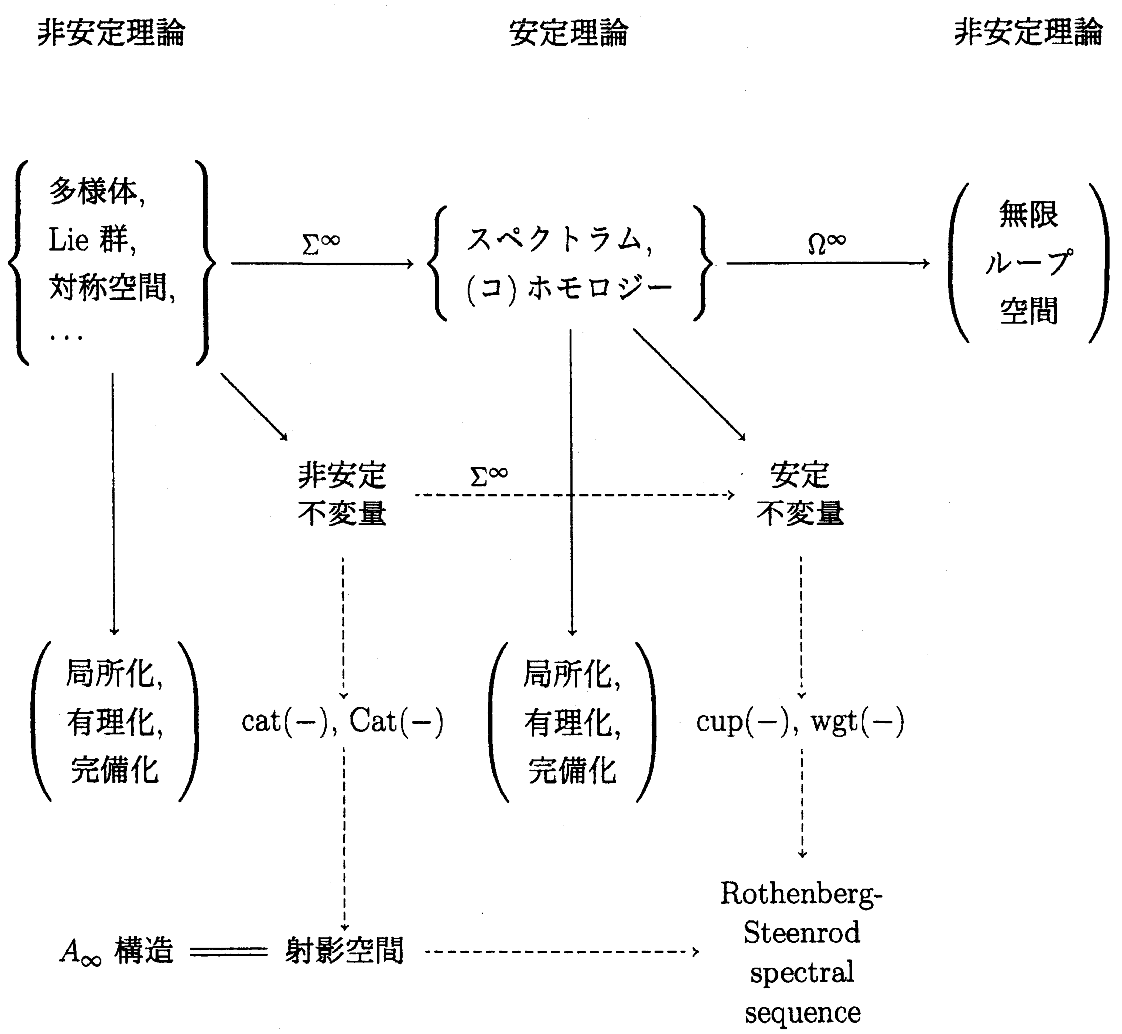
数理解析研究所講究録 1370 巻 2004 年 69-81

L-S CATEGORY OF CLOSED MANIFOLDS

九州大学・大学院数理学研究院　岩瀬 則夫 (Norio Iwase)
Faculty of Mathematics,
Kyushu University



1　ガネアの問題 [Ganea, 1971, (全 15 題) [10]]

1. 多様体の L-S category を計算せよ。　例えば Lie 群、Stiefel 多様体、$\cdots$

2. $\mathrm{cat}(X \times S^n) = \mathrm{cat}(X) + 1$ である。 これは正しいか?

4. 球面上の球面束の LS category を束の特性写像のホモトピー不変量によって記述せよ。

2 Lusternik-Schnirelmann category

定義 2.1

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\{U_0, ..., U_m\,;\ \text{open in } X\} \\ X = \bigcup_{i=0}^{m} U_i,\ \text{each } U_i \text{ is contractible } \underline{\mathit{in}}\ X \end{array} \right\}$$

定理 2.2 (Lusternik-Schnirelmann [21])
閉多様体 M 上定義されたいかなる C^∞-写像も $\mathrm{cat}(M)+1$ 個以上の *critical points* を持つ。

2.1 「強い」猫たち

以下の位相不変量 $\mathrm{gcat}(X)$ も同様に定義されるが、R. H. Fox によってホモトピー不変でないことが知られている。さらに Ganea によってこれをホモトピー不変となるように変更した不変量 $\mathrm{Cat}(X)$ が与えられた。

$$\mathrm{gcat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\{A_0, \ldots, A_m\,;\ \text{closed in } X\} \\ X = \bigcup_{i=0}^{m} A_i,\ \text{each } A_i \text{ is contractible} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \exists_{\{Y(\simeq X)\}}\, \mathrm{gcat}(Y) = m \right\}$$

定理 2.3 (Ganea [9])

$$\mathrm{Cat}(X) - 1 \leq \mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq g\mathrm{cat}(X).$$

定義 2.4 (Ganea [9]) 位相空間 X に対して、CW複体の連続写像の集合 $\{h_n : A_n \to Y_n \;\; m \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C(h_n) \supset Y_n$ $(m{-}1 \geq n)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか? その最少数から1を引いた数を $\mathrm{Cone}(X)$ で表す。 また空間 X に対するこのような表示を *cone* 分解などと呼ぶ。

定理 2.5 (Ganea [9]) $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$ である。

事実 2.6 *(1)* $\mathrm{cat}(\{*\}) = 0$ である。

(2) $\mathrm{cat}(S^n) = 1$である。一般に$\mathrm{cat}(\Sigma V) \leq 1$である。

(3) XがYを支配すれば、$\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(Y)$である。特に、$X$が$Y$とホモトピー同値なら$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$である。

(4) *(Varadarajan [34], Hardie [11]) Fibre*束(E, p, B, F)は不等式$\mathrm{cat}(E)+1 \leq (\mathrm{cat}(F)+1)\cdot(\mathrm{cat}(B)+1)$をみたす。

(5) *(Fox [8])* $\mathrm{cat}(X\times Y) \leq \mathrm{cat}(X)+\mathrm{cat}(Y)$である。

(6) *(Takens [30])* $\mathrm{Cat}(X\times Y) \leq \mathrm{Cat}(X)+\mathrm{Cat}(Y)$である。

例 2.7 *(1)* $X = S^n$: $\quad S^{n-1} \to \{*\} \hookrightarrow S^n, \quad \mathrm{Cat}(S^n) = 1.$

(2) $X = \mathbb{F}P^m$: $\quad (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *or* $\mathbb{H}, d = \dim \mathbb{F})$

$S^{d-1} \to \{*\} \hookrightarrow S^d = \mathbb{F}P^1, \quad S^{2d-1} \to \mathbb{F}P^1 \hookrightarrow \mathbb{F}P^2,$

$\cdots, \quad S^{md-1} \to \mathbb{F}P^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{F}P^m, \quad \mathrm{Cat}(\mathbb{F}P^m) = m.$

(3) $X = \mathrm{SU}(3)$: $\quad \mathbb{C}P^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 \cup_{\eta_3} e^5 = \mathrm{SU}(3)^{(5)},$

$S^7 \to \mathrm{SU}(3)^{(5)} \hookrightarrow \mathrm{SU}(3), \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{SU}(3)) = 2.$

(4) $X = \mathrm{Sp}(2)$: $\quad S^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 = \mathrm{Sp}(2)^{(3)},$

$S^6 \to \mathrm{Sp}(2)^{(3)} \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2)^{(3)} \cup e^7 = \mathrm{Sp}(2)^{(7)},$

$S^9 \to \mathrm{Sp}(2)^{(7)} \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2), \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(2)) = 3.$

(5) $X = \mathrm{G}_2$: $\quad \mathbb{C}P^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 \cup_{\eta_3} e^5 = {\mathrm{G}_2}^{(5)},$

$(S^5 \vee e^7) \to {\mathrm{G}_2}^{(5)} \hookrightarrow {\mathrm{G}_2}^{(5)} \cup (e^6 \vee e^8) = {\mathrm{G}_2}^{(8)},$

$(S^8 \vee e^{10}) \to {\mathrm{G}_2}^{(8)} \hookrightarrow {\mathrm{G}_2}^{(8)} \cup (e^9 \vee e^{11}) = {\mathrm{G}_2}^{(11)},$

$(S^{13}) \to {\mathrm{G}_2}^{(11)} \hookrightarrow \mathrm{G}_2, \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{G}_2) = 4.$

問題 多様体Mは常に$\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Cat}(M)$をみたすか？

問題 [Eilenberg-Ganea [6]] 離散群Gについての次の不等式は、常に等号に置き換えられるか？

$$\mathrm{cd}(BG) \leq \mathrm{cat}(BG) \leq \mathrm{Cat}(BG) \leq \mathrm{gd}(BG).$$

2.2 「弱い」猫たち

定義 2.8 (Whitehead [35, 36])

$$w\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \bigwedge^{m+1} X \\ \textit{is trivial.} \end{array} \right\}$$

ここで $\prod^{m+1} X/\prod_m^{m+1} X = \bigwedge^{m+1} X$ (smash 積) に注意すれば位相空間 X に対して次が成立する。

定理 2.9 (Whitehead) *(1)* $w\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$ である。

(2) h^* を乗法的一般コホモロジー論とする。$\tilde{h}^*(X)$ のどれか m 個の元の積が 0 でないなら $w\mathrm{cat}(X) \geq m$ である。

定義 2.10 *cup-length* は c(−) と表わされることも多いが、ここでは *Chern class* との重複を避けて cup(−) と表わす：

(1) h を乗法的コホモロジーとするとき、次で定義する。

$$\mathrm{cup}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \;\middle|\; \forall_{\{u_0,\cdots,u_m \in \tilde{h}^*(X)\}} u_0 \cdots u_m = 0 \right\}$$

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X;h) \mid h$：乗法的コホモロジー$\}$

注 2.11 $h^*{=}H^*(\ ;R)$ のとき $\mathrm{cup}(X;h)$ を $\mathrm{cup}(X;R)$ で表す。

定理 2.12 $h^*(-)$ を乗法的コホモロジー論とする。

(1) $\mathrm{cup}(X;h){\leq}\,\mathrm{cup}(X){\leq}\, w\mathrm{cat}(X){\leq}\,\mathrm{cat}(X){\leq}\,\mathrm{Cat}(X)$.

(2) $$\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{\Delta}^{m+1} : X \to \bigwedge^{m+1} X \\ \textit{is stably trivial} \end{array} \right\}$$

例 2.13 *(1)* $\mathrm{cup}(S^n;R) = 1 = \mathrm{Cat}(S^n)$, h は任意の環。

(2) $\mathrm{cup}(\mathbb{R}\mathrm{P}^m;\mathbb{Z}) = [\frac{m}{2}]$, $\mathrm{cup}(\mathbb{R}\mathrm{P};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = m = \mathrm{Cat}(\mathbb{R}\mathrm{P}^m)$.

(3) $\mathrm{cup}(\mathrm{L}^n(p);R) = n < 2n{+}1 = \mathrm{Cat}(\mathrm{L}^n(p))$, p は奇素数で R は任意の環。

(4) $\mathrm{cup}(\mathrm{SU}(n);\mathbb{Z}) = n{-}1 = \mathrm{Cat}(\mathrm{SU}(n))$.

(5) $\mathrm{cup}(\mathrm{G}_2;\mathbb{Z}) = 3 < 4 = \mathrm{cup}(\mathrm{G}_2;\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Cat}(\mathrm{G}_2)$.

(6) $\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2);R)=2<3=\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2);KO)=\mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(2))$, Rは任意の環でKOは実K理論。

(7) $\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(3);KO)=4<5=\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(3))=\mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(3))$.

(8) $G=\mathrm{Spin}(n)$, $(n\le 8)$, $G=\mathrm{SO}(m)$, $(m\le 9)$ 又は $G=\mathrm{PU}(n)$, $(n\le 5)$ のとき$\mathrm{cup}(G;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=\mathrm{Cat}(G)$である。

(9) $t>r>1$とし、EをS^{t-1}上のS^r束とすると、$\mathrm{cup}(E)=2\le\mathrm{cat}(E)\le\mathrm{Cat}(E)\le 3$が常に成立し、$\mathrm{cup}(E)=2<3=\mathrm{cat}(E)=\mathrm{Cat}(E)$となる$E$も存在する。

3　A_∞構造とL-S category

空間Xに対し、そのループ空間$\hat{\Omega}X$はStasheffのA_∞構造を持つ。ー準ファイバー空間列$\{p_m^{\hat{\Omega}X}:E^{m+1}(\hat{\Omega}X)\to P^m(\hat{\Omega}X)\}$で、次の図を可換にするものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}X \arrow[r, hook, "\overset{*}{\sim}"] \arrow[d, "p_1^{\hat{\Omega}X}"] & E^2(\hat{\Omega}X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\sim}"] \arrow[d, "p_2^{\hat{\Omega}X}"] & \cdots \arrow[r, hook, "\overset{*}{\sim}"] & E^m(\hat{\Omega}X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\sim}"] \arrow[d, "p_m^{\hat{\Omega}X}"'] & E^{m+1}(\hat{\Omega}X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\sim}"] \arrow[d, "p_{m+1}^{\hat{\Omega}X}"'] & \cdots \arrow[r, hook, "\overset{*}{\sim}"] & E^\infty(\hat{\Omega}X) \arrow[d, "p_\infty^{\hat{\Omega}X}"'] & \\
\{*\} \arrow[r, hook] & P^1(\hat{\Omega}X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^{m-1}(\hat{\Omega}X) \arrow[r, hook] & P^m(\hat{\Omega}X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^\infty(\hat{\Omega}X) & X \arrow[l, "h^X"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

注 3.1 このような準ファイバー空間列は一意ではない。が、ある種の普遍性をみたす標準的な準ファイバー空間列をとることができる。(*Stasheff [28]*)

定理 3.2 ([9] or [13])　位相空間Xが$\mathrm{cat}(X)\le m$を満たすには、$P^\infty(\hat{\Omega}X)\supset P^m(\hat{\Omega}X)$へのホモトピー同値$h^X:X\xrightarrow{\simeq}P^\infty(\hat{\Omega}X)$の圧縮（$\mathrm{cat}(X)\le m$の構造写像）$\sigma(X):X\to P^m(\hat{\Omega}X)$の存在が必要十分である。

Stasheffの標準的なA_∞-構造の「普遍性」から次が得られる。

定理 3.3 ([13])　位相空間X,Yが$\mathrm{cat}(X\times Y)\le m$を満たすには、$h^X\times h^Y$の$\bigcup_{i+j=m}P^i(\hat{\Omega}X)\times P^j(\hat{\Omega}Y)\subset P^\infty(\hat{\Omega}X)\times P^\infty(\hat{\Omega}Y)$への圧縮$\sigma(X,Y):X\times Y\to\bigcup_{i+j=m}P^i(\hat{\Omega}X)\times P^j(\hat{\Omega}Y)$の存在が必要十分である。

3.1 新しい計算可能な不変量

定義 3.4 *Toomer* 不変量の改良版を準同形 $(e^X_m)_*: h^*(X) \to h^*(P^m(\Omega X))$ を用いて導入する。*Toomer* 不変量は e( ) と表示されることが多いが、ここでは *Adams* e 不変量との重複を避けて wgt( ) と表記する：

(1) h を乗法的コホモロジーとする。

$$i)\ \mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m\geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*\ \textit{is a mono}\right\}$$

$$ii)\ M\mathrm{cat}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m\geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*\ \textit{is a split mono of}\ h^*h\textit{-modules}\right\}$$

(2) $i)\ \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h)\,|\,h$ は乗法的コホモロジー $\}$

$ii)\ M\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Max}\,\{M\mathrm{cat}(X;h)\,|\,h$ は乗法的コホモロジー $\}$

定理 3.5 次の不等式が成立する：

$$\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq M\mathrm{cat}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X).$$

さて Rudyak と Strom は Fadell-Husseini [7] の与えた位相不変量 category weight をホモトピー不変量となるように再定義し、L-S の猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 3.6 (Rudyak [24, 25], Strom [29]) $u \in \tilde{h}^*(X)$ (h は乗法的コホモロジー) に対して

$$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*(u) \neq 0\right\}$$

定理 3.7 (Rudyak [24, 25], Strom [29]) h を乗法的なコホモロジーとすると、$\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h)\,|\,u \in \tilde{h}^*(X)\}$ が成立し、次を満たす。

(1) $\mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(v;h) \leq \mathrm{wgt}(uv;h)$ が成立する。

(2) $\min\{\mathrm{wgt}(u;h), \mathrm{wgt}(v;h)\} \leq \mathrm{wgt}(u+v;h)$ が成立する。

(3) $f: Y \to X$ のとき、$\mathrm{wgt}(u;h) \leq \mathrm{wgt}(f^*(u);h)$ が成立する。

定義 3.8 (Rudyak [25])

$$r\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{(stably)\ \sigma: X \to P^m(\Omega X)}\ e^X_m \circ \sigma \sim 1_X\}.$$

定理 3.9　上述の関係式と *Rudyak [25]* から次が成立する。

$$\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) = M\mathrm{cat}(X) = r\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X).$$

3.2　(高次 Hopf 不変量)

Berstein-Hilton [1] により高次 Hopf 不変量は次のように与えられた（s は diagonal map の fat wedge への圧縮）：

$$H^s_m : \pi_q(X; A) \to \pi_{q+1}(\prod^{m+1}(X), \mathrm{T}^{m+1}(X); A), \quad q \geq 1$$

ただし、$\mathrm{T}^{m+1}(X)$ は X の $m+1$ 個の fat wedge である。

ここでは前記の $\mathrm{cat}(X) \leq m$ に対する射影空間への構造写像の存在への障害として次の高次ホップ不変量を与える。

定義 3.10 (非安定および安定 Hopf 不変量)

1）$\mathrm{cat}(X) \leq m$ を満たす空間 X と懸垂空間 ΣV に対し

$$\begin{aligned} &H_m : [\Sigma V, X] \to 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\hat{\Omega} X)]}, \\ &H_m(f) = \left\{ H^{\sigma(X)}_m(f) \mid \sigma(X) \text{ は } \mathrm{cat}(X) = m \text{ に対する構造写像} \right\} \\ &\qquad \subset [\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)] \quad \textit{for } f \in [\Sigma V, X]. \end{aligned}$$

2）さらに安定化関手 Σ^∞ により安定化する。

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_m : [\Sigma V, X] \overset{H_m}{\to} 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\hat{\Omega} X)]} \overset{2^{\Sigma^\infty *}}{\longrightarrow} 2^{\{\Sigma V, E^{m+1}(\hat{\Omega} X)\}} \\ &\mathcal{H}_m(f) = \left\{ \begin{array}{l|l} \mathcal{H}^{\sigma(X)}_m(f) & \sigma(X) \text{ は } \mathrm{cat}(X) = m \text{ に対する構} \\ = \Sigma^\infty H^{\sigma(X)}_m(f) & \text{造写像} \end{array} \right\} \\ &\qquad \subset \{\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)\} \quad \textit{for } f \in [\Sigma V, X] \end{aligned}$$

3）また次が非安定 *crude* ホップ不変量である。

$$\begin{aligned} \bar{H}_m : [\Sigma V, X] &\overset{H_m}{\to} 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\hat{\Omega} X)]} \to 2^{[\Sigma^2 V, \Sigma E^{m+1}(\hat{\Omega} X)]} \\ &\to 2^{[\Sigma^2 V, \Sigma\hat{\Omega} X \wedge \cdots \wedge \Sigma\hat{\Omega} X]} \to 2^{[\Sigma^2 V, X \wedge \cdots \wedge X]}. \end{aligned}$$

4） また次が安定化された *crude* ホップ不変量である。

$$\bar{\mathcal{H}}_m : [\Sigma V, X] \xrightarrow{\bar{H}_m} 2^{[\Sigma^2 V, X\wedge\cdots\wedge X]} \to 2^{\{\Sigma^2 V, X\wedge\cdots\wedge X\}}.$$

定理 3.11 ([14])　ΣV と X は $(d-1)$-連結（$d\geq 2$）とする。また $\mathrm{cat}(X)=m$、$W=X\cup_f C(\Sigma V)$ $(f:\Sigma V\to X)$ とおく。

(1) $\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)$　*if*　$H_m(f)\ni 0$.

(2) $\dim X\leq d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2$ $(d\geq 1)$ のとき、

$\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1$　*if*　$H_m(f)\not\ni 0$.

定理 3.12 ([14])　上でさらに $\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1$ とする。

(1) $\mathrm{cat}(W\times S^n)=\mathrm{cat}(W)$　*if*　$\Sigma^n_* H_m(f)\ni 0$.

(2) $\dim X\leq d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2$ $(d\geq 1)$ のとき、

$\mathrm{cat}(W\times S^n)=\mathrm{cat}(W)+1$　*if*　$\Sigma^{n+1}_* H_m(f)\not\ni 0$.

系 3.12.1　$W=X\cup_f C(\Sigma V)$ $(f:\Sigma V\to X)$ かつ $\dim X\leq d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2$ $(n\geq 1)$ のとき次は同値である。

(1) $\mathrm{cat}(W\times S^n)=\mathrm{cat}(W)+1$ が全ての $n\geq 1$ で成立する。

(2) 「$H_m(f)\not\ni 0$」 $\Longleftrightarrow$ 「$\mathcal{H}_m(f)\not\ni 0$」

例 3.13 ([13])　さて S^{15} が *Hopf* 空間でない *(Toda [31])* ので $[\iota_{15},\iota_{15}]\neq 0$ である。そこで $Q=S^8\cup_{\sigma_8\circ[\iota_{15},\iota_{15}]}e^{30}$ とおくと $\mathrm{cat}(Q\times S^n)=\mathrm{cat}(Q)=2$（$\forall n\geq 1$）が成立する。

※この後 Vandembroucq, Stanley らが様々な反例を得た。

4　問題4 (球面上の球面束の LS cat)

E を S^{q+1} 上の S^r-束（$r\geq 1, q\geq 1$）とする。このとき E は $E\simeq S^r\cup_\alpha e^{q+1}\cup_\psi e^{q+r+1}$ とCW分割される。

事実 4.1 ($\alpha=1_{S^r}$)　$\mathrm{cat}(Q)=0$ & $\mathrm{cat}(E)=1$.

事実 4.2 ($\alpha \neq 1_{S^r}$ & $H_1(\alpha)=0$) cat$(Q)=1$ & cat$(E)=2$.

定理 4.3 ($H_1(\alpha)\neq 0$ **の場合** [14, 15])

[$\Sigma^r H_1(\alpha)=0$ のとき] cat$(Q)=2$ & cat$(E)=2$.

[$\Sigma^r H_1(\alpha)\neq 0$ のとき] cat$(Q)=2$ & cat$(E)=3$.

これらをまとめると次の表が得られる：

<table>
<tr><th colspan="3">Conditions</th><th colspan="4">L-S category</th></tr>
<tr><th>r</th><th>t</th><th>α</th><th>$Q\times S^n$</th><th>Q</th><th>E</th><th>$E\times S^n$</th></tr>
<tr><td rowspan="5">$r=1$</td><td>$t=0$</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$t=1$</td><td>$\alpha=\pm 1$</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\alpha=0$</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>otherwise</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$t>1$</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$r>1$</td><td>$t<r$</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$t=r$</td><td>$\alpha=\pm 1$</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\alpha\neq\pm 1$</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$t>r$</td><td>$H_1(\alpha)=0$</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$H_1(\alpha)\neq 0$
$\Sigma^r H_1(\alpha)=0$</td><td rowspan="2">3 or 2
(1)</td><td rowspan="2">2</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\Sigma^r H_1(\alpha)\neq 0$</td><td>3</td><td>3 or 4
(2)</td></tr>
</table>

(1) $\begin{cases} \Sigma^n H_1(\alpha)=0 \implies \mathrm{cat}(Q\times S^n)=2, \\ \Sigma^{n+1} H_1(\alpha)\neq 0 \implies \mathrm{cat}(Q\times S^n)=3. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \Sigma^{r+n} H_1(\alpha)=0 \implies \mathrm{cat}(E\times S^n)=3, \\ \Sigma^{r+n+1} h_2(\alpha)\neq 0 \implies \mathrm{cat}(E\times S^n)=4. \end{cases}$

5 問題２に対する多様体としての反例

pを奇素数とする。このとき$\alpha_1(3): S^{2p}\to S^3$はco-H写像だが$\alpha_2(3): S^{4p-2}\to S^3$はそうでない。実際$H_1(\alpha_2(3)) = x\alpha_1(2p+1), x\neq 0$が成立する (Toda [32])。

さて、co-H写像$\beta=\alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p)$の懸垂$\Sigma\beta: S^{6p-4}\to S^4$により、$S^4$上の$S^2$-束$\mathbb{C}P^3$の引き戻しを$M_p$とする。従って$M_p$は閉多様体とみなすことができ、次のCW分割を持つ。

$$M_p \simeq S^2\cup_\alpha e^{6p-4}\cup_{\psi(\beta)} e^{6p-2}, \quad \alpha=\eta_2\circ\beta.$$

定理 5.1 ([14, 15]) $\mathrm{cat}(N_p) = \mathrm{cat}(N_p \setminus \{*\}), * \in N_p$ を満たす閉多様体 N_p が $p \geq 5$ に対して存在する。

この発表の直後に、CW 複体の場合の Ganea 予想に対する I の構成した反例を用い、上記と同様な性質を持つ多様体を Lambrecht-Vandembroucq-Stanley が構成している。

定理 *5.1* の略証: M_p は閉多様体であり、$p \geq 5$ のとき Toda によって次が知られている。

$$H_1(\alpha) = \alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p) \neq 0, \quad \Sigma^1(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p)) \neq 0 \quad \text{but}$$
$$\Sigma^2(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p)) \in \pi_{6p-3}(S^5)_{(p)} = 0.$$

従って定理 4.3 より $\mathrm{cat}(S^2 \cup_\alpha e^{6p-4}) = 2$ および $\mathrm{cat}(M_p) = 2$ がわかる。そこで $N_p = M_p$ とおけばよい。 終り.

定理 5.2 ([14]) 閉多様体 M で $\mathrm{cat}(M \times S^n) = \mathrm{cat}(M)$ が $n \geq 2$ で成立するものが存在する。

従って Ganea 予想（問題 2）は閉多様体に対しても成立しない。現在までの所、これが知られている唯一の多様体としての反例である。

定理 *5.2* の略証: まず $M = M_3$ とおく。$p = 3$ のとき Toda によって、次が知られている。

$$H_1(\alpha) = \alpha_1(3)\circ\alpha_2(6) \neq 0, \quad \Sigma^3(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(6)) \neq 0 \quad \text{but}$$
$$\Sigma^4(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(6)) = 0 \quad \text{in} \quad \pi_{17}(S^7)_{(3)} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

定理 4.3 と定理 3.12 より $\mathrm{cat}(M) = 3$ および $\mathrm{cat}(M \times S^n) = \mathrm{cat}(M) = 3$ が $n \geq 2$ に対して成立する。 終り.

注 5.3 M_3 が $\mathrm{cat}(M_3 \times S^2) = \mathrm{cat}(M_3 \cup ((S^2 \cup e^{14}) \times S^2)) = 3$ より、$N = M_3 \times S^2$ も $\mathrm{cat}(N) = \mathrm{cat}(N \setminus \{*\}), * \in N$ を満たす。

注 5.4 高次の *Toda bracket* を用いれば、$p \geq 5$ に対応する多様体で *Ganea* 予想の反例が構成できると考えられる。

6　問題1 (Lie群のL-S猫) (Mimura-Nishimoto-I)

定理 6.1　$G \hookrightarrow E \xrightarrow{p} \Sigma A$を構造群を$G$とする主*fibre*束とする。*cofibre*列 $K_i(G) \xrightarrow{\rho_i} F_{i-1}(G) \hookrightarrow F_i(G)$, *(*$1 \leq i \leq m$*)* と$k$ ($1 \leq k \leq m$) が次を満たせばCat(E) $\leq m+k$となる。

(1) $F_0(G) = \{*\}$, $F_m(G) \simeq G$.

(2) 構造群Gの積の制限$F_i(G) \times F_j(G) \subseteq F_m(G) \times F_m(G) \simeq G \times G \to G$が$F_{i+j}(G)$ ($i \geq k$, $j \geq 0$) に圧縮可能。

(3) 構造写像$\alpha : A \to G$が$F_{k-1}(G)$ ($k \geq m$) に圧縮可能。

実際これを用いると単連結compact Lie群のL-S猫のかなり良いupper boundが得られる。さらに単連結でないLie群を取り扱う為に次の定理を用意した。

定理 6.2　$F \hookrightarrow X \to B$を$G$を構造群とする*fibre*束とする。ただし$B$は$(d-1)$-連結 ($d \geq 1$) で有限次元であるものとする。*cofibre*列$K_i(G) \xrightarrow{\rho_i} F_{i-1}(G) \hookrightarrow F_i(G)$, *(*$1 \leq i \leq m$*)* が次を満たせばCat$(E) \leq m + \frac{\dim B}{d}$となる。

(1) $F_0(G) = \{*\}$, $F_m(G) \simeq G$.

(2) 積の制限$F_i(G) \times F_j(G) \subseteq F_m(G) \times F_m(G) \simeq G \times G \to G$が$F_{i+j}(G)$ ($i \geq k$, $j \geq 0$) に圧縮可能。

(3) 構造群の作用の制限$\psi|_{G^{(d\cdot(i+2)-2)} \times F_j} : G^{(d\cdot(i+2)-2)} \times F_j \to F$が$F_{i+j}$ ($0 \leq i, j \leq i+j \leq m$) に圧縮可能。

定理 *6.1*と定理 *6.2*の略証*:*　どちらも与えられた仮定の下で実際に全空間のcone-decompositionを構成できることが分かる。　終り.

さらに最近のKadzisa [20]の与えた$SU(n)$のきれいなcone-decompositionを用いると次の結果が得られる：

定理 6.3　Cat(PU(n)) $\leq 3(n-1)$ であり、特に$n = p^r$ (pは素数、$r \geq 1$) のときは、cat(PU(n)) $= 3(p^r-1)$が成立する。

これらをまとめると次の表が得られる：

階数	1		2		3		4		$n \geq 5$	
A_n	SU(2)	1	SU(3)	2	SU(4)	3	SU(5)	4	SU(n+1)	n
	PU(2)	3	PU(3)	6	PU(4)	9	PU(5)	12	PU(n+1)	$\leq 3n$
B_n	Spin(3)	1	Spin(5)	3	Spin(7)	5	Spin(9)	?	Spin(2n+1)	?
	SO(3)	3	SO(5)	8	SO(7)	11	SO(9)	20	SO(2n+1)	?
C_n	Sp(1)	1	Sp(2)	3	Sp(3)	5	Sp(4)	?	Sp(n)	?
	PSp(1)	3	PSp(2)	8	PSp(3)	?	PSp(4)	?	PSp(n)	?
D_n					Spin(6)	3	Spin(8)	6	Spin(2n)	?
					SO(6)	9	SO(8)	12	SO(2n)	?
					PO(6)	9	PO(8)	18	PO(2n)	?
例外			G_2	4			F_4	?	E_n	?

文　献

[1] I. Berstein and P. J. Hilton, *Category and generalised Hopf invariants*, Illinois. J. Math. **12** (1968), 421–432.

[2] J. M. Boardman and B. Steer, *On Hopf invariants*, Comment. Math. Helv. **42** (1967), 180–221.

[3] O. Cornea, Strong LS category equals cone-length, Topology **34** (1995), 377–381.

[4] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **33** (1994), 95–111.

[5] O. Cornea, *There is just one rational cone-length*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 835–848.

[6] S. Eilenberg and T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math. **65** (1957), 517-518.

[7] E. Fadell and S. Husseini, *Category weight and Steenrod operations* (Spanish), Bol. Soc. Mat. Mexicana **37** (1992), 151–161.

[8] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42**, (1941), 333–370.

[9] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417–427.

[10] T. Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, Symposium on Algebraic Topology, Lect. Notes in Math. **249**, Springer Verlag, Berlin (1971) 13–22.

[11] K. A. Hardie, *A note on fibraitons and category*, Michigan Math. J. **17**, (1970), 351–352.

[12] K. P. Hess, *A proof of Ganea's Conjecture for Rational Spaces*, Topology **30** (1991), 205–214. (1997). (1998).

[13] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. Lon. Math. Soc., **30** (1998), 623–634.

[14] N. Iwase, *A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category* (Kyushu University preprint series in Math. **1998-13**, Kyushu University Graduate School of Mathematics, 1998), Topology **41** (2002), 695–723.

[15] N. Iwase, *Lusternik-Schnirelmann category of a sphere-bundle over a sphere*, Topology **42** (2003), 701–713.

[16] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, Algebraic Topology, (Arcata CA 1986), Lect. Notes in Math. **1370**, Springer Verlag, Berlin (1989) 193–220. (1996).

[17] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.

[18] I. M. James, *Lusternik-Schnirelmann Category*, "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.

[19] B. Jessup, *Rational L-S category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655-660.

[20] H. Kadzisa, Cone-Decompositions of the Special Unitary Groups, preprint.

[21] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *"Méthodes Topologiques dan les Problémes Variationnels"*, Paris Hermann et Cie, Actualités Scientifiques et Industrielles **188** (1934).

[22] P. Lambrecht, D. Stanley and L. Vandembroucq, *Embedding up to homotopy of two-cones into Euclidean space*, preprint.

[23] S. Oka, *The stable homotopy Groups of Spheres I*, Hiroshima Math. J. **1** (1971), 305–337.

[24] Y. B. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511–2512.

[25] Y. B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55.

[26] W. Singhof, *Minimal coverings of manifolds with balls*, Manuscripta Math. **29** (1979), 385–415.

[27] D. Stanley, *Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length* $n+1$, preprint.

[28] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292, 293–312.

[29] J. Strom, *Essential category weight and phantom maps*, Cohomological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998), 409–415, Progr. Math., 196, Birkhauser, Basel, 2001.

[30] F. Takens, *The Lusternik-Schnirelman categories of a product space*, Compositio Math. **22** (1970), 175–180.

[31] H. Toda, *Non-existence of mappings of S^{31} into S^{16} with Hopf invariant 1*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A **8** (1957), 31–34.

[32] H. Toda, *"Composition methods in Homotopy groups of spheres"*, Princeton Univ. Press, Princeton N.Y., Ann. of math. studies **49** (1962).

[33] L. Vandembroucq, *Adjunction spaces satisfying the Ganea conjecture*, preprint.

[34] K. Varadarajan, *On fibrations and category*, Math. Z. **88** (1965), 267–273.

[35] G. W. Whitehead, *The homology suspension*, In: "Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956", Georges Thone, Liége; 89–95, Masson & Cie, Paris, 1957.

[36] G. W. Whitehead, *"Elements of Homotopy Theory"*, Springer Verlag, Berlin, GTM series **61** (1978).