

## 2-D Travelling Patterns

大阪大学・大学院基礎工学研究科 小川知之 (Toshiyuki Ogawa)  
 Graduate School of Engineering Science  
 Osaka University

### 1 はじめに

パターン形成の問題に対するアプローチはいくつかあるが、ここでは弱非線形解析（局所分岐解析）によるパターン選択問題への取り組みの例を挙げる。[10]で、古典的な Rayleigh-Bénard 対流のパターン形成の問題に対し力学系の中心多様体理論による標準的な方法で解析した結果を紹介したが、本研究も同様の方法論による一連のものである。[10]では、上下対称な境界条件を持つ Rayleigh-Bénard 対流問題では複合モード解としての正六角パターンは、よく知られているように確かに不安定だが、不安定固有値が安定固有値の絶対値に比べ非常に小さいことを示した。また、2次元の設定で  $n, n+1$  モードのロール解の競合を調べると、プラントル数によっては複合モード解が安定に現れることを示した。

ここでは空間2次元の、特に動的パターンの解析に向けた問題提起として、予備的な問題を考察する。すなわち多様な動的パターンを持つものの中で、いくつかの比較的単純なモデルの2次元的な進行波解を解析することを試みる。例えば傾斜面を薄い膜状に流れる粘性流体の波面の時間発展を表す液膜流の Benney 方程式では周期進行波が重要な役割を果たすが、非自明な周期進行波が出現する分岐のメカニズムは熱対流の問題での定常周期解の分岐メカニズムと類似点が多い。しかしながら、空間2次元での解の時間発展は多様で ([5],[8] 参照)、一部のパターン形成のメカニズムが理解されている ([6]) に過ぎない。また、最近 [7] で、化学反応と相転移の結合系で安定に観測される正六角パターンのプロファイルを持つ進行波解が報告されているが、これに対しても Rayleigh-Bénard 対流での正六角パターンのように局所分岐解析を適用することが可能である。ただし正六角状の局所分岐解と [7] で報告された大振幅解を関連づけることにはまだ困難があるので本稿では省略する。

さて、よく知られているように局所分岐理論によれば、適当な退化条件と対称性を与えれば分岐の分類・バリエーションを特定することができる。しかしながら、個々の問題において実際に局所分岐がどのように出現するかを知るには、中心多様体縮約を行った場合にはその標準形を問題ごとに計算することが必要である。中心多様体の標準形計算は目下のところ問題ごとに手計算で行っているが、分岐の対称性を限定すれば（境界条件ごとに）手順のきまった手続きで行えるものである。したがって計算機による数式処理を用いた標準系計算アルゴリズムを開発することができれば、分岐解析が効率的に行えて非常に有効であろうと思われる。

### 2 1D Benney と mSH の周期解の分岐構造

次の2つの方程式の自明解の分岐を考え、既存の結果の紹介を含め問題設定を行う。

$$(mSH) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left\{ \nu - \left( 1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} u - p \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - qu^3$$

$$(Bn) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \left\{ \nu - \left( 1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} u - u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

(mSH) は非対称 Swift-Hohenberg 方程式で熱対流のロールパターン形成などを理解するための最も単純な方程式である。(Bn) は傾斜面上を流れる薄い膜状の波面(液膜流)の不安定化を記述した Benney 方程式と呼ばれる。いずれも物理モデルとしての微分方程式から大胆な近似を行って得られた方程式であり、この方程式自体を説明するのは容易ではないが、それぞれの現象におけるパターン形成の基本的なメカニズムが内在されていると考えられている。

ここでは、空間変数は 1 次元  $x \in \mathbf{R}$  とする。 $u(t, x) \in \mathbf{R}$  が未知関数で、 $\nu, \varepsilon, p, q \in \mathbf{R}$  は定数。定数  $\varepsilon, q > 0$  で  $p = 0$  のとき前節ですでに述べた (SH) となるが、 $p$  は  $u \mapsto -u$  の対称性を崩すパラメーターである。熱対流の問題で、上面もガラス板で覆われ上面底面とも同じ境界条件のときが  $p = 0$  に、上面が自由境界のときが  $p \neq 0$  に対応すると考えられる。また特に (mSH) で  $q = 0$  かつ  $p \neq 0$  のときを Kuramoto-Sivashinsky 方程式と呼ぶことにする。通常  $\nu = 1$  かつ  $q = 0$  のときに Kuramoto-Sivashinsky 方程式と呼ばれるが、ここでは  $\nu$  を Kuramoto-Sivashinsky 方程式の安定性のコントロールパラメーターと考えることにする。

まず  $u(t, x) \equiv 0$  が解なので、そのまわりの線形化安定性を次の分散関係式から調べてみよう。それには方程式の線形部分に  $u = e^{\lambda t + ikx}$  を代入し波数  $k$  の微小振幅の摂動が増大するか減少するのかわかる。それを  $\text{Re} \lambda$  の正負をもとに見ればよい。

$$\lambda = \lambda(\nu, k) = \nu - (1 - k^2)^2. \quad (2.1)$$

したがって  $C = \{(\nu, k) | \nu = (1 - k^2)^2\}$  が中立安定曲線を与える。特に  $\nu < 0$  のときにはすべての波数域にわたって摂動は減衰することがわかる。(それだけでなく実は  $\nu < 0$  のとき  $u = 0$  は大域的に漸近安定であることもわかる。) 一方、 $\nu > 0$  のとき  $k = 1$  を中心としたある波数域の摂動波が増大する。

さて系のサイズに比べて得られるパターンサイズが小さいときはむしろ無限区間の問題として理想化した方が自然である。しかしながらここでは無限区間の困難さを避けるため、有限区間  $x \in [0, L]$  に周期境界条件を課して考え、しかる後に区間サイズ  $L$  を大きくして無限区間での何らかの情報を引き出すことにする。周期境界条件とはすなわち  $u(t, x + L) \equiv u(t, x)$  である。これにより、許容される波数を離散化できる： $k \in (2\pi/L)\mathbf{Z}$  すなわち  $k = (2\pi/L)m, m \in \mathbf{Z}$ 。解析する上での大きなメリットがここにある。波数  $(2\pi/L)m$  の周期波を  $m$  モードの波と呼ぶことにする。言い換えればモード数  $m$  は区間長  $L$  が周期波の基本周期の  $|m|$  倍であることを表す。 $k_0 = 2\pi/L$  とおき、各モード  $m$  に対して  $\text{Re} \lambda = 0$  となる集合を  $(\nu, k_0)$  空間の中で

$$C_m = \{(\nu, k_0) | \nu = \nu_m(k_0) = (1 - m^2 k_0^2)^2\}$$

とおく。これは、 $\nu$  だけでなく区間サイズ  $L$  もパラメータ(可変できる)と捉えて(実際には便宜上  $k_0 = 2\pi/L$  を用いる)、そのパラメータ空間の中で  $C_m$  が  $m$  モードの波に対する安定性の臨界集合であるということである。さて  $n \neq n'$  として 2 つの曲線  $C_n$  と  $C_{n'}$  の交点でのパラメータ値は  $k_0 \neq 0$  のとき

$$\nu = \nu^{n, n'} := \left( \frac{n^2 - n'^2}{n^2 + n'^2} \right)^2 \quad (2.2)$$

$$k_0^2 = (k_0^{n, n'})^2 := \frac{2}{n^2 + n'^2} \quad (2.3)$$

であるので, 3本の異なる  $C_{m_1}, C_{m_2}, C_{m_3}$  が  $(\nu, k_0) = (1, 0)$  以外で同時に交わることはない。したがって区間サイズ  $L$  (もしくは  $k_0$ ) を固定することに次の I. II. のいずれかが起こる。ただしここで  $\nu_*(k_0) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \nu_m(k_0)$  と定める。

- I. (単純臨界点) ある  $n \geq 1$  があって, 次が成り立つ.  $\nu_*(k_0) = \nu_n(k_0)$  で  $|m| \neq n$  であれば  $\nu_*(k_0) < \nu_m(k_0)$ . (このような  $\nu_*(k_0) = \nu^n(k_0)$  とおく.)
- II. (多重臨界点) ある  $n \geq 1$  があって, 次が成り立つ.  $\nu_*(k_0) = \nu_n(k_0) = \nu_{n+1}(k_0)$  で  $|m| \neq n, n+1$  であれば  $\nu_*(k_0) < \nu_m(k_0)$ . (このような  $(\nu_*(k_0), k_0) = (\nu^{n, n+1}, k_0^{n, n+1})$  とおく.)

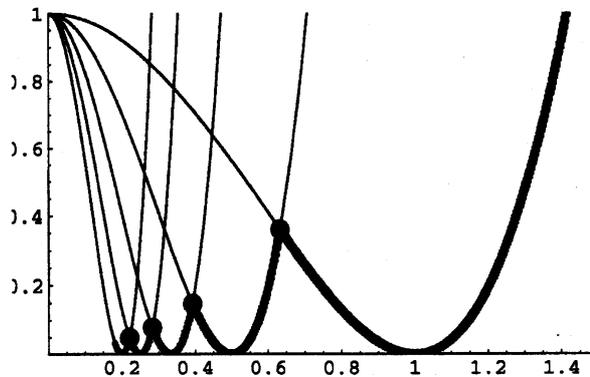


図 1:  $m$  モードの臨界曲線.  $\nu$  を増加させて初めて不安定化が起きる点が  $C_n, C_{n+1}$  の交点上にあるのが II. の場合である.

さて, I. では,  $\nu = \nu^n(k_0)$  を臨界分岐点として  $n$  モードの周期解がどのように出現するかが局所分岐解析の問題となる. また II. のように  $(\nu^{n, n+1}, k_0^{n, n+1})$  の近くでは  $m, m+1$  モードの周期解や複合モード解がどのように分岐するかが解析対象になる.

未知関数  $u(t, x)$  は  $x$  に関する周期関数としているので  $u$  をフーリエ展開しよう. すなわち周期境界条件下で許容される波数すべてにわたって分解して,

$$u(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m(t) e^{imk_0 x}. \quad (2.4)$$

関数  $u(t, x)$  は実数値としているので,  $m, -m$  のフーリエ係数は互いに複素共役:  $\alpha_{-m} = \overline{\alpha_m}$  である. これによって  $u$  に関する方程式 (mSH) をフーリエ係数に関する方程式に直すと,

$$\alpha_m = \lambda_m \alpha_m + pk_0^2 \sum_{m_1+m_2=m} m_1 m_2 \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} - q \sum_{m_1+m_2+m_3=m} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

となる. ここで,  $\lambda_m = \lambda(\nu, mk_0)$ . また  $\alpha_{-m} = \overline{\alpha_m}$  より (2.5) は実質  $m \geq 0$  で考えれば十分である.

臨界点付近では標準的な中心多様体縮約 ([2],[4]) を行い無限次元の力学系を臨界モード数の次元の不変多様体上の力学系に帰着する. すなわち I. の単純臨界型の場合は  $S = \{n, -n\}$  を臨界モードに対応する番号の集合とすると,  $\nu \approx \nu^n(k_0)$  では  $\text{Re} \lambda_m \approx 0 (m \in S)$  かつ  $\text{Re} \lambda_{m'} <$

$-\kappa < 0 (m' \notin S)$  なので,  $\alpha_n, \alpha_{-n}$  を臨界モードとして中心多様体の縮約を行う。こうして得られた中心多様体を  $C^I$  とする。これに対して II. の多重臨界点の場合は  $(\nu, k_0) \approx (\nu^{n,n+1}, k_0^{n,n+1})$  では4つの臨界モード  $\{\alpha_m\}_{m \in S_{II}}, S_{II} = \{n, n+1, -n, -(n+1)\}$  がある。こうして得られる中心多様体  $C^{II}$  は  $\{\alpha_m(t)\} = 0$  の近傍で局所不変な複素2次元多様体(臨界モードは見かけ4つだが共役対称性から実質2つ)で, 臨界モード  $\{\alpha_m\}_{m \in S}$  で張られる超平面に接しており, さらに近傍の流れを指数的に吸引している。

さらに中心多様体縮約は実は対称性を保存したまま行うことができる。すなわち中心多様体の構成は, 縮約前の方程式が滑らかな群作用  $\gamma \in G$  に関して不変である場合, 中心多様体(したがって関数  $\psi$  も)も  $\gamma \in G$  に関して不変であるようにできる。方程式(2.5)は空間座標に依存しない偏微分方程式から得られたものなので, 自然に次のような対称性をもつ, すなわち方程式が次で不変である。

$$\gamma_\theta(\{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{Z}}) = \{e^{im\theta} \alpha_m\}_{m \in \mathbb{Z}}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (2.6)$$

これは未知関数  $u(t, x)$  を  $u(t, x + \theta/k_0)$  に平行移動することに対応する。したがって方程式(2.5)に関する中心多様体も  $\gamma_\theta$  に関して不変である。

本稿で扱う問題はすべてこの  $SO(2)$  不変性を持つが, 以下 (mSH) と (Bn) に対する分岐解析結果を個別に述べる。

## 2.1 (mSH) の周期定常パターン

まず, 単純臨界 I. の場合, 予想されるように超臨界型 Pitchfork 分岐として定常解が現れる。

**定理 2.1**  $q > 0$  で  $n \geq 1$  とする。  $\nu > \nu^n(k_0)$  で  $\kappa = \nu - \nu^n(k_0)$  が十分小さければ (mSH) の定常解  $u(x)$  で  $u(x + \frac{x}{n}) = u(x)$  の意味で空間周期的な解が存在する。さらに  $u$  の空間プロフィールは適当な  $\theta \in [0, 2\pi)$  を用いて

$$u(x) = O(\sqrt{\kappa}) e^{i(nk_0x + \theta)} + c.c. + O(\kappa)$$

と表され, 平行移動を除いて漸近安定である。

次に多重臨界 II. の場合は次のように  $n, n+1$  のより異なるが複合モードが安定に得られることがある。

**定理 2.2**  $n \geq 2$  とする。ある定数  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  と  $\delta, \kappa > 0$  が存在して,  $|(\nu, k_0) - (\nu^{n,n+1}, k_0^{n,n+1})| < \kappa$  のとき (2.5) の中心多様体上  $C^{II}$  のダイナミクスは,  $|A|, |B| < \delta$  であるかぎり次の方程式で支配される:

$$\begin{cases} \dot{A} = A(\lambda_n + a|A|^2 + b|B|^2) + O(\delta^4) \\ \dot{B} = B(\lambda_{n+1} + c|A|^2 + d|B|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (2.7)$$

ただし  $(A, B) = (\beta_n, \beta_{n+1})$  で  $\beta_n = \alpha_n + O(\alpha^2)$  である。

なお  $a, b, c, d$  は以下の通りである。

## 命題 2.3

$$\begin{aligned}
a &= a_n := \frac{4p^2 k_0^4 n^4}{\lambda_{2n}} - 3q, \\
b &= b_n := 4p^2 k_0^4 n(n+1)^2 \left( \frac{-1}{\lambda_{-1}} + \frac{2n+1}{\lambda_{2n+1}} \right) - 6q, \\
c &= c_n := 4p^2 k_0^4 n^2(n+1) \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{2n+1}{\lambda_{2n+1}} \right) - 6q, \\
d &= d_n := \frac{4p^2 k_0^4 (n+1)^4}{\lambda_{2(n+1)}} - 3q.
\end{aligned}$$

これらを示すには, SO(2) 不変な力学系の 3 次の標準形を求めるという標準的な計算を行う. 詳細は [9] と重複するので, 手順のみ以下に示す. すなわち

$$\beta_m(t) = \alpha_m(t) + \sum_{m_1+m_2=m} S_{m_1, m_2, m} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \quad (2.8)$$

の変換により 2 次の項が消去できるように未定係数  $S_{m_1, m_2, m}$  を決定する. 各  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  に対して  $\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} - \lambda_{m_1+m_2} \neq 0$  となれば (これを non-resonance 条件という)

$$S_{m_1, m_2, m} = -\frac{pk_0^2 m_1 m_2}{\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} - \lambda_m} \quad (2.9)$$

と定めることにより 2 次の項が消去される. 実際には中心多様体上の方程式で 2 次の項が消えれば十分なので non-resonance 条件は  $m = m_1 + m_2 \in S$  で成立すればよい. ここで,  $m \in S$  と  $\lambda_m = 0$  は同値なので  $m = m_1 + m_2 \in S$  で  $\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} = \lambda_{m_1+m_2}$  となるには次の 2 通りしかない.

- i)  $m_1 \notin S$  かつ  $m_2 \notin S$
- ii)  $m_1 \in S$  かつ  $m_2 \in S$

i) のときには resonance で残る 2 次の項は高次項 (4 次以上) になるので無視してよい. ii) の場合が 2 次の項を消去するに当たって真に困る resonance である.

さて,  $S = \{n, -n\}$  のときは  $m_1, m_2, m_1 + m_2 \in S$  となることはない. したがって non-resonance である. (次節で行う複合モード解析では  $S = S_{\text{II}} = \{n, n+1, -n, -(n+1)\}$  なので, 1-2 モードの resonance が現れる. また後述する空間 2 次元の設定では正六角パターン resonance が現れる.) 以上のことより, 3 次の係数を計算すると定理 2.1 が示される.

このことより,  $\nu$  が I. のような臨界の超え方をすると 2 次の項があろうとなかろうと 3 次の係数が負であれば非自明解 (周期定常解) が超臨界 Pitchfork 的に分岐することがわかる. Kuramoto-Sivashinsky 方程式でも同様のことが示せる.

次に  $S = S_{\text{II}} = \{n, n+1, -n, -(n+1)\}$  に対して non-resonance 条件を調べよう.  $n = 1$  のとき  $S = 1, 2, -1, -2$  で  $(m_1, m_2) = (1, 1), (2, -1), (-1, 2)$  が resonance である. したがって  $n = 1$  のときは 2 次の項を消去することはできない. 実際, 中心多様体上の方程式は

$$\begin{cases} \dot{A} = \sigma_1 \bar{A} B + A(\lambda_1 + a|A|^2 + b|B|^2) + O(\delta^4) \\ \dot{B} = \sigma_2 A^2 + B(\lambda_2 + c|A|^2 + d|B|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (2.10)$$

と表される. ここで,  $\sigma_1, \sigma_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$  は  $p, q$  から決まる定数である. このように 2 次の項があると以下のような簡単な解析ができず, 解析が難しいが, そのダイナミクスは豊富な構

造をもつ。興味のある読者は [1] を参照してほしい。一方  $n > 1$  のときは容易にわかるように resonance はない。さらに  $m_1, m_2, m_3 \in S_{II}$  で  $m_1 + m_2 + m_3 = n$  をみたす組み合わせは  $n \geq 1$  のときには

$$n = n + n + (-n), \quad n = n + (n+1) + (-(n+1))$$

の2種類であることに着目すると、定理 2.2 と命題 2.3 が得られる。

多重分岐の場合の結果 (定理 2.2, 命題 2.3) が意味することは、単一モード解と複合モード解 (不変トーラス) の安定性が2次元のダイナミクスで解析できるところにある。

たとえば通常の Swift-Hohenberg 方程式  $p = 0, q = 1$  のときの中心多様体上のダイナミクスは

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_n = \alpha_n(\lambda_n - 3|\alpha_n|^2 - 6|\alpha_{n+1}|^2) + O(\delta^4), \\ \dot{\alpha}_{n+1} = \alpha_{n+1}(\lambda_{n+1} - 6|\alpha_n|^2 - 3|\alpha_{n+1}|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (2.11)$$

で与えられる。はじめに偶関数に制限し  $r = \alpha_n$  と  $s = \alpha_{n+1}$  がいずれも実数とする。(2.11) から  $r, s$  のダイナミクスを求めると、

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda_n^{SH} - 3r^2 - 6s^2) + O(\delta^4), \\ \dot{s} = s(\lambda_{n+1}^{SH} - 6r^2 - 3s^2) + O(\delta^4). \end{cases}$$

図 2 は多重臨界点  $(\nu^{n,m}, k_0^{n,m})$  まわりの分岐図である。

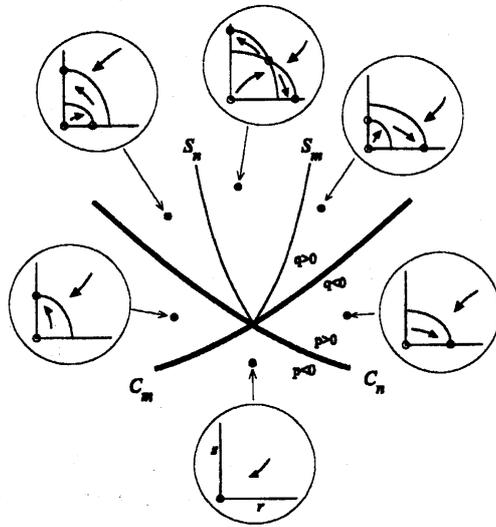


図 2: (SH) における  $n, m$  フーリエモードの多重臨界点まわりのダイナミクスを  $(\nu, k_0)$ -パラメータ空間で示す。相図中で  $p = \lambda_n, q = \lambda_{n+1}$  で、黒丸は安定、白丸は不安定平衡点を示す。

最も多くて9つの平衡点:  $(0, 0), (\pm r_0, 0), (0, \pm s_0), (\pm r_1, \pm s_1)$  があるが、この中で  $(\pm r_1, \pm s_1)$  を複合モード点と呼ぼう。複合モード点は  $0 < \frac{\lambda_n}{2} < \lambda_{n+1} < 2\lambda_n$  で存在し、サドル状の不安定平衡点である。またこれは (SH) の複合モード定常解:

$$u(x) = \pm 2r_1 \cos nk_0x \pm 2s_1 \cos(n+1)k_0x + O(\delta^4) \quad (2.12)$$

に対応する。平行移動から来る群作用をもちいて、他の定常解

$$u(x) = 2r_1 \cos nk_0(x + \theta) \pm 2s_1 \cos(n+1)k_0(x + \theta) + O(\delta^4), \quad 0 \leq \theta < L \quad (2.13)$$

を作ることができる。ここでもう一度、(2.11)の力学系そのものを考えよう。上で得られた複合モード点（およびその群作用軌道）は(2.11)の不変トーラス

$$T = \{(\alpha_n, \alpha_{n+1}) : |\alpha_n| = r_1, |\alpha_{n+1}| = s_1\}$$

の上にある。便宜上  $T$  上の点を

$$(r_1 e^{i\phi}, s_1 e^{i\psi}) \in T \mapsto (\phi, \psi) \in \mathbf{R}^2 / (2\pi\mathbf{Z})^2$$

で表すことにする。(2.13)から  $T$  上の1つまたは2つの閉曲線：

$$\{(\phi, \psi) \in \mathbf{R}^2 / (2\pi\mathbf{Z})^2 : (n+1)\phi = n\psi, \text{ or } (n+1)\phi = n(\psi + \pi)\} \quad (2.14)$$

は平衡点からなることがわかる。しかしながら  $T$  上の残りの領域に関してはどうなっているのかは3次の標準形からは定まらないので、より高次の計算を要する。

(mSH)の一般の場合は  $p, q, n$  によって異なる。例えば Kuramoto-Sivashinsky の場合： $p = 1, q = 0$  を考えよう。このとき命題2.5より  $n$  によらずに  $a, c, d < 0$  であり、 $n = 2, 3, 4$  のとき  $b > 0$  で  $n \geq 5$  のとき  $b < 0$  であることがわかる。さらに  $n \leq 5$  のとき  $ad - bc > 0$  で  $n > 5$  のとき  $ad - bc < 0$  である。したがって振幅方程式の特性は  $n$  によって異なる(図3)。(KS)で特に顕著なところは  $n \leq 5$  で安定な複合モード点が見れることである。これは  $C^{\text{II}}$  上に安定な不変トーラスがあることを意味する。したがって Kuramoto-Sivashinsky 方程式ではパラメーター  $\nu$  とシステムサイズ  $L$  を適当にとれば複合モード波が安定に観測される。この安定な不変トーラス上のダイナミクスを決定するには上と同様3次の標準形では不十分で4, 6, 8, ... 次の resonance 項を計算して定めることが必要であるがここでは省略する。

## 2.2 (Bn)の周期進行波解の分岐

(Bn)に関して前小節と同様の分岐解析を行うと次の結果が得られる。得に、多重臨界IIの場合には  $\varepsilon$  を小さくすると複合モード解が安定に出現しやすくなる。この場合の複合モードも安定な不変トーラスであるがトーラス上のダイナミクスは、周期軌道/擬周期軌道で埋め尽くされることがわかる。

**定理 2.4**  $n \geq 1$  とする。  $\nu > \nu^n(k_0)$  で  $\kappa = \nu - \nu^n(k_0)$  が十分小さければ (Bn) の進行波解： $u(t, x) = u(x + ct)$  が存在しこれは  $u(t, x + \frac{L}{n}) = u(t, x)$  の意味で空間周期的である。さらに  $u$  の空間プロファイルは適当な  $\theta \in [0, 2\pi)$  を用いて

$$u(0, x) = O(\sqrt{\kappa})e^{i(nk_0x + \theta)} + c.c. + O(\kappa)$$

と表され、進行波速度は  $c = n^2 k_0^2 + O(\kappa)$  である。

**定理 2.5**  $n \geq 1$  とする。ある定数  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  と  $\delta, \kappa > 0$  が存在して、 $|(\nu, k_0) - (\nu^{n, n+1}, k_0^{n, n+1})| < \kappa$  のとき中心多様体上  $C^{\text{II}}$  のダイナミクスは、 $|A|, |B| < \delta$  であるかぎり次の方程式で支配される：

$$\begin{cases} \dot{A} = A(\lambda_n + a|A|^2 + b|B|^2) + O(\delta^4) \\ \dot{B} = B(\lambda_{n+1} + c|A|^2 + d|B|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (2.15)$$

ただし  $(A, B) = (\beta_n, \beta_{n+1})$  で  $\beta_n = \alpha_n + O(\alpha^2)$  である。

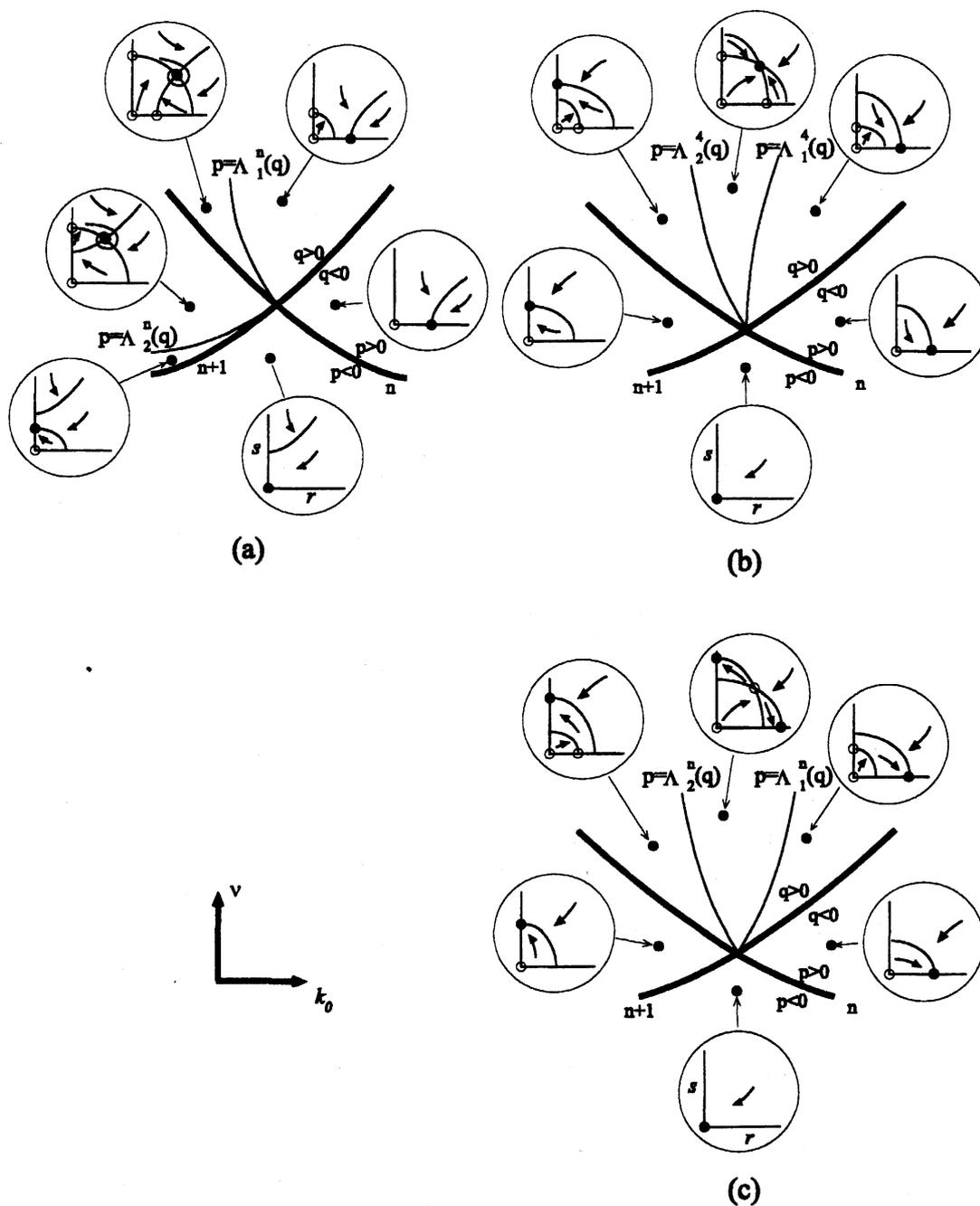


図3:  $n, n+1$  モードの多重臨界点まわりの (KS) の分岐ダイアグラムを  $(\nu, k_0)$ -パラメータ空間で示す. 相図は2つのフーリエモードの振幅のダイナミクスで, 黒丸は安定, 白丸は不安定平衡点を示す. また  $p = \lambda_n$ ,  $q = \lambda_{n+1}$  で, (a)  $n \leq 4$ , (b)  $n = 5$ , (c)  $n \geq 6$  の3つに分類される. (Bn) のときは (a)  $n \geq 5$ , (b)  $n = 4$ , (c)  $n \leq 3$  に対応.

なお  $a, b, c, d$  は以下の通りである.

**命題 2.6**

$$\begin{aligned} a &= a_n := k_0^2 \left( \frac{n^2}{\lambda_{2n} + \lambda_{-n} - \lambda_n} \right), \\ b &= b_n := k_0^2 \left( \frac{-n}{\lambda_{-1} + \lambda_{n+1} - \lambda_n} + \frac{n(2n+1)}{\lambda_{2n+1} + \lambda_{-(n+1)} - \lambda_n} \right), \\ c &= c_n := k_0^2 \left( \frac{n+1}{\lambda_1 + \lambda_n - \lambda_{n+1}} + \frac{(n+1)(2n+1)}{\lambda_{2n+1} + \lambda_{-n} - \lambda_{n+1}} \right), \\ d &= d_n := k_0^2 \left( \frac{(n+1)^2}{\lambda_{2(n+1)} + \lambda_{-(n+1)} - \lambda_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

さらに  $\varepsilon$  が十分小さければ

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_n &= -\frac{\varepsilon}{12} \frac{(n-1)(3n+1)}{n^2} + O(\varepsilon^2), \\ \operatorname{Re} b_n &= -\frac{\varepsilon}{9(n+1)} \left\{ \frac{(3n+1)(3n+2)}{2n+1} - (n-1)(n+2) \right\} + O(\varepsilon^2), \\ \operatorname{Re} c_n &= -\frac{\varepsilon}{9n} \left\{ \frac{(3n+1)(3n+2)}{2n+1} + (n-1)(n+2) \right\} + O(\varepsilon^2), \\ \operatorname{Re} d_n &= -\frac{\varepsilon}{12} \frac{(n+2)(3n+2)}{(n+1)^2} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

前小節と同様の分岐解析による. 詳細は略す.

$n \geq 2$  のとき  $\varepsilon > 0$  を十分小さく取れば次のように符号が確定する.

$$\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} c, \operatorname{Re} d < 0,$$

$$\operatorname{Re} b \begin{cases} > 0 & (n \geq 5) \\ < 0 & (n \leq 4) \end{cases}$$

1-2 モードが resonance にならないので, 定理 2.5 は  $n = 1$  でも成り立つが  $\operatorname{Re} a$  の符号が  $n \geq 2$  でないと確定しない.

さて中心多様体上のダイナミクスの主要項は

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\operatorname{Re} \lambda_n + \operatorname{Re} a r^2 + \operatorname{Re} b s^2) \\ \dot{s} = s(\operatorname{Re} \lambda_{n+1} + \operatorname{Re} c r^2 + \operatorname{Re} d s^2) \\ \dot{\phi} = \operatorname{Im} \lambda_n + \operatorname{Im} a r^2 + \operatorname{Im} b s^2 \\ \dot{\psi} = \operatorname{Im} \lambda_{n+1} + \operatorname{Im} c r^2 + \operatorname{Im} d s^2 \end{cases}$$

で与えられる. 振幅方程式の特性は  $n$  によって異なる (図 3). (Bn) で特に顕著なところは  $n \geq 4$  で安定な複合モード点 (不変トーラス) が現れることである.

位相ダイナミクスは今度は非自明で, その主要項は  $\dot{\phi} \approx n^3 k_0^3$  と  $\dot{\psi} \approx (n+1)^3 k_0^3$  で与えられるので, トーラス上に周期軌道あるいは擬周期軌道があることになる. さらにこの軌道は (SH)

のときに述べた平行移動の群作用と横断的に交わるので1つの軌道からトーラス上のすべての軌道が生成されることになる。複合モードの主要項は

$$u(t, x) = 2r_1 \cos(nk_0x + n^3k_0^3t) + 2s_1 \cos((n+1)k_0x + (n+1)^3k_0^3t)$$

で与えられ、変調波と呼ばれる。この主要項は  $T$  上の周期軌道であるが一般には高次項があるので、擬周期軌道になる。

### 3 2D Benney 方程式の複合モード解

前節で見たように Benney 方程式では、低いモードどうしの相互作用だけでなく高いモードどうしの相互作用にも安定な複合モード解が現れた。空間2次元の設定で複合モード解の安定性を議論し2次元での進行波解パターンの解析の手がかりにしたい。

Benney 方程式の拡張として次の2つの空間2次元の方程式を考えよう。  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  として、

$$u_t = \varepsilon\{\nu - (1 + \Delta)^2\}u - \Delta u_x - uu_x \quad (3.1)$$

$$u_t = \varepsilon\{\nu - (1 + \Delta)^2\}u - u_{xxx} - uu_x \quad (3.2)$$

で、ほとんど今までの議論が平衡して成立する。まずは  $u = e^{\lambda t + i(kx + ly)}$  を代入して分散関係式がそれぞれ次で与えられる：

$$\lambda = \lambda_1(\nu, k, l) = \varepsilon\{\nu - (1 - k^2 - l^2)^2\} + ik(k^2 + l^2)$$

$$\lambda = \lambda_2(\nu, k, l) = \varepsilon\{\nu - (1 - k^2 - l^2)^2\} + ik^3$$

(3.1) (3.2) を長方形領域  $[0, L_1] \times [0, L_2]$  に周期境界条件付きで考えよう。このとき許容される波数は  $(k, l) = (mk_0, nl_0)$ ,  $k_0 = 2\pi/L_1$ ,  $l_0 = 2\pi/L_2$ ,  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  である。次のことを問題にしよう。「着目するモード  $(m, n)$  を固定して、 $\nu$  と領域サイズ  $(k_0, l_0)$  をコントロールして非自明な複合モードがあるか？」

$(m, n)$  モードの安定性に関する臨界集合を

$$S_{m,n} = \{(\nu, k_0, l_0) | \nu = \nu(k_0, l_0) = (1 - m^2k_0^2 - n^2l_0^2)^2\}$$

とおく。ところで  $\nu(k_0, l_0)$  は  $m, n$  によらずに

$$C_{m,n} = \{(k_0, l_0) | m^2k_0^2 + n^2l_0^2 = 1\}$$

上のすべての点で最小値  $\nu = 0$  をとる。互いに異なる  $C_{m,n}$  どうしでいくつもの交点があるが、このうち  $C_{2,0}, C_{1,1}$  の交点  $(k_0, l_0) = (1/2, \sqrt{3}/2)$  に着目しよう。

このパラメータの近傍に正六角パターンが含まれている。フーリエ展開はこの場合以下のようなになる：

$$u(t, x) = \sum_{\mathbf{m}=(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{\mathbf{m}}(t) e^{i(mk_0, nl_0) \cdot (x, y)}$$

### 3.1 正六角 resonance のある場合

さて  $(\nu, k_0, l_0) \approx (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$  では  $S = \{(\pm 2, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$  (複号同順) の 6 モードが臨界で, (3.1) のときには, 正六角パターンの resonance が現れる. すなわち  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = ((1, 1), (1, -1)), ((-2, 0), (1, 1)), ((-2, 0), (1, -1))$  の 3 つがそれである. したがってこの場合の中心多様体上の縮約方程式は

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = -p\overline{A}_2 \overline{A}_3 + A_1(\lambda_{(2,0)} - 3|A_1|^2 - 6|A_2|^2 - 6|A_3|^2) \\ \dot{A}_2 = -p\overline{A}_3 \overline{A}_1 + A_2(\lambda_{(1,1)} - 6|A_1|^2 - 3|A_2|^2 - 6|A_3|^2) \\ \dot{A}_3 = -p\overline{A}_1 \overline{A}_2 + A_3(\lambda_{(1,-1)} - 6|A_1|^2 - 6|A_2|^2 - 3|A_3|^2) \end{cases} \quad (3.3)$$

で与えられる. ここで,  $A_1 \in \mathbf{R}, A_2 = A_3 = 0$  で (3.3) の定常解を求めると,

$$\partial_t A_1 = \lambda A_1 - 3A_1^3 + O(|A_1|^4)$$

と Pitchfork 的にロールパターンが分岐していることがわかる. 一方  $A_1 = A_2 = A_3 \in \mathbf{R}$  に (3.3) を制限すると,

$$\partial_t A_1 = \lambda A_1 - pA_1^2 - 15A_1^3 + O(|A_1|^4)$$

の定常解で正六角パターンが得られる. (3.3) での安定性解析を加味することによりロールパターンは線形不安定であるが, 正六角パターンの分岐ブランチがサドル・ノード的に安定性を回復することがわかる. しかしながらこうした正六角 resonance に付随する安定な正六角パターンは Benney 方程式特有のものではなく非対称な境界条件を与えた Rayleigh-Bénard 対流問題や非対称 Swift-Hohenberg 方程式 ([3]) などでも同様の議論が知られている.

### 3.2 正六角 resonance のない場合

(3.2) のときは, 分散関係式によると正六角パターンの resonance はないので,

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_1(\lambda_{(2,0)} - a|A_1|^2 - b|A_2|^2 - b|A_3|^2) \\ \dot{A}_2 = A_2(\lambda_{(1,1)} - b|A_1|^2 - a|A_2|^2 - b|A_3|^2) \\ \dot{A}_3 = A_3(\lambda_{(1,-1)} - b|A_1|^2 - b|A_2|^2 - a|A_3|^2) \end{cases} \quad (3.4)$$

が得られる. ここで,  $A_1 = \alpha_{(2,0)}, A_2 = \alpha_{(-1,-1)}, A_3 = \alpha_{(-1,1)}$  である. さて (3.4) から極座標  $A_i = r_i e^{i\phi_i}$  を用いて振幅方程式を分離すると,

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1(\mu - \Re a r_1^2 - \Re b r_2^2 - \Re b r_3^2) \\ \dot{r}_2 = r_2(\mu - \Re b r_1^2 - \Re a r_2^2 - \Re b r_3^2) \\ \dot{r}_3 = r_3(\mu - \Re b r_1^2 - \Re b r_2^2 - \Re a r_3^2) \end{cases} \quad (3.5)$$

が得られるが, これは定常解として

- (O) :  $(0, 0, 0)$
- (R) :  $(r^\dagger, 0, 0), (0, r^\dagger, 0), (0, 0, r^\dagger)$
- (PQ) :  $(r^\dagger, r^\dagger, 0), (0, r^\dagger, r^\dagger), (r^\dagger, 0, r^\dagger)$
- (H) :  $(r^*, r^*, r^*)$

を持つ。これらは (O) : 自明解, (R) : ロール解, (PQ) : パッチワーク・キルト解, (H) : 正六角形パターンである。それぞれ (3.5) の意味で正の線形化固有値の数は (O) : 3, (R) : 0, (PQ) : 1, (H) : 2 である。特に (H) での線形化固有値は  $b - a > 0, b - a > 0, -a - 2b < 0$  でヘキサゴン (に対応するトーラス) は (トーラスに横断的な方向のダイナミクスをみると) サドルである。これは, (2.11) (ひいては図 2) と同様の状況で, 不安定な複合モード解:

$$u(t, x, y) = e^{i(x+ct)} + e^{i(x+ct+\sqrt{3}y)/2} + e^{i(x+ct-\sqrt{3}y)/2} + c.c.$$

に対応する。

次に別のモード相互作用の中に resonance がなく, かつ安定な非自明複合パターンがあり得るかを考察する。例えば  $C_{n+1,0}, C_{n,1}$  の交点に着目し  $n \geq 1$  に対して  $(\nu, k_0, l_0) \approx (0, \frac{1}{n+1}, \frac{\sqrt{1+2n}}{n+1})$  とすると  $S = \{(\pm 2, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$  が臨界モードになる。

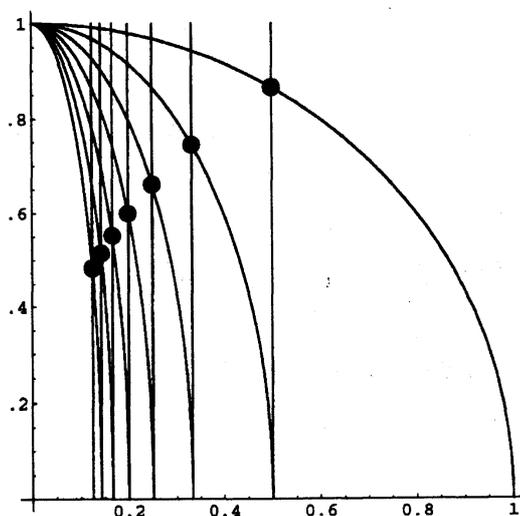


図 4:  $C_{n+1,0}, C_{n,1}$  とその交点を各  $n = 1, \dots, 7$  について図示する。

(図 4) からわかるように  $n$  が増えるに従い, 複合モードは正六角パターンとかけ離れて, むしろ 1 次元的な  $n, n+1$  モードの複合モード (振幅変調波) に近づくが, 標準形を求めると,  $\varepsilon$  を小さくすれば非自明な複合モードが安定に得られることがわかる。

ここでは標準形の計算の詳細は省略するが, 非線形性が線形化臨界モードにどのような影響を与えその結果として得られるダイナミクスがどうなるかが自明でないのは上のいくつかの例に見たとおりである。こうした局所分岐解析をすべての臨界点で行い中心多様体上のダイナミクスを決定すればパターン形成の理論に新たな知見を与えることができるであろう。

## 参考文献

- [1] D.ARMBRUSTER, J.GUCKENHEIMER AND P.HOLMES, *Heteroclinic cycles and modulated travelling waves in systems with  $O(2)$  symmetry*, Physica D 29 (1988), no. 3, 257-282.
- [2] J.CARR, *Applications of center manifold theory*, Applied Mathematical Sciences 45, Springer, 1981.

- [3] M.CROSS AND P.HOHENBERG, *Pattern formation outside of equilibrium*, Reviews of Modern Physics, 65(3), 1993.
- [4] D.HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture notes in mathematics 840, Springer, 1981.
- [5] H.IWASAKI, S.TOH AND T.KAWAHARA, *Cylindrical quasi-solutions of the Zakharov-Kuznetsov equation*, Physica D 43 (1990), pp. 293-303.
- [6] T.OGAWA AND C.LIU, *Two dimensional patterns of pulses appearing in a thin viscous film flow*, Physica D, 108(1997), 277-290.
- [7] T. OKUZONO AND T. OHTA, *Traveling waves in phase-separating reactive mixtures*, Phys. Rev. E 67, 2003.
- [8] S. TOH, H. IWASAKI AND T. KAWAHARA, *Two-dimensionally localized pulses of a nonlinear equation with dissipation and dispersion*, Physical Review A, 40-9 (1989), pp. 5472-5475.
- [9] 小川知之, 周期波の弱非線形解析 (「Summer School 数理物理 2003 —流体力学・乱流の数理—」講義録), 物性研究, Vol. 8 1 No. 3, 2003.
- [10] 小川知之, ベナール対流におけるヘキサゴンパターンと複合ロールの安定性, 数理解析研究所講究録「波動の非線形現象とその応用」投稿中.