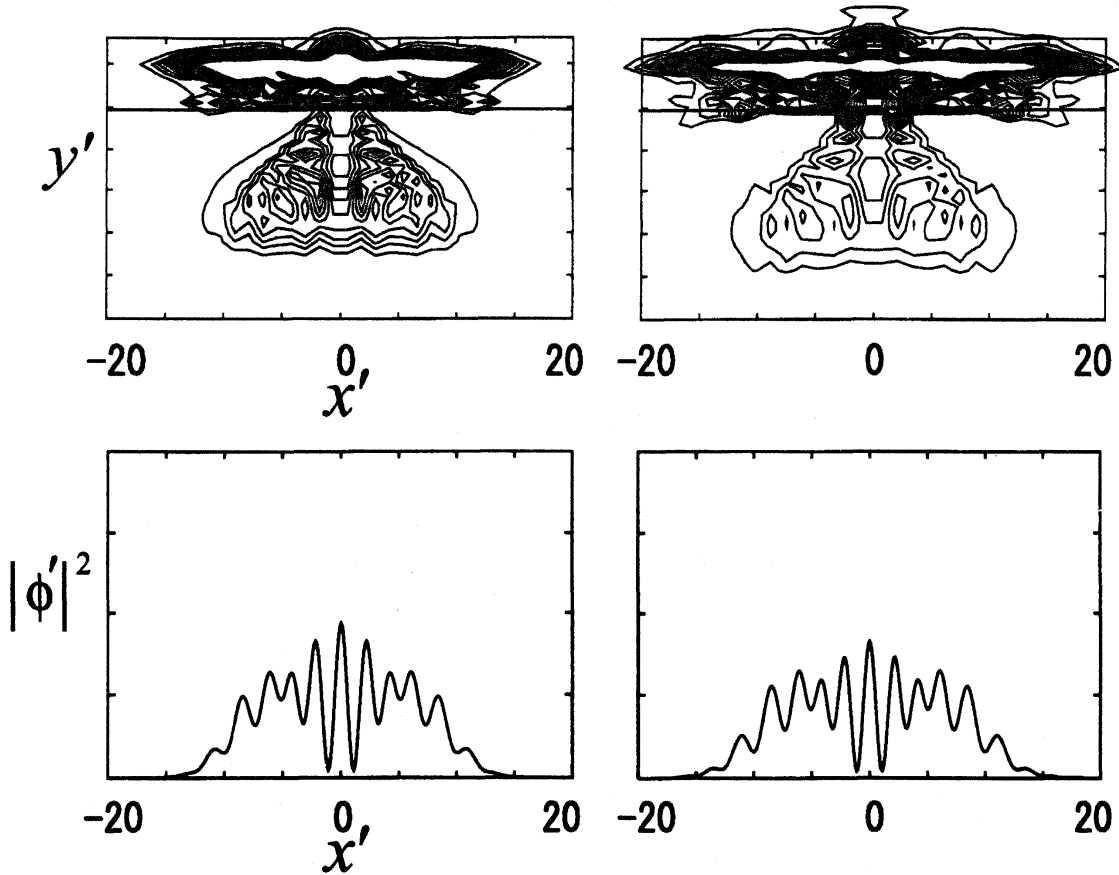


図 8: 等高線図とスクリーン上での干渉縞パターン。重力 $g' = 5$ の場合。左は $u_0 = 50$ であり、右は $u_0 = 100$ 。

ピーク数の考察は最終時刻 ($T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}}$) で行うので、 $t = T_{max}$ として計算すると波の広がり
は次のように推測される。

$$R_{sc} \propto \sqrt{\frac{u_0 - \frac{1}{A^2}}{\sqrt{g'}}} \quad (17)$$

次にピーク間隔の推測を行う。ピーク間隔には *deBroglie* 波長 λ' が大きく関係している。既に明らかにしているように、 $\lambda' \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ である。ピーク間隔 x'_{peak} は波長に比例しているので、 $x'_{peak} \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ となる。

ピーク数 = $\frac{\text{波の広がり}}{\text{ピーク間隔}}$ より、ピーク数が推測できるので上で得た R_{sc} と x'_{peak} を用いると次式の関係を得る。

$$\text{ピーク数} = \frac{R_{sc}}{x'_{peak}} \propto \sqrt{(u_0 - \frac{1}{A^2})\sqrt{g'}} \quad (18)$$

非線形性と重力が増大することでピーク数の増大が起こることがこの関係より推測される。本研究では、この推測に沿った結果 (表 1) を得ることが出来た。

さて、波束の 2 重スリットに対する透過確率を考察してみよう。つまり、スリットを通過した

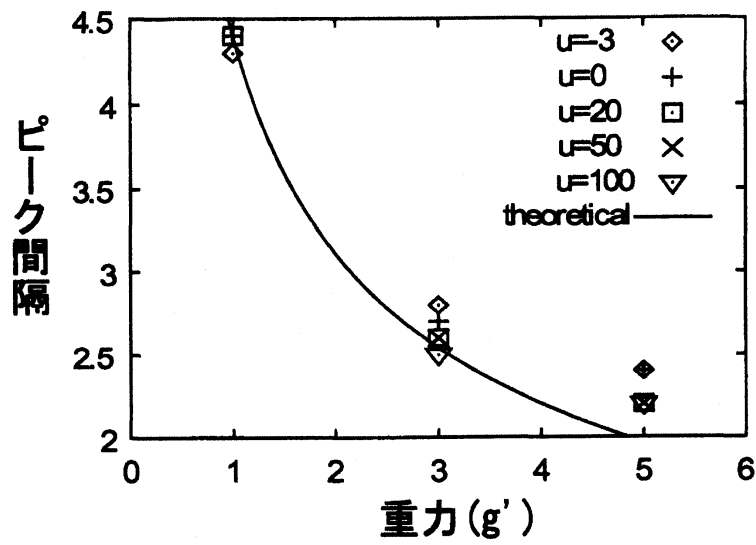


図 9: 中央とその隣のピーク間隔の図

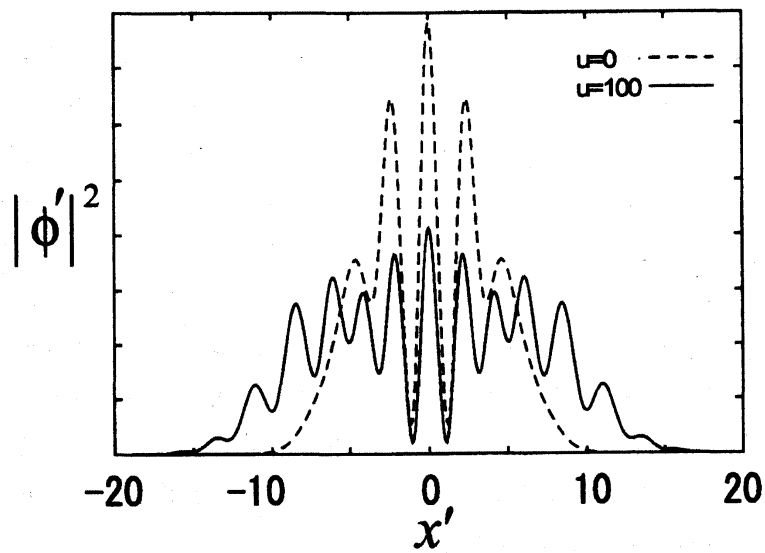


図 10: 重力 $g' = 5$ に対する非線形項 $u_0 = 0, 100$ のピーク数比較

		u'_0				
		-3	0	20	50	100
g'	1	5	5	5	/	/
	3	5	5	9	9	11
	5	5	5	9	11	13

表 1: ピーク数の変化

量と通過してない量を求めて、波束の何%が通過しているかを確認する。閉じ込めポテンシャルを切った後から2重スリットに到着するまでに非線形性の違いにより透過する確率も異なることが予想される。この量を求める方法は図1に示している areaA (非通過領域) と areaB (通過領域) のそれぞれの領域での確率を計算することである。式で書くと

$$Pr(A \text{ or } B) = \int \int_{A \text{ or } B} dx' dy' |\phi'|^2 \quad (19)$$

となる。 $Pr(A) + Pr(B) = 1$ で確率保存されているので、 $Pr(B)$ が通り抜ける割合そのものになっている。最終時刻での透過確率 $Pr(B)$ の比較を行なうと、 u'_0, g' の値に依存して、 $0.1 \leq Pr(B) \leq 0.3$ の範囲でばらつきが見られる。これは閉じ込めポテンシャルを切った直後から非線形性が効き始め、2重スリット到達時にその影響が無視できないからだと思われる。具体的に言えば、非線形性 u'_0 が大きい場合、広がりが強められる。重力 g' が大きい場合、2重スリットまでの到達時間が短くなる。従って、 $u'_0 = -3, 0$ に対しては重力が大きいと波束が広がらないまま(中央付近に大きな密度を持ったまま)2重スリットに到達してしまうため透過確率が重力の増大とともに減少してしまう。 u'_0 に対しては $g' = 1$ では2重スリットに到達するまでの時間がかかりすぎるため波束が広がりすぎて透過確率が低くなってしまう。 $g' = 3, 5$ では波束がちょうど良い大きさになる時に2重スリットに到達するため透過確率が大きくなっている。透過確率は、干渉効果の定量的違いをもたらすが、定性的な違いはもたらさない。

これまではスケールされた時間と長さについて考察を行ってきた。最後に、本研究のモデルが実際にはどの程度の大きさに対応するのかを示す。また、重力変化(微小重力)における長さの

スケール変化についても述べる。まず物質固有の質量で決定される次の値を定義する。

$$\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \quad (20)$$

本研究では g' の値により、 ω が決定される。 $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ 、 $g' = \frac{g}{\omega^2}$ より

$$\omega = \left(\frac{g}{g'}\sqrt{\frac{m}{\hbar}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{g}{g'}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (21)$$

この ω を用いて l を表す。

$$l = \alpha^{\frac{4}{3}}\left(\frac{g}{g'}\right)^{-\frac{1}{3}} \quad (22)$$

これが閉じ込めポテンシャルの大きさを表し、ほぼ初期波束のサイズと言って良い。具体的な数値での例を示す。物質を ^{87}Rb とし、 $g' = 1$ とする。地上での重力加速度は $g = 9.80665[\text{m/s}^2]$ である。この場合 $\alpha = 2.726 \times 10^{-5}$ となることから式 (22) より $l = 0.383[\mu\text{m}]$ となる。

重力制御下で微小重力 ($\hat{g} = \frac{g}{1000}$) の場合、新しい長さのスケール \hat{l} は式 (22) より次の関係を得る。

$$\frac{\hat{l}}{l} = \left(\frac{\hat{g}}{g}\right)^{-\frac{1}{3}} = 10 \quad (23)$$

これは重力のスケール変化に対し、長さのスケール変化は3桁小さいことがわかる。つまり重力変化に長さのスケールは鈍感であり、実際に微小重力で実験が行われる場合でも極端なサイズの変更をする必要が無いことを意味している。具体的な数値で示すと上と同じように ^{87}Rb の場合で $g' = 1$ 、 $\hat{g} = \frac{9.80665}{1000}$ ならば $\hat{l} = 3.83[\mu\text{m}]$ となる。

6 まとめと今後の課題

本研究では巨視的波束の干渉縞に対する非線形性と重力の影響を明らかにした。結論としては重力の増加は BEC の *deBroglie* 波長を短くし、干渉縞ピークの間隔を狭めるという影響を与え、非線形性の増大は波束の広がりを強める影響を与えることがわかった。それに伴い、干渉縞ピーク数の増加という現象を見ることが出来た。重力制御については、近年の宇宙開発計画で提案されている宇宙空間（宇宙ステーション、人工衛星）での実験において可能であり、非線形性の制御については、Feshbach 共鳴の技術や BEC に関与する原子数の調節で可能となる。

課題としては波束の2重スリットを透過する確率が非線形性に依存し、うまく一定値にならなかったことが挙げられる。これは閉じ込めポテンシャルを切った瞬間から非線形性が効き始めるため一定とならなかった。これも一種の非線形性の効果だが、さらに議論する必要があると思われる。Young の干渉実験に対応する考察を行なう場合は、2次元の2重井戸ポテンシャルによって2つの BEC を準備して落下のシミュレーションを行なうことになる。しかし、この場合、干渉縞の形成は自明である。これに対し、一電子干渉の2重スリット通過の具体的な挙動は自明ではない。2重スリットにより分裂した波束が干渉すること無く、拡散する可能性もある。しかし、

今回、数値シミュレーションでは分裂した波束が再結合し、美しい干渉縞を形成することを具体的に示すことできた。

本稿の非線形シュレーディンガー方程式は、ノルムを保存し、ガリレイ変換および同種粒子間の座標入れ替えに対して不変な形式を持っている。そこで、この非線形シュレーディンガー方程式を巨視的ではなく微視的量子論の基礎方程式とみなすと、どのようなことになるのだろうか。その場合は、非線形項は多体効果によるものでは無く、例え一個の自由電子の場合でもあらわれ、電子のサイズを決定する本質的な項となる。非線形シュレーディンガー方程式を、ヘノン-ハイレス系やキックを受ける回転子など古典論でカオスを生成する系に適用し、長時間ダイナミクスを考察すると、古典カオスの性質が回復するのではないだろうか。これは、最も根源的で歴史貫通的な基礎的テーマといえよう。

参考文献

量子カオスと量子輸送に関する、私達のグループの最近の仕事は

- 1) A. Budiyo and K. Nakamura, *Chaos, Solitons and Fractals* **17**, 89-97 (2003).
- 2) A. Budiyo and K. Nakamura, *Phys. Rev.* **B67**, 245321-245325 (2003).
- 3) A. Budiyo and K. Nakamura, *Phys.Rev.* **B68**, 121304(R)-121307(R) (2003).
- 4) K. Nakamura and T. Harayama: *Quantum chaos and quantum dots* (Oxford University Press, Oxford, 2004).

本稿で展開したような、BECの波束の2重スリット通過のダイナミクスと量子干渉の研究は皆無であると思われる。しかし、Youngの古典干渉実験と同じ精神で、double well型のトラップでポテンシャルでBECをあらかじめ分割し、その後トラップを解除して量子干渉を見る実験とシミュレーションはたくさんある。

- 5) Eddy M. E. Timmermans : *Atom-Trap BECS* (Los Alamos Science Number 27 2002)
- 6) M.R.Andrews, C.G.Townsend, H.J.Miesner, D.S.Durfee, D.M.Kurn, and W.Ketterle, *Science* **275**, 637(1997)
- 7) C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tollett, and R.G.Hulet, *Phys. Rev. Lett* **75**, 1687(1995)
- 8) K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews, N.J.van Druten, D.S.Durfee, D.M.Kurn, and W.Ketterle, *Phys. Rev. Lett* **75**, 3969(1995)
- 9) M.R.Andrews, D.M.Kurn, H.-J.Miesner, D.S.Durfee, C.G.Townsend, S.Inouye, and W.Ketterle, *Phys. Rev. Lett* **79**, 553(1997); **80**, 2967(1998)
- 10) William Hoston and L.You, *Phys. Rev. A* **53**, 4254(1996)
- 11) Wu-Ming Liu, Baio Wu and qian Niu, *Phys. Rev. Lett* **84**, 11(2000)
- 12) L.Pitaevskii and S.Stringari, *Phys. Rev. Lett* **83**, 21(1999)
- 13) A.Röhrl, M.Naraschewski, A.Schenzle and H.Wallis, *Phys. Rev. Lett* **78**, 22(1997)