数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 110-116

複数の遅れを持つ非線形差分方程式の大域的安定性

早稲田大学理工学部　室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)
Department of Mathematical Sciences, Waseda University
東京理科大学理学部　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science

1 はじめに

変数遅れを持つ非線形差分方程式

$$\begin{cases} x(n+1)=x(n)-\sum_{j=0}^{m}a_{j}(n)f(x(n-j)), & n=0,1,2,\cdots, \\ x(j)=x_{j}\geq 0, \quad -m\leq j\leq 0, & \text{かつ} \quad x(0)=x_{0}>0 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．ここで，$f(x)$ は $(-\infty,+\infty)$ での狭義単調増加関数で

$$f(0)=0 \quad \text{かつ} \quad f(x)\neq x \quad \text{ならば,} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x) \quad \text{は有限である.} \tag{1.2}$$

また，$\{a_{j}(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $0\leq j\leq m$ は次の条件を満たすとする．

$$a_{j}(n)\geq 0, \quad \sum_{j=0}^{m}a_{j}(n)>0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}a_{j}(n)=+\infty. \tag{1.3}$$

定義 1.1 (1.1) の零解が**一様安定**とは，任意の $\varepsilon>0$ と非負の整数 n_{0} に対して，(1.1) の解 $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ が $|x(n)|<\varepsilon$, $n=n_{0},n_{0}+1,\cdots$ を満たす

$$\max\{|x(n_{0}-j)| \mid j=-k,-k+1,\cdots,0\}<\delta$$

となる $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在することである．

定義 1.2 (1.1) の零解が**大域的吸引性**を持つとは，(1.1) のすべての解が $n\to\infty$ に対し，0 に収束することである．

定義 1.3 (1.1) の零解が**大域的漸近安定**であるとは，一様安定であり，かつ大域的吸引性を持つことである．

$f(x)=e^{x}-1$ かつ $a_{j}(n)=ra_{j}/(\sum_{j=0}^{n}a_{j})$, $0\leq j\leq m$ の場合，Gopalsamy *et al.*[1] により，$r\leq\log 2/(m+1)$ が (1.1) の零解の大域的漸近安定性の十分条件であることが示されている．この条件は So and Yu [3] によって，次のように改良されている．

定理 A (So and Yu [3]). (1.3) を満たす (1.1) に対し，$f(x)=e^{x}-1$ と $a_{j}(n)=r(n)a_{j}/(\sum_{j=0}^{n}a_{j})$ (a_{j}, $0\leq j\leq m$ は定数) と

$$\sum_{k=n-m}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{j}(k)=\sum_{k=n-m}^{n}r(k)\leq\frac{3}{2}, \qquad n\geq m \tag{1.4}$$

を仮定する．このとき，(1.1) の零解は大域的漸近安定である．

本報告では，(1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の零解に対し，"3/2 条件"とは違った大域的漸近安定性の条件を示す．これは $f(x)=x$ の場合の Györi and Pituk [2] の結果を拡張している (定理 1.1 参照)．

$$r_1=\limsup_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{m}a_j(n),\qquad r_2=\limsup_{n\geq m}\sum_{k=n-m}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}a_j(k),\qquad \varphi(x)=x-r_1f(x) \tag{1.5}$$

とおくとき，次の主定理を得る．

定理 1.1

$$\varphi(x)<0,\qquad x<0 \tag{1.6}$$

かつ

$$\begin{cases}\varphi(-r_2f(L))-r_2f(-r_2f(L))>L, & L<\hat{L},\\ -r_2f(-r_2f(L))>L, & \hat{L}\leq L<0\end{cases} \tag{1.7}$$

を仮定する．ただし，$\varphi(x)<0$, $x>0$ ならば，$\hat{L}=0$ とし，そうでなければ，$\hat{L}<0$ は $\varphi(-r_2f(\hat{L}))=0$ により，唯一つ決まるとする．このとき，(1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の零解は大域的漸近安定性を持つ．特に，$f(x)=e^x-1$ に対して，(1.7) は

$$r_1\leq r_2\leq 1,\qquad かつ\qquad r_2<\hat{R}(r_1)+\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \tag{1.8}$$

により満たされる．ここで，$\hat{R}(1)=0$ かつ，$r_1<1$ に対して，$\hat{R}(r_1)=-r_2f(\hat{L})>0$ は $\varphi(\hat{R}(r_1))=0$ により定義される．

条件 (1.8) は (1.4) とは違い，$r_1\leq r_2\leq 1$ であるが $r_1+r_2>\frac{3}{2}$ となる場合を含んでいる (図 1 参照)．それゆえに，定理 1.1 は So and Yu [3] の結果の拡張になっている．

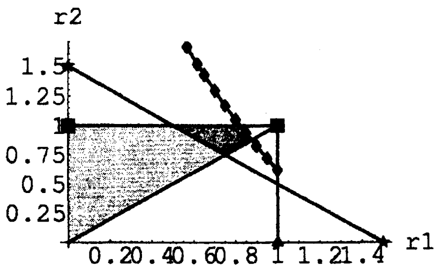

図 1: 条件 (1.8)

2 非線形差分方程式の大域的安定性

ここで，非線形差分方程式 (1.1) の解の大域的安定性の条件を考える．

So and Yu [3] の方法を使って，次の幾つかの補題を得る ([3] の補題 2.1, 2.2 や定理 3.1 を参照)．

補題 2.1 $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.2) の条件の下で (1.1) の解とする．$x(n)$ がある時刻よりずっと 0 より大きい (小さい) ならば，$x(n)$ はある時刻よりずっと減少 (増加) し，かつ $\lim_{n\to\infty} x(n)$ が存在し，$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ となる．

(証明) $x(n)$ がある時刻よりずっと 0 より大きいとする．(1.1) により，

$$x(n+1) - x(n) = -\sum_{j=0}^{m} a_j(n) f(x(n-j)) \leq -\sum_{j=0}^{m} a_j(n) f(0) = 0$$

は $x(n)$ がずっと減少することを示すので，$\lim_{n\to\infty} x(n)$ が存在する．$\alpha = \lim_{n\to\infty} x(n)$ とおき，$\alpha > 0$ を仮定すると，$x(n)$ は α にむかってずっと減少するので，$x(n-j) \geq \alpha$, $\leq j \leq m$, $n \geq \bar{n}_1$ となる $\bar{n}_1 \geq 0$ が存在する．

これと (1.1) より，

$$x(n+1) - x(n) \leq -\sum_{j=0}^{m} a_j(n) f(\alpha), \qquad n \geq \bar{n}_1.$$

$\bar{n}_1$ から $n-1$ までの和をとれば，$x(n) \leq x(\bar{n}_1) - (\sum_{k=\bar{n}_1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_j(k)) f(\alpha)$ となり，$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j(n) = +\infty$ より，$\lim_{n\to\infty} x(n) = -\infty$ が示される．これは $\alpha > 0$ に矛盾する．よって，$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ が示される．$x(n)$ がずっと 0 より小さい場合も同様である．□

補題 2.2 $f(x) \neq x$ かつ $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の解とする．$x(n)$ が 0 の周りで振動し，$\sup_{n\geq m} \sum_{k=n-m}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j(k) < +\infty$ となるならば，$x(n)$ は上にも下にも有界である．

(証明) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\beta > -\infty$ の場合を考える．(1.1)-(1.2) により，

$$x(n+1) - x(n) \leq \beta \sum_{j=0}^{m} a_j(n), \qquad n \geq 0. \tag{2.1}$$

まず，$x(n)$ は上に有界であることを示そう．$\limsup_{n\to\infty} x(n) = +\infty$ を仮定すると，補題 2.1 より，$x(n)$ は有界でなく振動する．よって，

$$x(\bar{n}_k) = \max_{0\leq n\leq \bar{n}_k} x(n) > 0, \quad x(\bar{n}_k) \geq x(\bar{n}_k - 1) \quad \text{かつ} \quad \lim_{k\to\infty} x(\bar{n}_k) = +\infty$$

を満たし，$\bar{n}_k \geq 0$ となる狭義単調増加整数列 $\{\bar{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．このとき，

$$0 \leq x(\bar{n}_k) - x(\bar{n}_k - 1) = -\sum_{j=0}^{m} a_j(\bar{n}_k - 1) f(x(\bar{n}_k - 1 - j)))$$

であり，$\sum_{j=0}^{m} a_j(\bar{n}_k-1)f(x((\bar{n}_k-1-j))) \leq 0$ となる．これより，$x(\xi_k) \leq 0$ となる整数 $\xi_k \in [\bar{n}_k-1-m, \bar{n}_k-1]$ が存在する．(2.1) を ξ_k から $\bar{n}_k-1$ まで加えて，次式を得る．

$$x(\bar{n}_k) \leq x(\xi_k) + \beta \sum_{i=\xi_k}^{\bar{n}_k-1} \sum_{j=0}^{m} a_j(i) \leq \beta\lambda.$$

したがって，$\limsup_{k\to\infty} x(\bar{n}_k) \leq \beta\lambda$ となる．これは $x(n)$ が上に有界であることに矛盾する．同様な議論で，$x(n) \leq \beta\lambda,\ n \geq 0$ となることも示される．

このように (1.1)-(1.3) より，

$$x(n+1)-x(n) \geq -\sum_{j=0}^{m} a_j(n)f(\beta\lambda), \qquad n \geq 0. \tag{2.2}$$

次に，$x(n)$ が下に有界であることを示そう．$\liminf_{n\to\infty} x(n) = -\infty$ を仮定する．$x(n)$ が 0 の周りで振動するので，$\underline{n}_k \geq 0$ で

$$x(\underline{n}_k) = \min_{0\leq n\leq \underline{n}_k} x(n) < 0, \quad x(\underline{n}_k) - x(\underline{n}_k-1) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{k\to\infty} x(\underline{n}_k) = -\infty$$

となる狭義単調増加整数列 $\{\underline{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．

$$0 \geq x(\underline{n}_k) - x(\underline{n}_k-1) = -\sum_{j=0}^{m} a_j(\underline{n}_k-1)f(x(\underline{n}_k-1-j))$$

は $x(\eta_k) \geq 0$ となる $\eta_k \in [\underline{n}_k-1-m, \underline{n}_k-1]$ が存在することを示す．(2.2) を η_k から $\underline{n}_k-1$ まで加えることで，次式を得る．

$$x(\underline{n}_k) \geq x(\eta_k) - \sum_{i=\eta_k}^{\underline{n}_k-1} \sum_{j=0}^{m} a_j(i)f(\beta\lambda) \geq -\lambda f(\beta\lambda).$$

したがって，$\liminf_{n\to\infty} x(n) \geq -\lambda f(\beta\lambda)$ となり，矛盾する．これより，$x(n)$ は下に有界であり，結論を得る． □

注意 2.1 $f(x) \neq x$ ならば，補題 2.2 により，(1.1) の任意の解 $x(n)$ は 0 のまわりで振動し，上にも下にも有界である．

補題 2.3 (1.2) と (1.3) の条件の下で $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする．$|x(n+1)| > |x(n)|$ ならば，

$$\begin{cases} x(n+1) > 0 \ \text{のとき，} x(g(n)) = \min_{0\leq j\leq m} x(n-j) < 0, \\ x(n+1) < 0 \ \text{のとき，} x(g(n)) = \max_{0\leq j\leq m} x(n-j) > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

となる整数 $g(n) \in [n-m, n]$ が存在する．

(証明) $x(n+1),\ x(n-j) \geq 0,\ 0 \leq j \leq m$ ならば，(1.1) により，$0 \leq x(n+1) \leq x(n)$ となる．また，$x(n+1),\ x(n-j) \leq 0,\ 0 \leq j \leq m$ ならば，(1.1) により，$0 \geq x(n+1) \geq x(n)$ となる．したがって，$|x(n+1)| > |x(n)|$ より (2.3) が成り立つ． □

g の性質より，$n \geq m$ に対して $g(n) \geq 0$ となる．

補題 2.4 (1.6) を仮定し，(1.2) と (1.3) の条件の下で (1.1) の解 $x(n)$ が 0 の周りで振動するとする．ある実数 $L < 0$ に対して，$x(n) \geq L,\ n \geq n_L - m$ を満たす整数 $n_L \geq m$ が存在するならば，十分大きな整数 $n \geq n_L$ に対して，

$$x(n+1) < R_L \qquad \text{かつ} \qquad x(n+1) \geq S_L \tag{2.4}$$

となる．ただし，R_L, S_L は

$$\begin{cases} R_L = -(\sup\limits_{n\geq m} \sum\limits_{k=n-m}^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(k)) f(L), \\ S_L = \min(R_L - (\sup\limits_{n\geq m} \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(n)) f(R_L), 0) - (\sup\limits_{n\geq m} \sum\limits_{k=n-m}^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(k)) f(R_L). \end{cases} \tag{2.5}$$

特に，十分大きな $n \geq m$ に対して，

$$x(n+1) < R_{-\infty} \qquad \text{かつ} \qquad x(n+1) > S_{-\infty} \tag{2.6}$$

となる．ただし，

$$\begin{cases} R_{-\infty} = -(\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n-m}^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(k))(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)) < +\infty, \\ S_{-\infty} = \min(R_{-\infty} - (\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(n)) f(R_{-\infty}), 0) \\ \qquad\qquad -(\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n-m}^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(k)) f(R_{-\infty}) > -\infty. \end{cases} \tag{2.7}$$

(証明) 仮定より，$x(n+1) > 0$ と $|x(n+1)| > |x(n)|$ を満たす十分大きな整数 $n \geq n_L$ が存在し，補題 2.3 より，$L \leq x(g(n)) = \min\limits_{0\leq j\leq m} x(n-j) < 0$ となる整数 $g(n) \in [n-m, n]$ が存在する．このとき，(1.1) より，

$$\begin{cases} x(n+1) \leq x(n) - (\sum\limits_{j=0}^{m} a_j(n)) f(x(g(n))), \\ x(n) = x(n-1) - \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(n-1) f(x(n-1-j)), \\ \quad \vdots \\ x(g(n)+1) = x(g(n)) - \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(g(n)) f(x(g(n)-j)). \end{cases}$$

このとき，

$$x(n+1) \le x(g(n)) - (\sum_{j=0}^{m} a_j(n))f(x(g(n))) - \sum_{k=g(n)}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_j(k)f(x(k-j))$$

が成り立ち，(1.6) と $x(g(n)) < 0$ により，次を仮定できる．

$$x(g(n)) - (\sum_{j=0}^{m} a_j(n))f(x(g(n))) < 0.$$

それゆえに，十分大きな整数 $n \ge n_L$ に対して，

$$x(n+1) < -\sup_{n\ge m}(\sum_{k=g(n)}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_j(k))f(L) \le R_L.$$

同様に，$x(n+1) < 0$ と $|x(n+1)| > |x(n)|$ を満たす十分大きな整数 $n \ge n_L$ に対して，補題 2.3 より，$0 < x(g(n)) = \max_{0\le j\le n} x(n-j) \le R_L$ となる整数 $g(n) \in [n-m, n]$ が存在し，

$$x(n+1) \ge x(g(n)) - (\sum_{j=0}^{m} a_j(n))f(x(g(n))) - \sum_{k=g(n)}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_j(k)f(x(k-j)).$$

ゆえに，十分大きな整数 $n \ge n_L$ に対し，

$$x(n+1) \ge \min(R_L - (\sup_{n\ge m}\sum_{j=0}^{m} a_j(n))f(R_L), 0) - (\sup_{n\ge m}\sum_{k=n-m}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} a_j(k))f(R_L) = S_L.$$

よって，(2.4) を得る．同様に (2.6) も示される． □

(定理 1.1 の証明) ある実数 $L < 0$ に対して，$x(n) \ge L$, $n \ge n_L - m$ となる整数 $n_L \ge m$ が存在するならば，補題 2.4 より，(2.4) が成り立つ．一方で，

$$S(x) = \min(\varphi(-r_2 f(x)), 0) - r_2 f(-r_2 f(x))$$

について，任意の $x < 0$ に対して $S(x) > x$ が成り立つので，(1.7) が成り立つ．単調反復法を適用することにより，$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$, 及び，(1.1) の零解が大域的漸近安定性を持つ．

特に，$f(x) = e^x - 1$ の場合を考えよう．$\hat{L} \le 0$ より，$\hat{R}(r_1) = -r_2 f(\hat{L}) = r_2(1 - e^{\hat{L}}) \le r_2$ であり，$0 \le x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x^2 + x - 1 < 0$ となるので，(1.8) は

$$x(x+1) \le (r_2 - \hat{R}(r_1))\{(r_2 - \hat{R}(r_1)) + 1\} < 1, \qquad 0 \le x \le r_2 - \hat{R}(r_1) = r_2 e^{\hat{L}}$$

を満たす．

$$h(x) = \{1 - (r_1 + r_2)e^{r_2 - x}\}(-x) - 1, \qquad h(0) < 0$$

かつ $h(r_2) = \{1 - (r_1 + r_2)\}(-r_2) - 1 \le 0$ と $h'(x) = -\{1 - (1+x)(r_1 + r_2)e^{r_2 - x}\} = 0$ となる $0 \le x \le r_2 - \hat{R}(r_1) = r_2 e^{\hat{L}}$ に対して，

$$h(x) = (1 - \frac{1}{1-x})(-x) - 1 = \frac{x(x+1) - 1}{1-x} < 0.$$

それゆえに，$L<\hat{L}$ と $x=r_2e^L<r_2e^{\hat{L}}$ に対して，

$$\{1-(r_1+r_2)e^{-r_2f(L)}\}(-r_2e^L)-1\le 0$$

すなわち，

$$\{1-(r_1+r_2)f'(-r_2f(L))\}(-r_2f'(L))-1\le 0, \qquad L<\hat{L}. \tag{2.8}$$

一方で，r_1，$r_2\le 1$ より，$\hat{L}\le L<0$ に対して $\varphi(-r_2f(L))\ge 0$ ならば，$q(L)=-f(-f(L))-L$ に対して，

$$-r_2f(-r_2f(L))\ge -f(-f(L))>L, \qquad L<0$$

となる．これは $L<0$ について，$q'(L)=e^{L-f(L)}-1<0$ かつ $q(L)>q(0)=0$ となるためである．したがって，(1.7) の第2項が成り立つ．さらに (2.8) より，

$$\begin{aligned}\varphi(-r_2f(L))-r_2f(-r_2f(L))-L &> \varphi(-r_2f(\hat{L}))-r_2f(-r_2f(\hat{L}))-\hat{L}\\ &= -r_2f(-r_2f(\hat{L}))-\hat{L}>0, \qquad L<\hat{L}.\end{aligned}$$

よって，$f(x)=e^x-1$ に対して，(1.8) は (1.7) を示している． □

系 2.1 (cf. Györi and Pituk [2]) $f(x)=x$ に対して，(1.5) の r_1，$r_2<1$ ならば，$f(x)=x$ と (1.3) の条件の下で (1.1) の零解は大域的漸近安定である．

定理 1.1 の応用例として，次の一つの変数遅れを持つ非線形差分方程式を考える．

$$\begin{cases} x(n+1)=x(n)-p(n)f(x(g(n))), & n=0,1,2,\cdots,\\ x(j)=x_j\ge 0, \quad g(0)\le j\le 0, & \text{かつ} \quad x(0)=x_0>0. \end{cases} \tag{2.9}$$

ただし，(1.2)，$p(n)>0$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}p(n)=+\infty$ と $\{g(n)\}_{n=0}^{\infty}$ は非減少整数列で $g(n)\le n$，$n\ge 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}g(n)=+\infty$ を仮定する．

系 2.2 (2.9) に対し，定理 1.1 が成り立つ．ただし，

$$r_1=\limsup_{n\ge 0}p(n), \qquad r_2=\limsup_{g(n)\ge 0}\sum_{j=g(n)}^{n-1}p(j). \tag{2.10}$$

参考文献

[1] K.Gopalsamy, M. R. S. Kulenovic and G. Ladas, On a logistic equation with piecewise constant arguments, *Differential Integral Equations* **4** (1991), 215-223.

[2] I. Györi and M. Pituk, Asymptotic stability in a linear delay difference equation, In Proceedings of SICDEA, Hungary, August 6-11, 1995, Gordon and Breach Science, Langhorne, PA, (1997).

[3] J. W.-H. So and J. S. Yu, Global stability in a logistic equation with piecewise constant arguments, *Hokkaido Math. J.* **24** (1995), 269-286.