数理解析研究所講究録 1371 巻 2004 年 134-139

整凸集合上の離散不動点定理について

東京都立短期大学 経営情報学科　　飯村　卓也 (Takuya Iimura)
Department of Management, Tokyo Metropolitan College

東京大学大学院 数理情報学専攻　　室田　一雄 (Kazuo Murota)
Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

京都大学 数理解析研究所　　田村　明久 (Akihisa Tamura)
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

概要

本稿は [2] [*J. Mathematical Economics* 39 (2003) 725–743] において主張された離散不動点定理に対する反例を与えるとともに, 集合値写像の定義域を整凸集合に制限することで得られる離散不動点定理を与える.

1　はじめに

本稿では [2] において主張された離散不動点定理に対する反例を与え, あわせて対応 (= 集合値写像, 以下同じ) の定義域を整凸集合 ([3, 1]) に制限することで得られる離散不動点定理を与える.

本稿を通じて $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を, $\mathbf{Z}$ は整数全体の集合を表わす. 正整数 n に対して $\mathbf{Z}^n$ は整数ベクトル $z = (z_i \in \mathbf{Z} \colon i = 1, \ldots, n)$ の全体を表わす. 記号 $||\cdot||_\infty$ は $||y||_\infty = \max\{|y_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$, すなわち ($y$ の) 最大値ノルムを, $||\cdot||_2$ は $||y||_2 = (\sum_{i=1}^n y_i{}^2)^{1/2}$, すなわち ($y$ の) ユークリッドノルムを表わす.

2　反例

有限集合 $X \subset \mathbf{Z}^n$ が**離散凸** (discretely convex) であるとは, $\overline{X}$ を $\mathbf{R}^n$ における X の凸包として

$$X = \overline{X} \cap \mathbf{Z}^n \tag{1}$$

の成り立つことをいう. 離散凸集合 X はその凸包 $\overline{X}$ 内の整数点をすべて含み, その意味で “穴がない” (hole free [3]). 有限集合 $X \subset \mathbf{Z}^n$ が**連接凸** (contiguously convex [2]) であるとは,

$$\forall y \in \overline{X},\ \exists x \in X : ||x - y||_\infty < 1 \tag{2}$$

の成り立つこととする. 定義より連接凸集合は離散凸集合である.

$X \subset \mathbf{Z}^n$ を非空で有限な集合とし, $\Gamma\colon X \to\to X$ を非空値の対応とする. $x \in \Gamma(x)$ を満たす点 $x \in X$ は対応 Γ の**不動点**と呼ばれる. 各 $x \in X$ に対して $\pi_\Gamma(x)$ を x の $\overline{\Gamma(x)}$ への射影, すなわちユークリッドノルムで

$$||\pi_\Gamma(x) - x||_2 = \min_{y \in \overline{\Gamma(x)}} ||y - x||_2 \tag{3}$$

を満たす $\overline{\Gamma(x)}$ の点としよう. $\tau(x) = \pi_\Gamma(x) - x$ とおいて

$$\sigma(x) = (\mathrm{sign}(\tau_i(x)) \in \{+1, 0, -1\} : i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

と定義する ($\tau_i(x)$ は $\tau(x)$ の i 番目の要素). $\sigma(x)$ は x から見た $\Gamma(x)$ の方向と解釈される.

さて, 任意の整数格子点 z と z' に対して $\mathbf{Z}^n$ の上の二項関係 $\simeq$ を

$$z \simeq z' \Leftrightarrow ||z - z'||_\infty \leq 1 \tag{5}$$

で定義しよう. 対応 $\Gamma\colon X \to\to X$ が**方向保存** (direction preserving [2])[1] であるとは, $x \simeq x'$ なる任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\sigma_i(x) > 0 \Longrightarrow \sigma_i(x') \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

が成り立つことであるとする ($\sigma_i(x)$ は $\sigma(x)$ の i 番目の要素). 定義の条件は

$$\sigma_i(x) < 0 \Longrightarrow \sigma_i(x') \leq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

に同値であり, 方向保存性はこの形の不等式条件も成り立つことを要求している.

次の言明は [2] で主張された.

言明: $X \subset \mathbf{Z}^n$ を非空かつ有限な連接凸集合とせよ. $\Gamma\colon X \to\to X$ が非空値かつ離散凸値の方向保存対応のとき, Γ は不動点をもつ.

以下にこの言明に対する反例を与える. 有限集合 $X \subset \mathbf{Z}^3$ として

$$X = \{a = (0,1,0), b = (1,0,0), c = (2,0,0), d = (3,0,0), e = (4,0,1)\} \tag{8}$$

をとり, 対応 $\Gamma\colon X \to\to X$ を

$$\Gamma(a) = \Gamma(b) = \{e\},\ \Gamma(c) = \{a, e\},\ \Gamma(d) = \Gamma(e) = \{a\} \tag{9}$$

とせよ. X は連接凸であり Γ は非空値の離散凸値対応である (図 1). さらに Γ は方向保存であることが, 次の τ と σ の値の表より確認できる. なおここで

$$a \simeq b,\ b \simeq c,\ c \simeq d,\ d \simeq e \tag{10}$$

[1] 方向保存性はまた τ を用いて $\tau_i(x) > 0 \Longrightarrow \tau_i(x') \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$ とも定義できる.

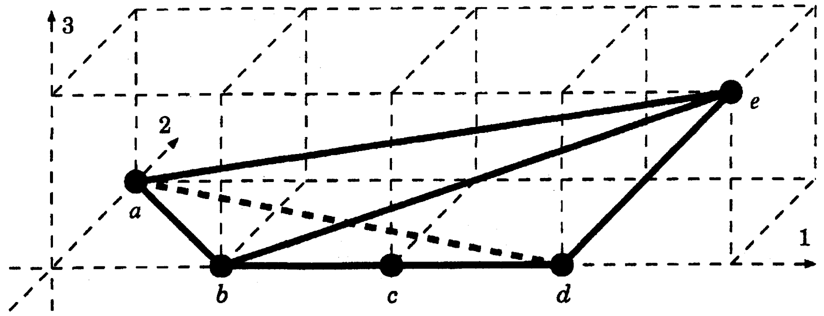

図 1: 反例. 連接凸集合 $X = \{a = (0,1,0), b = (1,0,0), c = (2,0,0), d = (3,0,0), e = (4,0,1)\}$ と離散凸値な方向保存対応 $\Gamma(a) = \Gamma(b) = \{e\}$, $\Gamma(c) = \{a, e\}$, $\Gamma(d) = \Gamma(e) = \{a\}$.

であり, 他の元の対には $\simeq$ の関係がないことに注意する.

$$\left.\begin{array}{rcr} \tau(a) &=& (\ 4,\ -1,\ 1) \\ \tau(b) &=& (\ 3,\ 0,\ 1) \\ \tau(c) &=& (\ 0,\ 1/2,\ 1/2) \\ \tau(d) &=& (-3,\ 1,\ 0) \\ \tau(e) &=& (-4,\ 1,\ -1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \sigma(a) &=& (+1,\ -1,\ +1) \\ \sigma(b) &=& (+1,\ 0,\ +1) \\ \sigma(c) &=& (\ 0,\ +1,\ +1) \\ \sigma(d) &=& (-1,\ +1,\ 0) \\ \sigma(e) &=& (-1,\ +1,\ -1). \end{array}\right. \tag{11}$$

明らかに, Γ の不動点は存在しない.

3 整凸集合上の離散不動点定理

本節では対応 Γ の定義域を整凸集合に制限した場合に成り立つ離散不動点定理を与える. まず $y \in \mathbf{R}^n$ に対して整数格子点からなる近傍 $N(y)$ を

$$N(y) = \{z \in \mathbf{Z}^n \mid \|z - y\|_\infty < 1\} \tag{12}$$

で定義する. 有限集合 $X \subset \mathbf{Z}^n$ が**整凸** (integrally convex [3])[2] であるとは, X が

$$y \in \overline{X} \Longrightarrow y \in \overline{X \cap N(y)} \qquad (\forall y \in \mathbf{R}^n) \tag{13}$$

を満たすことである. 整凸集合 X は, その凸包 $\overline{X}$ 内の各点 y を, X の元で近傍 $N(y)$ にある整数点の凸結合で表わせるという特徴をもつ. 定義より整凸集合は連接凸集合である. (整凸集合 $\Longrightarrow$ 連接凸集合 $\Longrightarrow$ 離散凸集合の関係がある.)

有限な整凸集合はその凸包に対して次の補題に示されるような都合のよい単体分割をもつ. 本節の離散不動点定理の証明においてこれが鍵となることを指摘しておこう.

[2] 整凸集合はまた "整凸関数" (integrally convex function [1]) の概念からも得られる. これについては [3], Section 3.4 を参照.

補題 1. $X \subset \mathbf{Z}^n$ を有限な整凸集合とせよ．X の凸包 $\overline{X}$ には単体分割[3] $\mathcal{S}$ が存在して，各 $y \in \overline{X}$ について y を含む最小の単体 $S(y) \in \mathcal{S}$ の全頂点が $N(y)$ に含まれるようにできる．すなわち

$$y \in \overline{X} \Longrightarrow y \in \overline{S(y) \cap N(y)} \qquad (\forall y \in \mathbf{R}^n) \tag{14}$$

が成り立ち，すべての $x \in X$ について $\{x\} \in \mathcal{S}$ となる．

補題の証明は本節の最後で与えることにして，さっそく定理とその証明に入ろう．

定理 2. $X \subset \mathbf{Z}^n$ を非空かつ有限な整凸集合とせよ．$\Gamma\colon X \to\to X$ が非空値かつ離散凸値の方向保存対応のとき，Γ は不動点をもつ．

証明. Brouwer の不動点定理（"$\mathbf{R}^n$ のコンパクト凸集合からそれ自身への連続写像は不動点をもつ"）を用いることにする．そのために，$\overline{X}$ から $\overline{X}$ への連続写像 γ を定義する．y を $\overline{X}$ の任意の点とせよ．X は有限な整凸集合なので $\overline{X}$ には補題 1 の条件を満たす単体分割 $\mathcal{S}$ が存在して $y \in \overline{S(y) \cap N(y)}$ とできる．すなわち，y は一意的に凸結合

$$y = \sum_{x \in S(y) \cap N(y)} \lambda_x x, \quad \sum \lambda_x = 1, \quad \lambda_x \geq 0, \tag{15}$$

の形で表わせる（$(\lambda_x\colon x \in S(y) \cap N(y))$ は y の $\overline{S(y) \cap N(y)}$ における重心座標である）．各 $y \in \overline{X}$ に対して $\gamma(y)$ を

$$\gamma(y) = \sum_{x \in S(y) \cap N(y)} \lambda_x \pi_\Gamma(x) \tag{16}$$

と定義せよ．すると，すべての $x \in X$ に対して $\gamma(x) = \pi_\Gamma(x) \in \overline{X}$ なのですべての $y \in \overline{X}$ に対して $\gamma(y) \in \overline{X}$ である．さらに，$\mathcal{S}$ は補題 1 の条件を満たす単体分割であることから γ は連続といえる．Brouwer の不動点定理により γ は不動点 $y \in \overline{X}$ をもつ．

次に Γ が不動点をもつことを示す．y を γ の不動点とせよ．すると

$$\sum_{x \in S(y) \cap N(y)} \lambda_x x = y = \gamma(y) = \sum_{x \in S(y) \cap N(y)} \lambda_x \pi_\Gamma(x), \tag{17}$$

すなわち

$$\sum_{x \in S(y) \cap N(y)} \lambda_x (\pi_\Gamma(x) - x) = \sum_{x \in S(y) \cap N(y)} \lambda_x \tau(x) = \mathbf{0} \tag{18}$$

である（$\mathbf{0}$ はすべての要素がゼロの $\mathbf{R}^n$ の点）．Γ は方向保存なので $\lambda_x > 0$ は $\tau(x) = \mathbf{0}$ を含意し，τ の定義よりそのような $x \in X$ は $x \in \overline{\Gamma(x)} \cap \mathbf{Z}^n$ を満たす．$\Gamma(x)$ は離散凸なので $\overline{\Gamma(x)} \cap \mathbf{Z}^n = \Gamma(x)$，したがって $x \in \Gamma(x)$ となり x は Γ の不動点である．□

実際，$S(y)$ の最小性から各 $y \in \overline{X}$ は $S(y) \cap N(y)$ の元の正の凸結合で一意的に表わせる．したがって，γ の不動点 $y \in \overline{X}$ に対して $S(y) \cap N(y)$ の元 $x \in X$ はみな Γ の不動点である．

[3] $\overline{X}$ の単体分割 $\mathcal{S}$ とは，(a) $\overline{X} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$，(b) $S \in \mathcal{S}$，S' は S の面 $\Longrightarrow S' \in \mathcal{S}$，(c) $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ で $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Longrightarrow S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$，を満たす単体の集まりである．なお，いわゆる局所有限の条件はここでは自動的に満たされている．

最後に補題 1 を示す. 整数点上で定義された関数 $f\colon \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ の凸閉包 (convex closure) とは, 区分的に線形な関数 $\overline{f}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ で, そのエピグラフが集合 $\{(z,\alpha) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R} \mid \alpha \geq f(z)\}$ の凸包に一致するようなものをいう. $p \in \mathbf{R}^n$ と y との内積を $\langle p,y\rangle$ と書き, 関数 $\overline{f}[-p]$ を

$$\overline{f}[-p](y) = \overline{f}(y) - \langle p,y\rangle \quad (\forall y \in \mathbf{R}^n) \tag{19}$$

と定義する. $\overline{f}[-p]$ の最小化元の集合を $\arg\min \overline{f}[-p]$ と書く. すなわち

$$\arg\min \overline{f}[-p] = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \overline{f}[-p](y) \leq \overline{f}[-p](y'), \forall y' \in \mathbf{R}^n\}. \tag{20}$$

X の標示関数 (indicator function) $\delta_X\colon \mathbf{Z}^n \to \{0,+\infty\}$ とは, $x \in X$ ならば $\delta_X(x) = 0$, さもなくば $\delta_X(x) = +\infty$ で定義されるものである.

補題 1 の証明. $\overline{X}$ の所望の単体分割を, ある区分的に線形な関数の面の射影によって構成してみせることにする.

X の標示関数を δ_X として, まず関数 $g\colon \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$g(x) = \delta_X(x) + \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^n) \tag{21}$$

と定義してみる. この凸閉包 $\overline{g}$ は区分的に線形な関数であり, 線形部分は $\overline{X}$ と交わる単位超立方体上, しかも g の第 2 項の性質 (変数分離の二次であること) からそこに限る. よってある $p \in \mathbf{R}^n$ の $\arg\min \overline{g}[-p]$ で表わされる $\overline{g}$ の面の射影は, $\overline{X}$ とある $z \in \mathbf{Z}^n$ の定める超立方体 $\{y \in \mathbf{R}^n \mid z \leq y \leq z + \mathbf{1}\}$ との交わりに含まれる ($\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 のベクトル). ここで $p \in \mathbf{R}^n$ が生成する $\arg\min \overline{g}[-p]$ は必ずしも単体とは限らないことに注意せよ. そこで次のように g に摂動を加えて単体分割を構成することにする.

d を $x \neq x'$ なるすべての $x, x' \in X$ に対して $\langle d,x\rangle \neq \langle d,x'\rangle$ とするような整数ベクトルとせよ. X は有限なのでそのような d はいつでもとれる: 例えば十分大きな正の整数 L をとって $d = (1, L, L^2, \ldots, L^{n-1})$ とすればよい (これは $\langle d,x\rangle$ の値によってすべての $x \in X$ に一種の辞書式順序を与えることに等しい). $\varepsilon > 0$ とし, 関数 $h_\varepsilon\colon \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$h_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon \exp\langle d,x\rangle \qquad (\forall x \in \mathbf{Z}^n) \tag{22}$$

と定義する. この凸閉包 $\overline{h_\varepsilon}$ もまた区分的に線形な関数である. X の有限性と, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ において $\arg\min \overline{g}[-p]$ はある超立方体のなかに含まれることとから, 十分小さな $\varepsilon > 0$ があって, すべての $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\arg\min \overline{h_\varepsilon}[-p]$ もまた, それら超立方体にそれぞれ含まれるようにすることができる. このとき $\arg\min \overline{h_\varepsilon}[-p]$ の頂点はみな X に含まれる. さらにまた, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $S = \arg\min \overline{h_\varepsilon}[-p]$ は単体である: 仮に S が単体ではなかったとしてみよ. すると S の頂点はアフィン従属ということなので, 整数ベクトルの互いに素な二つの族 $\{x^i \in S \cap \mathbf{Z}^n \mid i \in I\}$ と $\{x^j \in S \cap \mathbf{Z}^n \mid j \in J\}$, そして正の有理数の二つの族

$\{\lambda_i \mid i \in I\}$ と $\{\lambda_j \mid j \in J\}$ があって，ある有理点 $y \in S$ を二つの異なった凸結合で

$$\sum_{i\in I}\lambda_i \quad = \quad 1 \quad = \quad \sum_{j\in J}\lambda_j, \tag{23}$$

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x^i \quad = \quad y \quad = \quad \sum_{j\in J}\lambda_j x^j, \tag{24}$$

$$\sum_{i\in I}\lambda_i h_\varepsilon(x^i) \quad = \quad \overline{h_\varepsilon}(y) \quad = \quad \sum_{j\in J}\lambda_j h_\varepsilon(x^j) \tag{25}$$

と表わせることになる．$\overline{g}$ は S の上で線形なので $\sum_{i\in I}\lambda_i g(x^i) = \sum_{j\in J}\lambda_j g(x^j)$，したがって

$$\sum_{i\in I}\lambda_i \exp\langle d, x^i\rangle = \sum_{j\in J}\lambda_j \exp\langle d, x^j\rangle \tag{26}$$

となるが，最後の式は自然対数の底 e が，有理数体上の非零多項式

$$F(t) = \sum_{i\in I}\lambda_i t^{\langle d,x^i\rangle} - \sum_{j\in J}\lambda_j t^{\langle d,x^j\rangle} \tag{27}$$

の零点 ($F(e) = 0$ を満たす) ということを意味し，e の超越性に矛盾する．よって S は単体でなければならない．

所望の単体分割は

$$\mathcal{S} = \{\arg\min \overline{h_\varepsilon}[-p] \mid p \in \mathbf{R}^n\} \tag{28}$$

とおいて得られる．(a) $\overline{X} = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$; (b) $S \in \mathcal{S}$ かつ S' は S の面ならば $S' \in \mathcal{S}$; そして (c) $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ で $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ならば $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$，の三つは容易に示せる．したがってあとは，各 $y \in \overline{X}$ に対して y を含む最小の単体 $S(y) \in \mathcal{S}$ (その存在は (c) によって保証される) のすべての頂点が $N(y)$ に含まれることをいえばよい．仮にそうでないとしてみよ．すると $S(y)$ のある頂点 x があって $x \notin N(y)$ となる．$S(y)$ はある超立方体に含まれており，x は整数ベクトルだから，$S(y) \cap \overline{N(y)}$ は $S(y)$ の，y を含む真の面 (厳密に小さな面)，ということになる．これは $S(y)$ の最小性に反する．よって $S(y)$ の頂点はすべて $N(y)$ に属していなければならない．このことと $N(y)$ の定義とからすべての $y \in \overline{X}$ について $y \in \overline{S(y) \cap N(y)}$，そしてすべての $x \in X$ について $\{x\} \in \mathcal{S}$ がいえる． □

参考文献

[1] Favati, P. and Tardella, F., 1990, Convexity in nonlinear integer programming, Ricerca Operativa 53, 3–44.

[2] Iimura, T., 2003, A discrete fixed point theorem and its applications, Journal of Mathematical Economics 39, 725–742.

[3] Murota, K., 2003, Discrete Convex Analysis (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia).