

離散凸解析の概要

東京大学大学院 数理情報学専攻 室田 一雄 (Kazuo Murota)

Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

「離散凸解析」は、「組合せ構造を兼ね備えた凸関数」あるいは「凸集合と類似した離散構造」を数学的に研究することによって離散最適化の世界に新しい枠組みを与えようとする試みである。M凸関数, L凸関数の概念, 両者の共役関係および離散双対性はその骨格であり, 種々の問題に対してアルゴリズムが開発されている。離散最適化の他にも, オペレーションズ・リサーチ, システム解析, 数理経済学, ゲーム理論などへの応用がある。本稿では, 最適性規準と離散双対性を中心に基本的事実を述べる。

1 凸解析と最適化

非線形計画問題は通常

$$\text{Minimize } f(x) \text{ subject to } x \in D$$

の形に書かれるが, これは, 目的関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を実行可能領域 $D \subseteq \mathbf{R}^n$ の上で最小化する問題である。とくに, D が凸集合, f が凸関数のときは凸計画問題と呼ばれ, 理論的にも実際的にも扱い易い対象である。なお, 関数 f が凸関数であるとは, 任意の x, y , および $0 \leq \lambda \leq 1$ を満たす任意の実数 λ に対して不等式

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad (1)$$

が成り立つことを言う。

凸関数の性質のうち, 最適化の立場から最も基本的なものを挙げるとすれば次の二つであろう。

1. 局所的な最適性条件が大域的最適性を特徴づける。したがって, 降下法に基づく算法によって最適化が達成される。
2. 凸関数と凹関数の間に分離定理や Fenchel 双対定理のような双対性が成り立つ。これから Lagrange 双対理論が導かれ, 双対変数を用いた算法などが構成される。線形計画法における双対性もこの特殊ケースと見なせる。

まず, 上の第1の性質を定理の形で述べておく。

定理 1 凸関数の局所最適値 (極小値) は大域的にも最適 (最小) である。

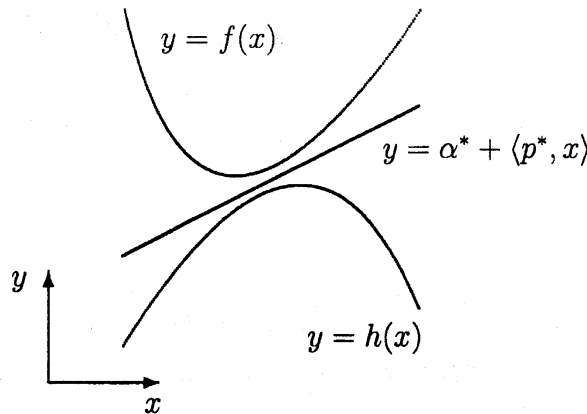


図 1: 凸関数と凹関数の分離定理

双対性について具体的に述べよう. $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を凸関数, $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を凹関数とする. 分離定理は, 図 1 のように, f と h を分離するような 1 次関数の存在を主張する. なお, $\langle p^*, x \rangle = \sum_{i=1}^n p_i^* x_i$ である.

定理 2 (分離定理) f を凸関数, h を凹関数とし, 適当な仮定をおく. $f(x) \geq h(x) (\forall x \in \mathbf{R}^n)$ ならば, ある $\alpha^* \in \mathbf{R}, p^* \in \mathbf{R}^n$ が存在して,

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbf{R}^n).$$

Fenchel 双対定理を述べるには, 共役関数の概念が必要である. 関数 f に対し,

$$f^*(p) = \sup\{\langle p, x \rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \quad (p \in \mathbf{R}^n) \quad (2)$$

で定義される関数 $f^*: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を f の (凸) 共役関数と呼ぶ. f^* は 1 次関数の最大値として定義されているから凸関数である. 写像 $f \mapsto f^*$ は, 理工学・社会科学のあらゆる分野に登場する Legendre 変換に他ならない. 実際, f が滑らかな凸関数で各 p に対して \sup を達成する $x = x(p)$ が存在する場合には, $x = x(p)$ は方程式 $f'(x) = p$ の解として定まり, $f^*(p) = \langle p, x(p) \rangle - f(x(p))$ と表現される. 共役関数の意味は図形的にも理解しやすく, $n = 1$ の場合, $-f^*(p)$ は, $y = f(x)$ の傾き p の接線が y 軸と交わる点の y 座標である (図 2). 同様に, h の (凹) 共役関数 $h^*: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$h^*(p) = \inf\{\langle p, x \rangle - h(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \quad (p \in \mathbf{R}^n) \quad (3)$$

と定義する.

Fenchel 双対定理は次のように述べられる.

定理 3 (Fenchel 双対定理) f を凸関数, h を凹関数とし, 適当な仮定をおくと,

$$\inf\{f(x) - h(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} = \sup\{h^*(p) - f^*(p) \mid p \in \mathbf{R}^n\}.$$

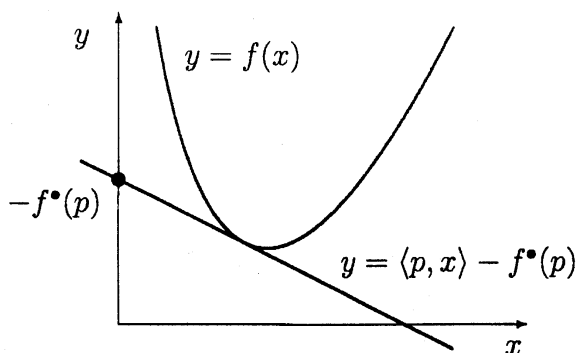


図 2: 共役関数 (Legendre 変換)

分離定理や Fenchel 双対定理の形に表現される双対性が凸計画問題に対する主問題と双対問題の間の双対性を導くことは、その詳細を知らなくとも、想像に難くないであろう。例えば、Fenchel 双対定理において、左辺が主問題、右辺が双対問題に対応する。しかし、凸解析の諸定理が非凸計画問題に対する双対理論の枠組みの基礎にもなっていることは、必ずしも広く認識されていない。例えば、拡張 Lagrange 関数による乗数法などは、摂動方向に凸性をもった摂動関数の中に原問題を埋め込むことによって導かれている。このように、凸解析は非線形計画法全体の基礎を成しているのである。

他方、離散最適化の分野を見てみると、凸解析のような統一的な視点はまだ存在しない。離散最適化と非線形最適化は、本質的に異なる部分も多いことは確かである。しかし、凸解析の離散版 — 上記の議論で \mathbf{R} を \mathbf{Z} で置き換えた理論 — ができれば、離散最適化全体の役に立つに違いない。例えば、離散最適化問題に対しても拡張 Lagrange 関数による双対理論ができることになるので、離散最適化の理論が整理されるだけでなく、離散最適化を連続最適化に埋め込んで解くタイプのアルゴリズムが設計しやすくなるだろう。節を改めて、「離散凸解析」の可能性を探ってみよう。

2 離散分離定理

「離散凸解析」の一つの目標は、整数格子点の上で定義された実数値関数 $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ あるいは整数値関数 $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ に対して、「凸関数」の概念をうまく定義し、通常凸解析における諸定理の離散版を確立することである。

例えば、分離定理の離散版としては、次のような形を考えるのが自然であり、また最適化との関連で有用でもある。離散性の反映として、整数値関数に対しては 1 次関数が整数ベクトルで定義されることを要請していることに注意されたい。

[離散分離定理] $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が「凸関数」、 $h: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が「凹関数」であるとする。

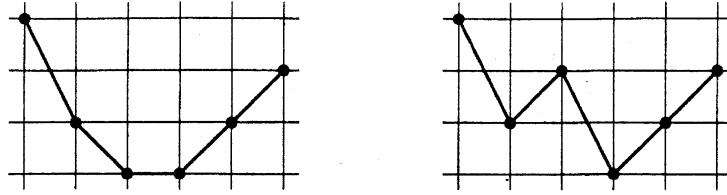


図 3: 凸拡張可能な離散関数 と 凸拡張不可能な離散関数

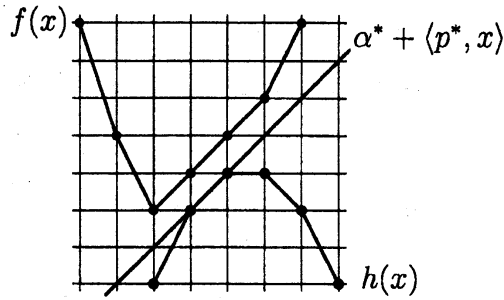


図 4: 離散分離定理

(1) $f(x) \geq h(x) (\forall x \in \mathbf{Z}^n)$ ならば, ある $\alpha^* \in \mathbf{R}, p^* \in \mathbf{R}^n$ が存在して,

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^n)$$

が成り立つ.

(2) f, h が整数値関数のときには, $\alpha^* \in \mathbf{Z}, p^* \in \mathbf{Z}^n$ にとれる.

われわれの目標は, この定理が成り立つような関数のクラスを見出し, それを離散世界の凸関数概念と認識し, さらに, 離散最適化の算法を体系的に構成することである.

極く自然な考えとして, \mathbf{R}^n 上の凸関数に拡張可能な $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を「凸関数」と定義してみよう. 関数 $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が凸関数に拡張可能とは, ある凸関数 $\bar{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が存在して $\bar{f}(x) = f(x) (x \in \mathbf{Z}^n)$ が成り立つことである. 1次元 ($n=1$) の場合には, これは

$$f(x-1) + f(x+1) \geq 2f(x) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}) \quad (4)$$

と同値であり (図 3), この定義の下で離散分離定理が成立する (図 4). しかし, 多次元 ($n \geq 2$) になると, 事情はそう単純でない.

例 1 実数の分離ベクトルが存在しない例を示す. $n=2$ として

$$f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2 - 1|, \quad h(x_1, x_2) = 1 - |x_1 - x_2|$$

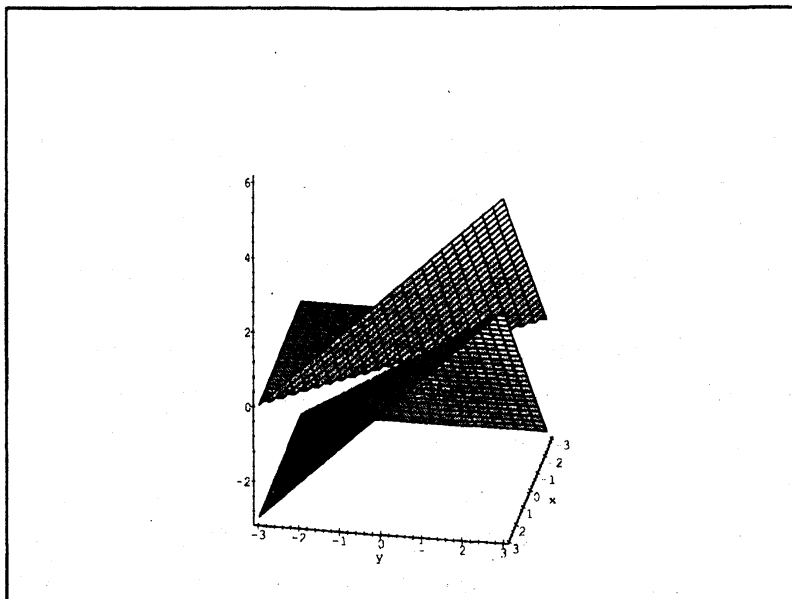


図 5: 離散分離定理の不成立 (例 2)

を考える. $f(x) \geq h(x) (\forall x \in \mathbf{Z}^2)$ であるが, $f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x)$ を満たす $\alpha^* \in \mathbf{R}$, $p^* \in \mathbf{R}^2$ は存在しない. f, h はそれぞれ

$$\bar{f}(x_1, x_2) = |x_1 + x_2 - 1|, \quad \bar{h}(x_1, x_2) = 1 - |x_1 - x_2|$$

で定義される \mathbf{R}^2 上の凸関数 \bar{f} , 凹関数 \bar{h} に拡張できるが, このとき $\bar{f}(1/2, 1/2) < \bar{h}(1/2, 1/2)$ となってしまうことから, 分離関数 $\alpha^* + \langle p^*, x \rangle$ が存在しないことが分かる.

例 2 実数の分離ベクトルが存在するにもかかわらず整数の分離ベクトルは存在しない例を示す. $n = 2$ として,

$$f(x_1, x_2) = \max(0, x_1 + x_2), \quad h(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$$

を考えると, これらは \mathbf{Z}^2 上の整数値関数である. それぞれ, \mathbf{R}^2 上の凸関数 $\bar{f}(x_1, x_2) = \max(0, x_1 + x_2)$, 凹関数 $\bar{h}(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ に拡張でき, さらに, $\bar{f}(x) \geq \bar{h}(x) (\forall x \in \mathbf{R}^2)$ である. 通常分離定理の主張どおり, $p^* = (1/2, 1/2)$ に対して $\bar{f}(x) \geq \langle p^*, x \rangle \geq \bar{h}(x) (\forall x \in \mathbf{R}^2)$ が成立する ($\alpha^* = 0$ である). したがって, 当然, $f(x) \geq \langle p^*, x \rangle \geq h(x) (\forall x \in \mathbf{Z}^2)$ が成立し, この p^* は f と h を分離する. しかし, f と h を分離する整数ベクトルは存在しない (図 5).

上の例の示すように, 凸拡張可能性による離散凸性の定義の下では離散分離定理が成り立たない. より深い組合せ論的な考察が必要である. これは, 離散最適化問題を単に連続問題に埋め込む (緩和する) だけでは済まないという当然の事実に対応している.

3 劣モジュラ性と凸性

組合せ最適化の分野では、ネットワークフロー問題や最小木問題に共通する組合せ構造 (マトロイド的な構造) が良い性質と認知されている。これを手がかりに離散凸性に迫ろう。

有限集合 V の上の集合関数 $\rho: 2^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は、不等式

$$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \quad (X, Y \subseteq V)$$

を満たすとき、劣モジュラ関数と呼ばれる ($\rho(\emptyset) = 0, \rho(V) < +\infty$ を仮定する)。ネットワークフロー問題や最小木問題に共通するマトロイド的構造とは劣モジュラ性に他ならない。

劣モジュラ性と凸性には似ているところがある。事実、既に 60 年代終わりにはその類似性が着目され、80 年代はじめには A. Frank, S. Fujishige, L. Lovász らの研究によってその関係が明らかになった。例えば、一般の集合関数 $\rho: 2^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対して Lovász 拡張 (Choquet 積分) と呼ばれる正斉次な¹関数 $\hat{\rho}: \mathbf{R}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が定義され、「 ρ が劣モジュラ $\iff \hat{\rho}$ が凸」が成り立つ。

劣モジュラ関数に関して、次の形の離散分離定理が成り立つ。なお、 $x \in \mathbf{R}^V, X \subseteq V$ に対して、 $x(X) = \sum_{v \in X} x(v)$ とおく。

定理 4 (Frank) $\rho: 2^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が劣モジュラ、 $\mu: 2^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が優モジュラ²で、 $\rho(X) \geq \mu(X) (\forall X \subseteq V)$ ならば、ある $x^* \in \mathbf{R}^V$ が存在して、

$$\rho(X) \geq x^*(X) \geq \mu(X) \quad (\forall X \subseteq V)$$

が成り立つ。さらに、 ρ と μ が整数値のときには $x^* \in \mathbf{Z}^V$ にとれる。

これらの事実に基づき、現在では、

劣モジュラ関数の双対性 = 凸解析における双対性 + 整数性

という図式が広く受け入れられている。

一方、整数格子点の (非空) 集合 $B \subseteq \mathbf{Z}^V$ は、交換公理

(B-EXC) 任意の $x, y \in B$ と任意の $u \in \text{supp}^+(x - y)$ に対して、ある $v \in \text{supp}^-(x - y)$ が存在して $x - \chi_u + \chi_v \in B$ かつ $y + \chi_u - \chi_v \in B$

を満たすとき、整基集合と呼ばれる³。ここで $\chi_u \in \{0, 1\}^V$ は $u \in V$ の特性ベクトル (単位ベクトル) を表わし、

$$\text{supp}^+(x - y) = \{u \in V \mid x(u) > y(u)\}, \quad \text{supp}^-(x - y) = \{v \in V \mid x(v) < y(v)\}$$

¹ $\hat{\rho}$ が正斉次とは、任意の $\lambda > 0$ と $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\hat{\rho}(\lambda p) = \lambda \hat{\rho}(p)$ が成り立つことを言う。

² $-\mu$ が劣モジュラるとき、 μ は優モジュラであるという。ここで、 $\rho(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0, \rho(V) < +\infty, \mu(V) > -\infty$ は暗黙の仮定である。

³ $B \subseteq \{0, 1\}^V$ のとき、マトロイドの基族に対応する。

である. 条件(B-EXC)の趣旨は, B が2点 x, y を含めば, より近い2点 $x - \chi_u + \chi_v, y + \chi_u - \chi_v$ を含むということであり, 通常の凸集合の条件に似ている.

交換公理と劣モジュラ性は次の意味で同等である.

定理 5 対応 (写像)

$$\begin{aligned} B &\mapsto \rho: \rho(X) = \sup\{x(X) \mid x \in B\} \quad (X \subseteq V), \\ \rho &\mapsto B = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid x(X) \leq \rho(X) \ (\forall X \subset V), x(V) = \rho(V)\} \end{aligned}$$

は, 整基集合 B と整数値劣モジュラ関数 ρ の間の1対1対応を与える.

通常の凸解析では, 集合の凸性と関数の凸性が登場する. 集合 $D \subseteq \mathbf{R}^n$ に対し, 標示関数 $\delta_D: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を $\delta_D(x) = 0 \ (x \in D), = +\infty \ (x \notin D)$ で定義すると, 「 D が凸集合 $\iff \delta_D$ が凸関数」が成り立つ. 標示関数 δ_D の共役関数 δ_D^* は正斉次な凸関数であり, D の支持関数と呼ばれる.

このことを思い出しながら「離散凸解析」の立場から定理5を見直すと, その本質が凸集合とその支持関数の間の共役関係であることに気づく. すなわち, 「整基集合: 整数値劣モジュラ関数の Lovász 拡張 = 凸集合: 支持関数」という対応関係である. この意味で, 従来の劣モジュラ関数理論が対象としていたものは離散世界の凸集合であると言える. これを拡張して「凸関数」の概念を導入しよう.

4 離散世界の凸関数

格子点 $p, q \in \mathbf{Z}^V$ に対して, 成分毎に最大値, 最小値をとって得られる格子点を $p \vee q, p \wedge q$ と表す. すなわち

$$(p \vee q)(v) = \max(p(v), q(v)), \quad (p \wedge q)(v) = \min(p(v), q(v)) \quad (v \in V)$$

である. 関数 $g: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が, 2条件

$$[\text{劣モジュラ性}] \quad g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q) \quad (p, q \in \mathbf{Z}^V),$$

$$[1 \text{ 方向の線形性}] \quad \exists r \in \mathbf{R}, \forall p \in \mathbf{Z}^V: g(p+1) = g(p) + r$$

$$(\text{ただし } 1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{Z}^V)$$

を満たすとき, g をL凸関数と定義する. ここで, $\text{dom } g = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid g(x) < +\infty\}$ (実効定義域)は空でないとする. 劣モジュラ関数の Lovász 拡張を格子点上に制限したものは正斉次なL凸関数であり, この逆も成り立つ.

一方, 関数 $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が, 交換公理

$$(\text{M-EXC}) \quad \text{任意の } x, y \in \text{dom } f \text{ と任意の } u \in \text{supp}^+(x-y) \text{ に対して, ある}$$

$$v \in \text{supp}^-(x-y) \text{ が存在して}$$

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)$$

を満たすとき, f を M 凸関数と定義する ($\text{dom } f \neq \emptyset$ は前提). 条件 (M-EXC) の趣旨は, 2 点 x, y における関数値の和は, より近い 2 点 $x - \chi_u + \chi_v, y + \chi_u - \chi_v$ に移ると減る方向にあるということであり, 通常凸関数の条件に似ている. 次の (i), (ii) が成り立つことから, (M-EXC) は (B-EXC) の定量的拡張と見なすことができる:

- (i) M 凸関数の実効定義域は整基集合,
- (ii) $B \subseteq \mathbf{Z}^V$ が整基集合 $\iff B$ の標示関数 (の \mathbf{Z}^V への制限) が M 凸関数.

離散システムには, M 凸関数や L 凸関数が自然な形で現れる.

例 3 (最小費用流) V を点集合, A を枝集合とする有向グラフ $G = (V, A)$ の上の流れ (整数流) $\varphi: A \rightarrow \mathbf{Z}$ を考える. 枝の容量 $c: A \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ が与えられているとし, 容量制約 ($0 \leq \varphi(a) \leq c(a)$ ($a \in A$)) を満たす流れ φ を実行可能流と呼ぶ. 各点の湧出し量

$$\partial\varphi(v) = \sum\{\varphi(a) \mid a \in \delta^+v\} - \sum\{\varphi(a) \mid a \in \delta^-v\}$$

(δ^+v と δ^-v は, それぞれ, 点 v から出る枝および点 v に入る枝の集合) を成分とするベクトル $\partial\varphi \in \mathbf{Z}^V$ を φ の境界と呼ぶが, 実行可能流の境界の全体 $B = \{\partial\varphi \in \mathbf{Z}^V \mid \varphi \text{ は実行可能流}\}$ は整基集合の公理 (B-EXC) を満たすことが知られている.

最小費用流問題とは, 与えられた境界を実現する流れ φ のうちで, その費用 $\Gamma(\varphi)$ を最小にするものを求める問題である. 費用は, 通常, ある $\gamma: A \rightarrow \mathbf{R}$ によって $\Gamma(\varphi) = \sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a)$ の形に書けると仮定される. このとき,

$$f(x) = \begin{cases} \min\{\Gamma(\varphi) \mid \varphi \text{ は } \partial\varphi = x \text{ を満たす実行可能流}\} & (x \in B) \\ +\infty & (x \in \mathbf{Z}^V \setminus B) \end{cases}$$

で定義される関数 $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は M 凸関数である (min の有限性は前提). さらに, $\Gamma(\varphi)$ が分離的凸関数の場合, すなわち $\Gamma(\varphi) = \sum_{a \in A} f_a(\varphi(a))$ (各 $f_a: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ は式 (4) の意味で凸) の場合にも, f は M 凸関数になる.

例 4 (行列式の次数) 変数 s に関する多項式を要素とするような行列 $A(s)$ を考える. $A(s)$ は階数が m の $m \times n$ 行列であるとし, その列番号の集合を V と表す. 例えば,

$$A(s) = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} s+1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} s \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array},$$

$m = 2, n = 4, V = \{1, 2, 3, 4\}$ である. $A(s)$ の列ベクトルの基底に対応する V の部分集合の族を $\mathcal{B} (\subseteq 2^V)$, \mathcal{B} の元の特異ベクトルの全体を $B (\subseteq \{0, 1\}^V)$ とする. すなわち, $B = \{\chi_J \mid J \in \mathcal{B}\}$ である (χ_J は J の特異ベクトル). B が整基集合の公理 (B-EXC) を満たすことは, よく知られた事実である. 上の例では, $A(s)$ のどの 2 列も $A(s)$ の基底であるから,

$$B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$$

である. $J \in \mathcal{B}$ に対応する $A(s)$ の部分行列 (m 次正方行列) を $A[J]$ と表すとき, その行列式 $\det A[J]$ は s に関する (0 でない) 多項式であり, その次数 $\deg_s \det A[J]$ を考えることができる.

$$f(x) = \begin{cases} -\deg_s \det A[J] & (x = \chi_J, J \in \mathcal{B}) \\ +\infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定義される関数 $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ は M 凸関数である (証明は, Grassmann-Plücker の関係式を利用する). 上の例では, $B_0 = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ として, $f(x) = 0$ ($x \in B_0$), $= -1$ ($x \in B \setminus B_0$), $= +\infty$ ($x \in \mathbf{Z}^V \setminus B$) となる.

L 凸関数も多項式行列から生ずる. $p \in \mathbf{Z}^V$ に対して, s^{p_v} ($v \in V$) を対角要素とする n 次対角行列を $D(p)$ と表し, A と $D(p)$ の行列積の部分行列で J に対応する列からなるものを $(A \cdot D(p))[J]$ と書き表す. 関数 $g: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{Z}$ を

$$g(p) = \max\{\deg_s \det(A \cdot D(p))[J] \mid J \in \mathcal{B}\}$$

と定義すると, これは L 凸関数である. 上の例では,

$$g(p) = \max(p_1 + p_2, p_3 + p_4, p_1 + p_3 + 1, p_1 + p_4 + 1, p_2 + p_3 + 1, p_2 + p_4 + 1)$$

となる.

5 離散凸解析の基本諸定理

M 凸性, L 凸性の概念の重要性は, 以下の諸定理に示されている.

5.1 拡張定理と最適性規準

まず最初の定理は, M 凸関数, L 凸関数が確かに凸関数と呼ぶにふさわしいものであることを示している.

定理 6 (拡張定理) M 凸関数, L 凸関数は凸関数に拡張可能である.

M 凸関数, L 凸関数の最小値は整数格子点上で局所的に特徴づけられる. 式 (5), (6) の左辺が大域最適性, 右辺が局所最適性を表現している.

定理 7 (M 凸関数最小性規準) M 凸関数 f と $x \in \text{dom } f$ に対して,

$$f(x) \leq f(y) \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^V) \iff f(x) \leq f(x - \chi_u + \chi_v) \quad (\forall u, v \in V). \quad (5)$$

定理 8 (L 凸関数最小性規準) L 凸関数 g と $p \in \text{dom } g$ に対して,

$$g(p) \leq g(q) \quad (\forall q \in \mathbf{Z}^V) \iff \begin{cases} g(p) \leq g(p + \chi_X) & (\forall X \subseteq V), \\ g(p) = g(p + 1). \end{cases} \quad (6)$$

5.2 共役性定理

関数 $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対して, 離散世界での共役関数 $f^*: \mathbf{R}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を, 式 (2) に倣って,

$$f^*(p) = \sup\{\langle p, x \rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{Z}^V\} \quad (p \in \mathbf{R}^V) \quad (7)$$

と定義する. 関数 f が整数値の場合 ($f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$) には, $f^*: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ と見なせることに注意されたい.

次の定理は, M 凸関数と L 凸関数の間の共役関係を示しており, 定理 5 (交換公理と劣モジュラ性の同等性) の一般化である. 例 4 の f と g は, この意味の共役関係にある.

定理 9 (共役性定理) 対応 (写像) $f \mapsto g = f^*$, $g \mapsto f = g^*$ は, 整数値 M 凸関数 f と整数値 L 凸関数 g の間の 1 対 1 対応を与える. さらに, $f^{**} = f$, $g^{**} = g$ が成り立つ.

通常の世界では, 凸関数の概念に M とか L とかの区別はなく, 凸関数の共役は再び凸関数である. これに対して, 離散世界では, 2 種類の凸性が区別され, それらが $f \mapsto f^*$ によって移り合うという状況になっていることを上の定理は示している. なお, $h: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して,

$$\text{dom } h = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid h(x) > -\infty\}, \quad h^\circ(p) = \inf\{\langle p, x \rangle - h(x) \mid x \in \mathbf{Z}^V\}$$

と定義する.

5.3 双対定理

最後に双対定理を述べる. h が (M, L) 凹関数とは, $-h$ が (M, L) 凸関数のことである.

定理 10 (M 分離定理) $f: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を M 凸関数, $h: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を M 凹関数とし, $\text{dom } f \cap \text{dom } h \neq \emptyset$ または $\text{dom } f^* \cap \text{dom } h^\circ \neq \emptyset$ が成り立つと仮定する. $f(x) \geq h(x) (\forall x \in \mathbf{Z}^V)$ ならば, ある $\alpha^* \in \mathbf{R}$, $p^* \in \mathbf{R}^V$ が存在して,

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^V)$$

が成り立つ. さらに, f, h が整数値関数のときには, $\alpha^* \in \mathbf{Z}$, $p^* \in \mathbf{Z}^V$ にとれる.

定理 11 (L 分離定理) $g: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を L 凸関数, $k: \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を L 凹関数とし, $\text{dom } g \cap \text{dom } k \neq \emptyset$ または $\text{dom } g^* \cap \text{dom } k^\circ \neq \emptyset$ が成り立つと仮定する. $g(p) \geq k(p) (\forall p \in \mathbf{Z}^V)$ ならば, ある $\beta^* \in \mathbf{R}$, $x^* \in \mathbf{R}^V$ が存在して,

$$g(p) \geq \beta^* + \langle p, x^* \rangle \geq k(p) \quad (\forall p \in \mathbf{Z}^V)$$

が成り立つ. さらに, g, k が整数値関数のときには, $\beta^* \in \mathbf{Z}$, $x^* \in \mathbf{Z}^V$ にとれる.

定理 12 (Fenchel 型双対定理) f を整数値 M 凸関数, h を整数値 M 凹関数とし, $\text{dom } f \cap \text{dom } h \neq \emptyset$ または $\text{dom } f^* \cap \text{dom } h^\circ \neq \emptyset$ が成り立つと仮定すると,

$$\inf\{f(x) - h(x) \mid x \in \mathbf{Z}^V\} = \sup\{h^\circ(p) - f^*(p) \mid p \in \mathbf{Z}^V\}.$$

M 分離定理と L 分離定理は共役関係にあり, Fenchel 型双対定理は自己共役である. また, L 分離定理は劣モジュラ関数に関する離散分離定理の一般化である. これらの離散双対定理は, 見かけは通常の凸解析における双対定理と同じであるが, その本質は組合せ論的に深い内容を含んでいる. 拡張定理 (定理 6) と通常の分離定理 (定理 2) や Fenchel 双対定理 (定理 3) を合わせても上の離散双対定理は導かれぬ (例 2 参照). 事実, 証明は真に組合せ論的であり, 連続世界の双対定理の証明が解析的であるのと全く対照的である.

応用上は次の形の双対定理 (上記の諸定理とほぼ同等) が便利である. これは, 二つの M 凸関数の和の最小化問題に対する最適性規準⁴を与えていることになる. なお, 文献 [4] には, この定理の直接的な証明 (逐次最短路法に基づく) がある.

定理 13 (M 凸交わり定理) $f_1, f_2 : \mathbf{Z}^V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を M 凸関数, $x^* \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$ とする.

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) \leq f_1(x) + f_2(x) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^V) \quad (8)$$

であるためには, ある $p^* \in \mathbf{R}^V$ が存在して

$$f_1[-p^*](x^*) \leq f_1[-p^*](x) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^V), \quad (9)$$

$$f_2[+p^*](x^*) \leq f_2[+p^*](x) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^V) \quad (10)$$

となることが必要十分である. このとき,

$$\text{argmin}(f_1 + f_2) = \text{argmin } f_1[-p^*] \cap \text{argmin } f_2[+p^*] \quad (11)$$

が成り立つ. さらに, f_1, f_2 が整数値関数のときには, $p^* \in \mathbf{Z}^V$ とすることができる.

以上の諸定理を基礎として, 劣勾配や双共役関数などの離散版が定義され, さらに離散最適化に対する Lagrange 双対理論が展開される.

6 おわりに

最後に, M 凸関数, L 凸関数に至る離散凸関数概念の歴史を簡単に述べる. マトロイドの概念は H. Whitney によって 1935 年に導入された. 1960 年代の終わりに J. Edmonds によってポリマトロイド交わり定理が発見されたのを契機として劣モジュラ集合関数の研究が盛んになり, 劣モジュラ関数と凸関数との類似性が漠然とした形で議論された. 1980 年

⁴一般に M 凸関数の和は M 凸関数ではないので, $f_1 + f_2$ に定理 7 を適用することはできない.

代はじめ, 藤重悟, A. Frank, L. Lovászらの研究により, 劣モジュラ集合関数のもつ凸性と離散性が明確になった. 1990年代にはいって, A. DressとW. Wenzelにより, 付値マトロイドの概念が導入された. 数年後, 筆者によりその双対定理が示され, 離散凸性との関連が認識された. これらとは独立に, P. FavatiとF. Tardellaにより, 整凸関数の概念が考察された. 「離散凸解析」の枠組みは, 1980年代の議論を背景としながら, 1996年頃に認識された.

参考文献

- [1] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [2] 室田一雄: 離散凸解析, 共立出版, 2001.
- [3] K. Murota: *Discrete Convex Analysis*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Vol. 10, SIAM, Philadelphia, 2003.
- [4] K. Murota: A proof of the M-convex intersection theorem, 数理解析研究所講究録(本号), 2004.