

# 区分線形システムの定常解における 無限の過去と無限の未来について

茨城大学・工学部機械工学科 今村 仁 (Hitoshi IMAMURA)  
Mechanical Engineering, Ibaraki University

## 1 緒言

区分線形系は異なる線形特性を貼り合わせて構成されるシステムであり、各定義領域では線形系そのものとして振舞うので、ほとんどの非線形系が解析的には解けない中で、領域ごとの解を接続することにより一般解が原理的には厳密に構成できる [1, 2]. また、微分方程式で記述されるシステムでありながら、状態によって支配方程式が切り替わる離散事象を内包しているので、ハイブリッド・システムの観点からも興味深いモデルを提供する [3]. しかしながら、解が各定義領域の境界を通過する切り換え時刻が超越方程式の根として数値的にしか求められないという、いわゆる「切り換え時間の問題」がこの40年来指摘されている [1]. また、切り換え時刻で系が滑らかな特性を持たないので、非線形解析の常套手段である冪級数展開的アプローチの適用は一般に困難であり、Duffing系などの近似解析で多用される”微少パラメータの仮定”の前提となる“応答の微少振幅の制約”が、区分線形系に対しては多くの場合有効に機能しない. この系の非線形性は各線形領域をまたがる横断的な状況を経て初めて発現するので、領域ごとの解の接続条件が数値的に求められても、そこから得られる情報は常に各線形領域に局在化したものとなり、隣接する領域ごとの解相互の関係、さらには解全体の構造については何の情報も得られない.

このような理論的困難を打開するために、著者らは、“擬フィードバック形式”という非線形系の等価モデルを導入し、最も基本的な区分線形系として領域数1の衝突振動系と領域数2の予圧縮ばね系の場合に、その一般解を大域的に構築し、これをベースにして、定常解や周期解の関数構造を厳密に決定する方法を提案した [4, 5, 6, 7]. 擬フィードバック形式では、系の非線形性は仮想的な外力に変換され、求めるべき解そのものによって解自身が記述される“自己参照構造”が顕在化する. また、自己参照フィードバックにより厳密線形化されたシステムでは、あたかも“重ね合わせの原理によって非線形性が表現されている”かの如き状況が出現する. このことは区分線形系をカオスを生成し得る“非線形系のある種の可解モデル”と位置付け、“非自明な自己参照システム”と捉える視点を提示する.

本論文では、無限の過去から無限の未来まで有界な解である定常解が、区分線形システムでは無限の過去で線形システムの定常解と形式的に同等であるとする事により、そ

の大域的な関数形を決定できることを示し、そのことから導かれる幾つかの帰結を述べる。まず、衝突振動系と予圧縮ばね系を擬フィードバック形式により厳密線形化し、その一般解を見掛けの重ね合わせの原理を適用して大域的に導出する。次に、この表現から定常解とその最も基本的な場合である周期解を厳密に求め、あらゆるタイプの周期解が、線形系の定常解を表す周期関数と、非線形性の影響の総体である基本的な周期関数を、切り換え時間だけシフトしたものの有限個の和の重ね合わせとして表されることを明らかにする。特にばね剛性が0となる場合には、最も簡単な周期解である対称基本周期解の場合でさえ、その関数構造の決定過程で収束しない関数項級数が現れる。この収束しない無限級数を Cesàro の総和法や Dirichlet 級数を用いて厳密に評価できることを示す。

## 2 系の記述と問題提起

### 2.1 運動方程式

区分線形系の最も簡単なモデルとして、領域数1の衝突振動系と領域数2の不連続区分線形系である予圧縮ばね系を考察する。図1の衝突振動系の無次元化された運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos(\omega t); \quad x < \gamma \quad (1a)$$

$$\dot{x}(t^+) = -r\dot{x}(t^-); \quad x = \gamma \quad (1b)$$

また、図には示していないが、質点が両側に配置されたストッパーと衝突する系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos(\omega t); \quad |x| < \gamma \quad (2a)$$

$$\dot{x}(t^+) = -r\dot{x}(t^-); \quad |x| = \gamma \quad (2b)$$

さらに、図2に示す予圧縮ばね系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x + \operatorname{sgn}(x) = \eta \cos(\omega t) \quad (3)$$

ここで  $\operatorname{sgn}(x)$  は

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

で定義される符号関数である。

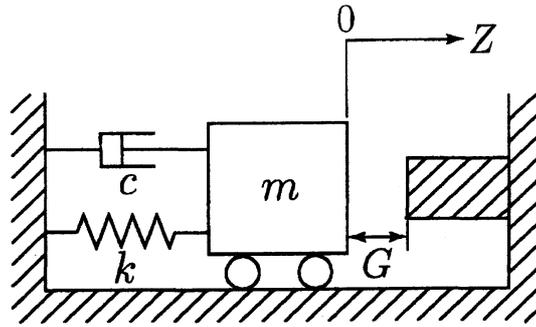


図 1: Physical model of one side impact oscillator

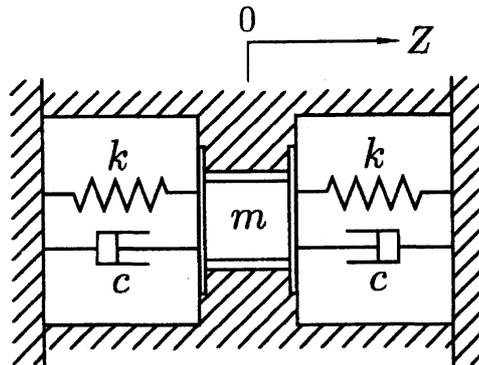


図 2: Physical model of preloaded system

以下では、解の切り換えが生じる場合のみを考え、有限時間内に領域境界と無限回交差する“ゼノン軌道”[3]や、質点が速度0で領域境界に接したまま一定時間留まる“停滞を伴う解”[7]は考察の対象から除外する。領域境界で接しない初期値をとり、 $t_1, \dots, t_{m-1}$ で切り換えが起こる解を  $x_{t_0^-, t_m^-}(t)$  と表記する。

## 2.2 接合法による解の定式化に内在する限界

区分線形系では、任意の切り換え時刻  $t_i (i \in \mathbb{Z})$  から次の切り換え時刻  $t_{i+1}$  における解は、領域ごとの解を切り換えのたびに接続していくことによって求められる [1].

$$\mathbf{x}_{t_i, t_{i+1}}^i(t) = \mathcal{L}_j(t - t_i; \mathbf{x}(t_i^+)) - \lambda_j \mathcal{N}_j(t - t_i) \quad (5)$$

ここで  $\mathbf{x}(t) \equiv [x(t), \dot{x}(t)]^t$  を状態ベクトル、 $[ \ ]^t$  を転置行列を表す記号とすると、 $\mathbf{x}(t_0)$  を初期条件とする線形システムの一般解は次式で表される。

$$\mathcal{L}(t; \mathbf{x}(t_0)) \equiv \mathcal{P}(t - t_0) \{ \mathbf{x}(t_0) - \mathcal{P}(t_0) \} + \mathcal{P}(t) \quad (6)$$

表 1: State transfer functions  $\mathcal{I}(t)$  and  $\mathcal{F}(t)$   $\Omega^\pm = \sqrt{\pm(\beta - \zeta^2)}$ 

parameters	$\mathcal{I}(t)$	$\mathcal{F}(t)$
$\beta > \zeta^2 \geq 0$	$e^{-\zeta t} \left( \cos \Omega^+ t + \frac{\zeta}{\Omega^+} \sin \Omega^+ t \right)$	$e^{-\zeta t} \frac{1}{\Omega^+} \sin \Omega^+ t$
$\beta < \zeta^2, \beta \neq 0$	$e^{-\zeta t} \left( \cosh \Omega^- t + \frac{\zeta}{\Omega^-} \sinh \Omega^- t \right)$	$e^{-\zeta t} \frac{1}{\Omega^-} \sinh \Omega^- t$
$\beta = \zeta^2 \neq 0$	$e^{-\zeta t} (1 + \zeta t)$	$e^{-\zeta t} t$
$\beta = 0, \zeta \neq 0$	1	$\frac{1 - e^{-2\zeta t}}{2\zeta}$
$\beta = \zeta = 0$	1	$t$

また,  $\mathcal{I}(t), \mathcal{F}(t)$  はおのおの

$$\mathcal{I}(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{I}(t) & \mathcal{F}(t) \\ \dot{\mathcal{I}}(t) & \dot{\mathcal{F}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{I}(t) \\ \dot{\mathcal{I}}(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

で定義される線形システムの状態推移作用素と入力応答関数のベクトルであり,  $\mathcal{I}(t)$  の各要素は  $\beta - \zeta$  パラメータ空間で表1のように,  $\mathcal{I}(t)$  は次式のように表される.

$$\mathcal{I}(t) = \frac{\eta}{\sqrt{(\beta - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}} \cos \left( \omega t + \tan^{-1} \frac{-2\zeta\omega}{\beta - \omega^2} \right) \quad (8)$$

表 2 Unit indicial response function  $\mathcal{K}(t)$ 

parameters	$\mathcal{K}(t)$
$\beta \neq 0$	$\frac{1}{\beta} \{1 - \mathcal{I}(t)\}$
$\beta = 0, \zeta \neq 0$	$\frac{1}{2\zeta} \{t - \mathcal{I}(t)\}$
$\beta = \zeta = 0$	$\frac{t^2}{2}$

さらに,  $\mathcal{K}(t)$  は, 復元力のオフセット成分によって発生する線形系のインディシャル応答関数のベクトルであり, 表2で表される. また, 添え字  $j$  は領域の番号を区別する指標である.

区分線形系の解が切り換え時刻間で線形システムの解(5)によって陽に与えられることは, 直感的には厳密な理論解析を展開する上で大きなメリットとなることが期待される. しかしながら, 切り換え時間間隔は超越方程式により陰的に規定され, 数値的にしか求まらない. また, これらの解を接続してゆく操作は, 切り換え時刻の状態でリセットされた初期条件  $\mathbf{x}(t_i^+)$  をもつ区間  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  での新たな線形システムの解を見ていることに他ならず,  $t_i$  以前の非線形性の影響は新たな初期値  $\mathbf{x}(t_i^+)$  の中に埋め込まれ,  $t_i$  以降, 表に出ない. したがって, 切り換え時間間隔が超越的に規定される以上, そこから得られる情報は必然的に切り換え状態間における個別の線形システムに局在化したものに限られる. 系の非線形性は切り換えの前後にまたがる大域的な状況を考慮して初めて発

現するので、領域ごとの解をつないでゆく従来の表記法は、解全体の構造を把握し、それと表裏をなす多様な非線形現象を包括的に理解する上では明らかに不十分である。さらには、周期解のような特別な構造を有する場合にも、これらの領域ごとの線形システムの解が切り換え時刻ごとに周期的に切り換わるという以上に、周期解固有の情報を抽出することはできない。したがって、式(5)は、隣接する切り換え時刻間 ( $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ) でのみ物理的な意味をもつ形式解であるに過ぎず、系が各領域で線形システムの解として厳密に表されるというメリットは、解を大域的に捉える上では生かされていなかった。

### 3 自己参照フィードバックによる大域解析法

#### 3.1 解の大域化

解のつなぎ合わせに伴う理論的な困難を打開するために、著者らは非線形性を系への仮想的な外力とみなして、区分線形系を次式のように厳密線形化し、見掛けの重ね合わせの原理を適用してこれを解く、“擬フィードバック形式”をベースとする解析法を提案してきた [4].

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos \omega t - \tilde{f}(x(t), \dot{x}(t)) \quad (9)$$

ここで、非線形性と等価な見掛けの外力  $\tilde{f}$  は、衝突振動系の場合には  $\sum_{t_i \in Q} (1+r)x(t_i^-)\delta(t-t_i)$ 、予圧縮ばね系の場合には  $\text{sgn}(x)$  で表される。 $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数、 $Q$  は超越方程式の解である切り換え時刻の系列の集合を表し、その特定の実現値の系列を陰的に規定されるパラメータとみなす。この方法によれば、区分線形系の解は、基準となる線形システム (“基底線形システム” と呼ぶ) の一般解と非線形性によって発生する仮想的な外力で励起された線形システムの応答の系列 (“前方擬フィードバック過程” と呼ぶ) との重ね合わせによって大域的に表記でき、衝突振動系の場合には次式のように書ける。

$$\mathbf{x}_{t_0^-, t_m^-}(t) = u(t-t_0)\mathcal{L}(t-t_0; \mathbf{x}(t_0^-)) + \sum_{i=0}^{m-1} u(t-t_i)\mathcal{G}(t-t_i)\mathcal{Y}\mathbf{x}_{t_0^-, t_i^-}(t_i^-) \quad (10)$$

ここで  $u(t)$  は単位ステップ関数、 $\mathcal{Y}, \bar{\mathcal{Y}}$  は次式で定義されるインパルス行列である ( $\bar{\mathcal{Y}}$  は 3.3.2 節で用いる).

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(1+r) \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+r \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(10) は超越的に規定される衝突時刻の系列  $t_0, \dots, t_m$  をパラメータとする形式解である点で領域ごとの解の接続による表現と共通するが、衝突時刻間に限定されずに大域的に成り立つことに顕著な特長を有する。

### 3.2 定常解の大域的な導出

解を自己参照形式で書き表すことの利点は、これが領域に拠らない大域的な表現になっている点にある。この性質から、周期解やカオス解を含む“定常解”の関数形が理論的に導出できる。定常解 (stationary solution) の実体は定義に依存するが、ここでは無限の過去から無限の未来まで有界な解のことであり、区分線形系の場合には切り換えが一度も起こらない場合も特別な場合として含む“定常的に切り換えが起こり続ける解”に相当する。いわゆる“平衡解”のことではない。解の初期値が無限の過去にあり、未来永劫、有界であれば、それは定常解と考えられる。線形システムの自由振動解が振動的に減衰するいわゆる“不足減衰”となるパラメータ領域 ( $\beta > \zeta^2$ ) では、状態推移作用素に関して次式が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(t - \tau) \right\} = \mathbf{0} \quad (12)$$

これは、初期値の記憶が時間の経過と共に指数関数的に失われることを意味する。そこで、衝突振動系の一般解(10)で初期時刻を  $t_0$  から  $t_{-n}$  にシフトし、 $m, n \rightarrow +\infty$  の極限をとると、右辺第1項に現れる線形システムの一般解は  $\beta > \zeta^2$  では次式

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(t - t_{-n}; \mathbf{x}(t_{-n})) = \mathcal{P}(t) \quad (13)$$

のように線形システムの定常解  $\mathcal{P}(t)$  に収束する。不足減衰に対応しないパラメータの場合には、極限(13)を解の時間領域全域にわたる有界成分の抽出操作と解釈する。式(13)の極限操作  $-n \rightarrow -\infty$  で初期時刻は無限の過去に移行するが、無限の過去という特定の時刻は存在せず、初期時刻はいくらでも遡ることができるので、無限の過去における初期値  $\mathbf{x}(t_{-\infty})$  の値は不定となる。しかしながら、定常解は無限遠でも有界と考えられるので、式(13)の極限值は形式的に右辺の値で書ける。したがって、定常解 ( $\mathcal{X}(t) \equiv [\mathcal{X}(t), \dot{\mathcal{X}}(t)]^t$  と表記する) は次式のように大域的に表せることになる。

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{P}(t) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t - t_i) \mathcal{P}(t - t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}(t_i^-) \quad (14)$$

これは、無限の過去において形式的に次式が成立することを示唆する。

$$\mathcal{X}(t_{-\infty}) = \mathcal{P}(t_{-\infty}) \quad (15)$$

これは、以下のように解釈できる。初期値を  $\mathbf{x}(t_i)$  から  $\mathbf{x}(t_{i-1})$  へ1衝突時刻分遡ることは、区間  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  を基底線形システムとするそれへの擬フィードバック表現から、区間  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$  を基底線形システムとする表現へ書き換えることになるので、系の線形化を1衝突区間分過去へシフトすることに相当する。この操作を無限に繰り返すと、無

限の過去はいわば線形化され尽した領域であるかのように振舞うであろう。これが、無限の過去において形式的に式(15)が成立すると考えられる理由である。

式(14)の右辺には、求めるべき解そのものが衝突時刻での値  $\mathcal{X}(t_i^-)$  として現れるので、これを展開・消去すると、衝突時刻の系列のみをパラメータとする以下の表現が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \mathcal{F}(t) + \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} u(t-t_{k_1}) \mathcal{F}(t-t_{k_1}) \mathcal{V} \\ &\times \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{ \sum_{\substack{k_{j+1}=-\infty \\ k_j > k_{j+1}}}^{k_j-1} \mathcal{F}(t_{k_j} - t_{k_{j+1}}) \mathcal{V} \right\} \mathcal{F}(t_{k_i}) \right] \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F}(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-t_k) \mathcal{F}(t-t_k) \mathcal{V} \\ &\times \left[ \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{-\infty \leq q_1 < \dots < q_{p-1} \leq k-1 < k = q_p} \prod_{j=1}^{p-1} \left\{ \mathcal{F}(t_{q_{j+1}} - t_{q_j}) \mathcal{V} \right\} \mathcal{F}(t_{q_1}) \right] \end{aligned} \quad (16b)$$

同様の議論を予圧縮ばね系に適用すると、その定常解は次式のように求められる。

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{F}(t) - \sigma_0 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \{ \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) - 2u(t-t_i) \mathcal{F}(t-t_i) \} \quad (17)$$

式(16), (17)は系に発生する周期解, カオス解を含むあらゆる定常解を, 無限個の切り換え時刻の系列で完全に規定する。領域ごとの解の接続による表現では, 実現する解が周期解かカオス解かあるいは指数関数的に発散する非定常な解であるかに関わらず, 領域ごとの解(5)を接続した形式で表されるので, 定常解であるために必要な構成成分以外に互いに打ち消し合う項が混在した冗長な表現になっている。一方, 式(14)は, 定常解が本質的に如何なる関数成分からどのように構成されているかを余すところなく明示した表現となっている。ところが, このようにして求められた定常解の表現(16), (17)には, 初期値が陽に現れない。一般に非線形システムでは, 初期値に依存して異なるタイプの解が発生し得るので, 解の表現には何らかの形で初期値の情報が盛り込まれていなければならないはずである。定常解の導出過程における初期時刻を無限の過去に移行する極限で現れた式(15)の結果は, 定常解の無限の過去での値は, 線形システムのそれとある意味で同等であることを示唆する。したがって, 初期値の情報は非線形性の影響と共に, 超越的に規定される無限の過去から無限の未来までの無限個の衝突時間の系列の中に繰り込まれたものと解釈すべきと考えられる。そこで, この解釈の妥当性を検証し, 初期値と繰り込まれた切り換え時間系列との関係を明らかにする必要がある。

### 3.3 周期解の大域的導出

#### 3.3.1 フィードバック総和法

3.2節で得られた定常解の大域表現の妥当性を、最も基本的な定常解である周期解の場合に検証する。紙数の制約から、衝突振動系の場合のみ議論する。 $m, n$ を正整数とし、周期  $T (= 2\pi n/\omega)$  の間に衝突境界 ( $x = \gamma$ ) と  $m$ 回衝突する周期解を  $\mathcal{X}_m^n(t)$  と表記する。このような周期解が実現したとすると、無限の過去から無限の未来までの可算無限個の衝突時間系列は周期的交差時間系列

$$t_0 + kT, t_1 + kT, \dots, t_{m-1} + kT \quad (k \in \mathbf{Z}) \quad (18)$$

となる。したがって、周期解  $\mathcal{X}_m^n(t)$  では式(14)の無限個の擬フィードバック応答の総和はインパルス応答を周期的にシフトしたものの無限和に帰着し、その値は  $\beta \neq 0$  の場合には次式により求められる [6, 7].

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t - kT) \mathcal{F}(t - kT) = \mathcal{Q} \left( t - T \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \right) \quad (19)$$

ここで、 $[x]$  は  $x$  を超えない最大整数を表す床関数であり、 $\mathcal{Q}(t)$  と  $p$  はおのおの次式で定義される。

$$\mathcal{Q}(t) \equiv \frac{\mathcal{F}(t) - e^{-2\zeta T} \mathcal{F}(t - T)}{p} \quad (20)$$

$$p \equiv 1 - \{\mathcal{F}(T) + \dot{\mathcal{F}}(T)\} + e^{-2\zeta T} \neq 0 \quad (\beta \neq 0) \quad (21)$$

式(19)による無限和の評価結果を用いて式(14)を書き換えると、周期解は次式のように大域的に表記できる [6].

$$\mathcal{X}_m^n(t) = \mathcal{F}(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q} \left( t - t_i - T \left\lfloor \frac{t - t_i}{T} \right\rfloor \right) \gamma \mathcal{X}(t_i^-) \quad (22)$$

式(22)は、周期解が線形システムの定常解である周期関数  $\mathcal{F}(t)$  と衝突速度を重みとする  $m$ 個の周期関数との和に分解できることを示している。式(22)に内在する衝突速度  $\mathcal{X}_m^n(t_i^-)$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ) を介した周期的な循環を再帰的代入操作により展開・消去すると、あらゆる周期解を  $m$ 個の衝突時間  $t_0, \dots, t_{m-1}$  のみで規定する以下の大域的な関数表現が得られる [7].

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_m^n(t) = & \mathcal{F}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{Q} \left( t - t_k - T \left\lfloor \frac{t - t_k}{T} \right\rfloor \right) \gamma \\ & \times \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{\substack{0 \leq q_1, \dots, q_{i-1} \leq m-1 \\ q_i = k}} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{ \mathcal{Q}(t_{q_{j+1}} - t_{q_j} + Tu(-(t_{q_{j+1}} - t_{q_j}))) \right\} \gamma \mathcal{F}(t_{q_1}) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

### 3.3.2 初期値補正周期化法

初期値と定常解との関係についてより深く洞察するために、本節では初期値を考慮して周期解を厳密かつ大域的に導出する方法を考察する。初期時刻を  $t_0$  とする全時間領域で成り立つ解 (“全域解” と呼ぶ) は、初期時刻  $t_0$  より無限の未来 ( $t \geq t_0$ ) までに成り立つ解 (前方解) と初期時刻  $t_0$  より無限の過去 ( $t < t_0$ ) までに成り立つ解 (後方解) とを併せて、以下のように形式的に表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_0^-)) &= \mathcal{L}(t - t_0; \mathbf{x}(t_0^-)) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{-1} \bar{u}(-(t - t_i)) \mathcal{F}(t - t_i) \bar{\mathcal{V}} \mathbf{x}(t_i^-) + \sum_{i=0}^{+\infty} u(t - t_i) \mathcal{F}(t - t_i) \mathcal{V} \mathbf{x}(t_i^-) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、時間を逆転した向きへの単位ステップ関数を  $\bar{u}(-t) \equiv 1 - u(t)$  と定義した。全域解(24)は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_0^-)) &= \mathcal{L}(t - t_0; \mathbf{x}(t_0^-)) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{-1} \mathcal{F}(t - t_i) \bar{\mathcal{V}} \mathbf{x}(t_i^-) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t - t_i) \mathcal{F}(t - t_i) \mathcal{V} \mathbf{x}(t_i^-) \end{aligned} \quad (25)$$

周期解  $\mathbf{x}_m^n(t)$  では  $t_m = t_0 + T$ ,  $\mathbf{x}_m^n(t_m^-) = \mathbf{x}_m^n(t_0^-)$  が成り立つことから、周期解を実現する初期値の導出は、以下の非同次線形方程式(26)の解空間を決定する問題に帰着する。

$$[\mathcal{F} - \mathcal{F}(T)][\mathbf{x}_m^n(t_0^-) - \mathcal{F}(t_0)] = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{F}(t_0 - t_i + T) \mathcal{V} \mathbf{x}_m^n(t_i^-) \quad (26)$$

$\beta \neq 0$  では  $\mathcal{F} - \mathcal{F}(T)$  は逆作用素をもつので、式(26)を  $\mathbf{x}_m^n(t_0^-) - \mathcal{F}(t_0)$  について解くと、周期解を実現する初期値として次式が得られる。

$$\mathbf{x}_m^n(t_0^-) = \mathcal{F}(t_0) + \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q}(t_0 - t_i + T) \mathcal{V} \mathbf{x}_m^n(t_i^-) \quad (27)$$

周期解実現初期値(27)を全域解(24)の初期値に代入すると、初期値応答と初期入力応答の和に関して次式が得られる。

$$\mathcal{F}(t - t_0) \{ \mathbf{x}_m^n(t_0^-) - \mathcal{F}(t_0) \} = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q}(t - t_i + t) \mathcal{V} \mathbf{x}_m^n(t_i^-) \quad (28)$$

一方、全域解(25)の右辺第2項の無限和(の符号反転)は、周期解  $\mathbf{x}_m^n(t)$  では次式のよう書き換えられる。

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{F}(t - t_i - kT) \mathcal{V} \mathbf{x}_m^n(t_i^-) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q}(t - t_i + T) \mathcal{V} \mathbf{x}_m^n(t_i^-) \quad (29)$$

また、式(25)の右辺第3項の両側無限和は、周期解  $\mathcal{X}_m^n(t)$  では以下のように  $m$  個の周期関数の和に書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{m-1} u(t-t_i-kT) \mathcal{G}(t-t_i-kT) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-t_i-kT) \mathcal{G}(t-t_i-kT) \right\} \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{G} \left( t-t_i-T \left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-)
 \end{aligned} \tag{30}$$

式(29)に示す書き換えの結果より、式(28)と式(29)とは相殺するので、式(30)を用いて全域解(25)を書き換えると、3.3.1節で無限の過去から無限の未来までに生成される周期的擬フィードバック応答の無限和を解析的に評価することによって得られた周期解の大域表現(22)と同一の表現が得られる。

### 3.3.3 一般解周期化補正と擬フィードバック応答和の等価性

上述した周期解の導出過程を、初期値の補正の影響の観点から再検討してみる。一般解(24)の右辺第3項の前方擬フィードバック過程は、次式

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{+\infty} u(t-t_i) \mathcal{G}(t-t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) &= - \sum_{i=-\infty}^{-1} u(t-t_i) \mathcal{G}(t-t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \\
 &+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t-t_i) \mathcal{G}(t-t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-)
 \end{aligned} \tag{31}$$

のように非有界成分(右辺第1項)と周期的定常成分(右辺第2項)との和に分解できる。これは、 $t_0$ より未来で周期的に生成される擬フィードバック応答の無限和である前方擬フィードバック過程が、式(31)右辺第1項の影響により周期関数にならないことを意味する。周期解  $\mathcal{X}_m^n(t)$  が実現するためには、上記の非有界成分を打ち消すような  $t_0$ より未来に向かう作用がなければならない。これは無限の過去から  $t_{-1}$ までに生成された無限個の周期的擬フィードバック応答の和(式(31)右辺第1項の符号反転)が、前方擬フィードバック過程(31)を  $t_0$ より未来で周期化する補正項の役割を担うことを意味する。ところが、式(28)と(29)が同等であることより、初期値応答と初期入力応答の和と、無限の過去から  $t_{-1}$ までに生成される前方擬フィードバック過程の  $t_0$ 以降への影響とは、以下のように交換可能であることがわかる。

$$\mathcal{G}(t-t_0) \{ \mathcal{X}_m^n(t_0^-) - \mathcal{G}(t_0) \} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{G}(t-t_i-kT) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \tag{32}$$

したがって、初期値応答と初期入力応答の和が解を周期化する補正項であり、そのような初期値のとりべき条件が式(27)で与えられることになる。同様の考察によって、式(32)に対応する初期値応答と初期入力応答の和と、無限の未来から $t_0$ までに生成される後方擬フィードバック過程の $t_0$ より過去への影響に関する、以下の交換可能関係が得られる。

$$\mathcal{F}(t-t_0)\{\mathcal{X}_m^n(t_0^-) - \mathcal{F}(t_0)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{F}(t-t_i-kT) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \quad (33)$$

したがって、交換関係(32),(33)より、初期値応答と初期入力応答の和は、解を未来と過去の全域にわたって周期化する補正項であることが結論できる。このことから、周期的な擬フィードバック応答の総和に関して次の恒等式が導ける。

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t-t_i-kT) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) = 0 \quad (34)$$

これは、無限の過去から無限の未来までの非線形性の影響は、定常周期解では総体として0となることを意味する。この性質(“総和零値性”と呼ぶ)は任意の時刻 $t$ で成り立つので、特に無限遠でも成り立つ。この事実から、定常解の無限遠での値が形式的に評価できる。定常解の無限の未来での値は、定常解(14)の任意の衝突瞬間 $t_j$ における値で以下の極限をとることによって得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_m^n(t_\infty) &\equiv \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_m^n(t_j^-) \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \left[ \mathcal{F}(t_j) + \sum_{i=-\infty}^{j-1} \mathcal{F}(t_j-t_i) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \right] = \mathcal{F}(t_\infty) \end{aligned} \quad (35)$$

式(35)の最右辺の導出で、総和零値性(34)が無限遠でも成り立つことを用いた。同様に、定常解の無限の過去での値は、定常解(14)の時間を反転した表現

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{F}(t) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \bar{u}(-(t-t_i)) \mathcal{F}(t-t_i) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}(t_i^-) \quad (36)$$

を考え、以下の極限をとることによって得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_m^n(t_{-\infty}) &\equiv \lim_{j \rightarrow -\infty} \mathcal{X}_m^n(t_j^-) \\ &= \lim_{j \rightarrow -\infty} \left[ \mathcal{F}(t_j) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathcal{F}(t_j-t_i) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \right] = \mathcal{F}(t_{-\infty}) \end{aligned} \quad (37)$$

これは、無限の過去における定常解の初期値が形式的に線形システムのそれと同等になることを示した式(15)の結果を裏付けるものとなっている。定常解の無限の未来での最終値は、時間を逆転したシステムにおける無限の過去における初期値に対応するので、式(35)、(37)の結果は、定常解では無限遠での値が線形システムのそれとある意味で同

等の不定性を有することを意味する。擬フィードバック形式は、非線形性の影響を等価なフィードバックに置き換えて線形化するものであるので、無限回線形化され尽くした無限の未来と無限の過去は、それ以上線形化することなく、既にそれ自体で線形であると解釈できる。

以上の考察は、定常周期解の大域表現(22)(または(23))に初期値が陽に現れない理由を説明するものとなっている。時刻  $t_0$  で周期解を実現する初期値は、一般解の初期値に代入することによって無限の過去からの衝突の影響が重ね合わされた等価な和(28)に置き換えられ、式(29)と相殺することによって表面化しない。一方、無限の過去における初期値、無限の未来における最終値は、式(35)、(37)の結果が示すように、線形システムのそれと形式的に同等となるので、線形システムで初期値応答と初期入力応答が互いにキャンセルするのと同様の理由によって消失する。したがって、無限の過去に初期値をもつ解としての定常解の表現にも、初期値の影響は陽には現れない。これが、周期解の大域表現に、初期値の情報が陽に含まれないことの原因である。初期条件を陽に指定せずに異なるタイプの解を記述するには、切り換えのあり方を規定する(一般には)無限個の衝突時刻の系列がそれを補う役割を担うと考えられるが、周期解の場合には、その大域表現(23)が示すように、 $m$  個の衝突時刻のみに縮約される。以上により、周期解の大域表現に初期値の影響が陽に現れないことが示された。

### 3.4 ばね剛性0の系に現れる収束しない無限級数の評価

対称な衝突振動系(2)でばね剛性0の場合には、最も簡単な対称基本周期解の場合でさえ、無限の過去から無限の未来までに生成される擬フィードバック応答の総和には収束しない関数項級数が含まれる。本節では、これが Cesàro の総和法や Dirichlet 級数を用いて評価できることを示す。 $\zeta \neq 0$  の場合、 $m = 2$  となる対称基本周期解は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^n(t) = & \mathcal{S}(t) - \frac{1+r}{2\zeta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^1 (-1)^i u(t - t_i - kT) \right. \\ & \left. - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^1 (-1)^i u(t - t_i - kT) e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \right\} \dot{\bar{x}}_2^n(t_0^-) \quad (38) \end{aligned}$$

ここで  $t_1 - t_0 = T/2$  である。{ } 内の第2項である指数関数の周期的シフトを含む総和項は、 $i$  と  $k$  の総和の順序を入れ換えることができ、 $k$  に関する和は解析的に求められる。ところが、式(38)右辺 { } 内の第1項である単位ステップ関数の周期的シフトを表す  $k$  に関する両側無限和は、 $k$  の負の側の和に関して収束しない無限和となるので、 $i$  と  $k$  に関する和の順序を変更できない。そこで、この  $k$  に関する両側無限和を、 $k$  に関する

正負両方向の片側無限和に分解し,  $u(t) = 1 - \bar{u}(-t)$  の関係が成り立つことを用いてこれを計算すると

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^1 (-1)^i u(t - t_i - kT) = \overbrace{-1 + 1 - 1 + 1 \cdots}^{+\infty} \\ + \sum_{i=1}^0 (-1)^i \sum_{k=1}^{+\infty} \{-u(-(t - t_i + kT))\} + \sum_{i=0}^1 (-1)^i \sum_{k=0}^{+\infty} u(t - t_i - kT) \quad (39)$$

式(39)に現れる無限和

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots \quad (40)$$

には普通の意味での和は存在しない. そこで Cesàro の総和法 [8, 9] を用いると, 以下のようにこの和を評価できる. 1次までの部分 and は

$$S_{2n-1}^{(0)} = -1, \quad S_{2n}^{(0)} = 0 \quad (n \geq 1), \quad S_{2n-1}^{(1)} = -n, \quad S_{2n}^{(1)} = -n \quad (n \geq 1) \quad (41)$$

であるので,  $\binom{a}{b}$  を二項係数とすると

$$C_{2n-1}^{(1)} = \frac{S_{2n-1}^{(1)}}{\binom{2n}{1}} = -\frac{n}{2n} = -\frac{1}{2} \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (42a)$$

$$C_{2n}^{(1)} = \frac{S_{2n}^{(1)}}{\binom{2n+1}{1}} = -\frac{n}{2n+1} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (42b)$$

となる. これより無限和(40)の値は

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = -\frac{1}{2} \quad (C.1) \quad (43)$$

のように計算できる. ここで, (C.1) は総和を Cesàro の1次の和で求めることを表す記号である. 式(43)の結果を用いると, 対称基本周期解は次式によって大域的に表される.

$$\bar{x}_2^n(t) = \mathcal{S}(t) - (1+r) \sum_{i=0}^1 (-1)^i \mathcal{G} \left( t - t_i - T \left\lfloor \frac{t - t_i}{T} \right\rfloor \right) \frac{1 + e^{-\zeta T}}{1 - r e^{-\zeta T}} \dot{\mathcal{S}}(t_0) \quad (44a)$$

$$\mathcal{G}(t) \equiv -\frac{1}{2\zeta} \left( \frac{t}{T} + \frac{e^{-2\zeta t}}{1 - e^{-2\zeta T}} \right) \quad (44b)$$

$t_0$  は初等的な計算によって陽に与えることができるので, 式(44)は対称基本周期解の厳密な大域表現となっている.

$\zeta = 0$  となる場合には, 関係式  $u(t)t = t + \bar{u}(-t)(-t)$  を適用することにより, 対称基本周期解の導出は本質的に次式のような収束しない関数項級数の計算に帰着する. Cesàro

の総和法によってこれを評価すると

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^0 (-1)^i (t - t_i + kT) = -\frac{1}{2}(t - t_0) - \frac{T}{8} \quad (C.2) \quad (45)$$

ここで、(C.2)は2次の Cesàro の和を表す記号である。この結果を用いると、対称基本周期解は線形システムの定常解と次式

$$\mathcal{G}(t) \equiv \frac{1}{2}t \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (46)$$

で表される関数を周期拡張した周期関数を衝突時刻だけシフトしたものとの和で式(44a)と同じ形式で大域的に表記できる。

以上のような収束しない関数項級数は、Riemann の  $\zeta$  関数の一般化である Dirichlet 級数を用いても計算できる。関数  $\tilde{\zeta}(s)$  を次式

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad (47)$$

で定義すると、この関数は Riemann の  $\zeta$  関数と以下の関係で結ばれている [10].

$$\tilde{\zeta}(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \quad (48)$$

$\zeta \neq 0$  の衝突振動系の対称基本周期解の導出過程で現れる収束しない無限級数(40)は、Dirichlet 級数により

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = -\tilde{\zeta}(0) = \zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad (49)$$

のように計算でき、Cesàro の総和法によるものと同じ結果(43)が得られる。同様に、 $\zeta = 0$  の場合に現れる収束しない無限級数(45)は、式(49)と次式

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \tilde{\zeta}(-1) = -3\zeta(-1) = \frac{1}{4} \quad (50)$$

を用いると

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^0 (-1)^i (t - t_i + kT) = -\left\{ (t - t_i)(1 - 1 + 1 - 1 + \dots) + \frac{T}{2}(1 - 2 + 3 - 4 + \dots) \right\} = -\frac{1}{2} \left( t - t_i - \frac{T}{4} \right) \quad (51)$$

のように計算でき、Cesàro の総和法によるものと同じ結果(45)が得られる。

場の量子論では、素粒子の生成・消滅を記述するために、発散する和の中から物理的に意味をもつ有限な値を求める系統的な手法が必要になり、繰り込み理論として詳しく研究されてきている。周期解に代表される定常解も有界であるので、その導出過程で現れる発散級数は有限な和を持たなければならず、繰り込みの手法が有効となる。一見無関係に思われる素粒子の生成・消滅と擬フィードバック形式に基づく周期解の導出に“繰り込み”という手法が現れる背景には、両者に通低するある種の“自己参照”が重要な役割を担うと考えられるが、さらに踏み込んだ考察については、別の機会に論じたい

## 4 結言

最も基本的な区分線形系である衝突振動系と予圧縮ばね系について、非線形性を見掛けの外力に変換して厳密線形化し、大域的な一般解を導出することによって解析する方法を示した。この表現から、無限の過去から無限の未来まで有界となる定常解とその最も基本的な形態である周期解が大域的に求められた。特にばね剛性が0となる場合には、周期解の導出過程で収束しない関数項級数が現れ、それが発散級数の総和法である Cesàro の総和法や Dirichlet 級数によって計算できることを示した。カオスを含むより複雑な解の導出に適用できる理論へ一般化することは、今後に残された重要な課題である。

## 参考文献

- [1] 清水辰次郎, 非線形振動論, (1965), 114-122, 培風館
- [2] 前澤成一郎, “非対称断片線形特性を有する系の強制振動について (第1報, 解析的手法の説明)”, 機論, 26-167, (1960), 884-900.
- [3] 井村順一, “ハイブリッドシステムの制御理論構築を目指して—いかに捉えるか?”, システム, 制御, 情報, 43, 12 (1999), 651-659.
- [4] 今村仁, 鈴木浩平, “区分的線形振動系における一般解の大域表現と標準形 (非線形性が不連続な場合)”, 機論, 57-541, C (1991), 2811-2818.
- [5] 今村仁, 鈴木浩平, “衝突振動系の一般解に現れる再帰的フィードバック構造”, 機論, 66-645, C (2000), 1468-1474.
- [6] 今村仁, 鈴木浩平, 区分線形振動系の周期解の標準形 (フィードバック重畳法の提案), 機論, 64-617, C (1998), 36-44.
- [7] 今村仁, 鈴木浩平, 衝突振動系の定常応答と周期解の一般形 (停滞を伴わない場合), 機論, 67-653, C (2001), 23-29.
- [8] 今村仁, 鈴木浩平, ばね剛性0の衝突振動系における周期解 (Cesàro の和による対称基本周期解の導出), 機論, 70-690, C (2004), 325-332.
- [9] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信, 「数学公式II」, (1987), 153-155, 岩波書店.
- [10] 黒川信重, 若山正人, 絶対カシミール元, (2002), 岩波書店.