数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 117-122

An exclusion principle in discrete dynamical systems

静岡大学システム工学科　今 隆助 (Ryusuke Kon)

1 はじめに

次のコルモゴロフ型差分方程式について考える：

$$x_i(t+1) = x_i(t)g_i(x(t)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

ただし，初期値は $x(0) = (x_1(0), \ldots, x_n(0)) \in \mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$ とし，$g_i : \mathbb{R}^n_+ \to (0, +\infty)$ は $g_i(0) > 1$ を満たす連続な関数とする．$x_i(t)$ は世代 $t \in \{0,1,2,\ldots\}$ における生物種 i の個体群密度であり，g_i はその種の増殖率である．この方程式は昆虫などの世代の重複しない生物の個体群動態を記述する方程式として数理生態学などで研究されている（例えば，[1-15]）．

本研究では，次のように優占という概念を導入し，種 k が優占となるための条件について考察する：

定義 1 (優占，dominance). 任意の $x(0) \in \mathbb{R}^n_+, x_k(0) > 0$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \backslash k$$

であるとき，種 k は優占であるといわれる．

優占の研究において次の弱優占は最も重要な概念である：

定義 2 (弱優占，weak dominance). 集合 D_k^- と集合 $\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}\backslash k} D_i^+$ が互いに素のとき，種 k は弱優占であるといわれる．ただし，$D_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : g_i(x) \geq 1\}$，$D_i^- = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : g_i(x) \leq 1\}$ である．

この定義から，弱優占な種が存在すれば，方程式(1) は共存平衡点（内部平衡点）を持たない．パーマネンスの必要条件は共存平衡点が存在することであるから，このときパーマネンスの意味での n 種の共存はありえないことが分かる．もちろん共存平衡点が安定となるという意味での共存もありえない．

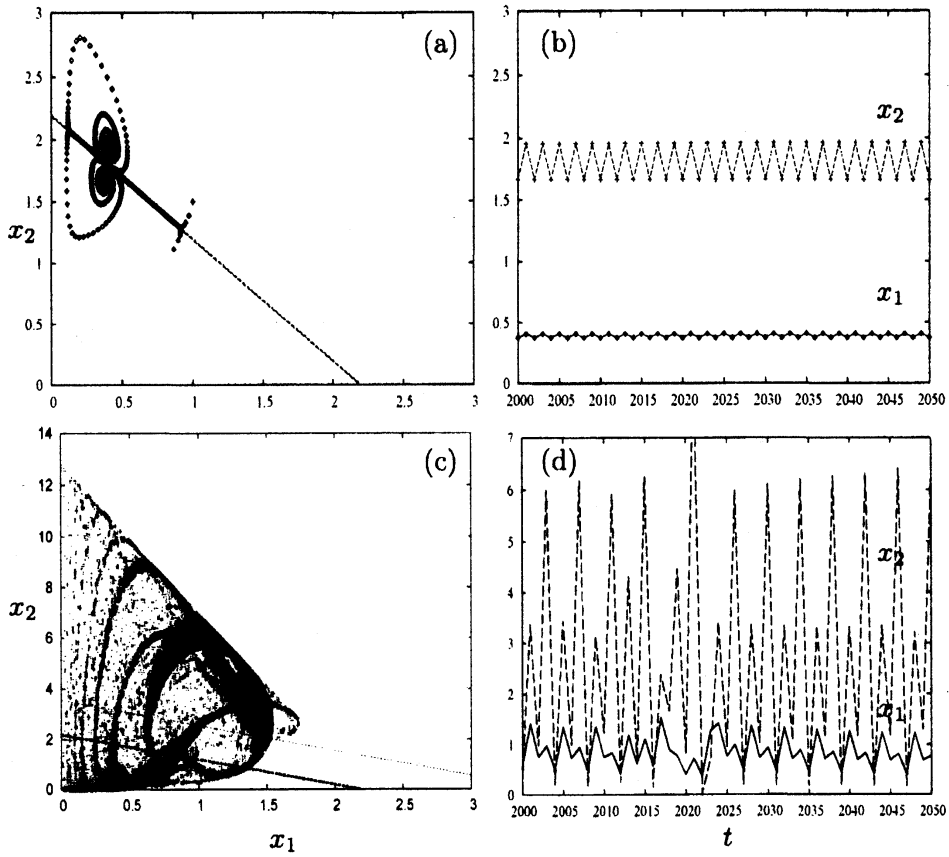

図 1: 系(2) の解軌道．(a),(c) は x_1-x_2 相平面上での解軌道，(b),(d) は x_1, x_2 の時間変化．(a),(b) のパラメータは $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $s_1 = 0.5$, $s_2 = 0$，初期値は $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1.5$. (c),(d) のパラメータは $r_1 = 1.5$, $r_2 = 3.55$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $s_1 = 0.5$, $s_2 = 0$，初期値は $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1.5$.

先行研究 [2-7,14,15] によって，弱優占は常に優占を意味するとは限らないことが知られている．例えば，次の方程式について考える：

$$\begin{cases} x_1(t+1) &=& x_1(t)[\exp\{r_1 - a_1(x_1(t)+x_2(t))\} + s_1] \\ x_2(t+1) &=& x_2(t)[\exp\{r_2 - a_2(x_1(t)+x_2(t))\} + s_2]. \end{cases} \tag{2}$$

ここで，パラメーターは $r_i > 0$, $a_i > 0$, $0 \le s_i < 1$ である．この方程式は(1) の具体例であり，

$$\frac{r_1 - \ln(1-s_1)}{a_1} > \frac{r_2 - \ln(1-s_2)}{a_2}$$

なら種 1 は弱優占であり，不等号が逆向きなら種 2 は弱優占である．この方程式では，一方の種が弱優占という状況の下で，2 種が共存可能である（図 1 参照）．図 1 では，種 2 が弱優占である．図 1-(a) では，$\mathbb{R}^2_+$ の内部に 2 周期解が存在し，それが局所的に安定になっている（[3, 15] 参照）．図 1-(c) では，複雑な構造を持つオメガ極限集合が $\mathbb{R}^2_+$ の内部と交わりを持っている（[2, 3, 14, 15] 参照）．すなわち，初期値によっては 2 種の共存か実現される（パーマネンスの意味での共存はありえないことに注意する）．同様な現象を示す具体例は [4-7] でも研究されている．このように，弱優占は優占を必ずしも意味しない．そこで，弱優占に加えてどのような条件を加えれば，優占となるのかが研究されている．Franke and Yakubu [7] は次の 2 つの結果を得ている：

定理 3 (Franke and Yakubu [7], Theorem 3.1). 系(1) は散逸的であるとする．さらに，すべての $x \in \mathbb{R}^n_+$ に対して $g_i(x) < g_k(x)$, $i \in \{1, \ldots, n\} \backslash k$ なら，種 k は優占である．

すべての $x \in \mathbb{R}^n_+$ に対して $g_i(x) < g_k(x)$, $i \in \{1, \ldots, n\} \backslash k$ なら，種 k は弱優占であることに注意する．ただし，逆は成り立たない．

定理 4 (Franke and Yakubu [7], Theorem 4.2). 系(1) は k-非帰還であるとする（k-非帰還の定義は Franke and Yakubu [7], Definition 7 参照）．このとき，種 k が弱優占であれば，種 k は優占である．

系(1) が k-非帰還のとき，集合 $\mathbb{R}^n_+ \backslash D^-_k$ から集合 D^-_k に写された点は二度と $\mathbb{R}^n_+ \backslash D^-_k$ に戻ることはない．定理 3 を方程式(2) に適用すると，次の結果が得られる：

定理 5 (Yakubu[15], Theorem 5). $0 < s_1 < 1$ かつ $s_2 = 0$ のとき，種 1 が優占となるための十分条件は

$$0 < e^{r_2} - e^{r_1} < s_1, \ a_1 = a_2.$$

次の節では，種 k が弱優占であるという仮定の下で，種 k が優占となるための新しい十分条件を与える．

2 結果

平均リアプノフ関数 [10, 12] を用いることにより，次の結果を得る：

定理 6. 系(1) は散逸的であるとする．$\mathbb{R}^n_+$ 上で関数 $\ln g_k$ は凸，関数 $\ln g_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}\backslash k$ は凹であるとする．このとき，種 k が弱優占であれば，種 k は優占である．

（証明の概略）まず，平均リアプノフ関数 $P_1(x) = x_k$ を用いることにより，面 $S_k = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_k = 0\}$ が一様リペラーであることを示す．このとき，関数 $\ln g_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}\backslash k$ の凹性と Jensen の不等式を利用することにより S_k 上の解の平均挙動を評価する．その後，$\mathbb{R}^n_+\backslash S_k$ 上の解が x_k 軸に収束することを平均リアプノフ関数 $P_2(x) = \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}\backslash k} x_i$ を用いて示す．このとき，関数 $\ln g_k$ の凸性と Jensen の不等式を利用することにより，$\mathbb{R}^n_+\backslash S_k$ 上の解の平均挙動を評価する．

この定理を系(2) に適用することにより，定理 5 の仮定を以下のように緩めることができる：

定理 7. $0 < s_1 < 1$ かつ $s_2 = 0$ のとき，種 1 が優占となるための必要十分条件は

$$\frac{r_1 - \ln(1 - s_1)}{a_1} > \frac{r_2}{a_2}.$$

（証明の概略）系(2) は散逸的であり，関数 $\ln g_1, \ln g_2$ はそれぞれ凸，凹（かつ凸）であることが分かる．よって定理 6 より，種 1 は優占である．また，仮定の不等式が成り立たないとき，（安定多様体定理から）$\mathbb{R}^2_+$ の内部に x_2 軸に収束する点が存在したり，共存平衡点が存在したりする．

この定理の仮定が満たされているときの系(2)の解軌道を図2に示す．図2-(a)から，$\mathbb{R}^2_+\backslash D_1^-$ から出発した解軌道は一度 D_1^+ に写され，その後 $\mathbb{R}^2_+\backslash D_1^-$ に戻り，種1のヌルクライン $D_1^+\cap D_1^-$ の間を振動しながら x_1 軸上の2周期解に収束していることが分かる．すなわち，このとき系(2)は1-非帰還ではない．さらに，定理3の仮定も満たされていないことも分かる．

これらの結果から，定理6は定理3にも4にも含まれておらず，優占のための新しい十分条件を与えていることが分かる．

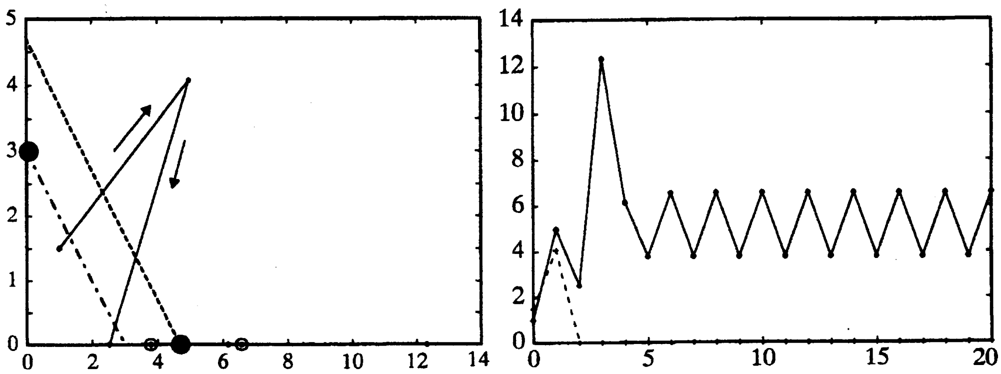

図 2: 系(2)の解軌道．このとき，パラメータは $r_1=4$, $r_2=6$, $a_1=1$, $a_2=2$, $s_1=0.5$, $s_2=0$，初期値は $x_1(0)=1$, $x_2(0)=1.5$．(a):x_1-x_2 相平面．実線は解軌道，点線は x_1 のヌルクライン $D_1^+\cap D_1^-$，一点鎖線は x_2 のヌルクライン $D_2^+\cap D_2^-$．$\mathbb{R}^2_+\backslash D_1^-$ から出発した解軌道は一度 D_1^+ に写され，その後 $\mathbb{R}^2_+\backslash D_1^-$ に戻り，ヌルクライン $D_1^+\cap D_1^-$ の間を振動しながら x_1 軸上の2周期解に収束する．(b):個体群密度の時間変化．x_1 は周期2で振動し，x_2 はゼロに収束する．

参考文献

[1] Chan, D. M. and Franke, J. E., Multiple extinctions in a discrete competitive system. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **2** (2001), 75-91.

[2] de Feo, O. and Ferriere, R., Bifurcation analysis of population invasion: on-off intermittency and basin riddling, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **10** (2000), 443-452.

[3] Elaydi, S. and Yakubu, A.-A., Global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking, *J. Difference Equ. Appl.* **8** (2002) 537–549.

[4] Franke, J.E. and Yakubu, A.-A., Global attractors in competitive systems, *Nonlinear Anal.* **16** (1991), 111-129.

[5] Franke, J. E. and Yakubu, A.-A., Mutual exclusion versus coexistence for discrete competitive systems, *J. Math. Biol.* **30** (1991), 161–168.

[6] Franke, J. E. and Yakubu, A.-A., Geometry of exclusion principles in discrete systems, *J. Math. Anal. Appl.* **168** (1992), 385-400.

[7] Franke, J. E. and Yakubu, A.-A., Species extinction using geometry of level surfaces, *Nonlinear Anal.* **21** (1993), 369-378.

[8] Geritz, S. A. H., Gyllenberg, M., Jacobs, F. J. A. and Parvinen, K., Invasion dynamics and attractor inheritance, *J. Math. Biol.* **44** (2002), 548-560.

[9] Hofbauer, J., Hutson, V. and Jansen, W., Coexistence for systems governed by difference equations of Lotka-Volterra type, *J. Math. Biol.* **25** (1987), 553-570.

[10] Hutson, V., A theorem on average Liapunov functions, *Monatshefte für Mathematik* **98**, (1984) 267-275.

[11] Kon, R. and Takeuchi, Y., Permanence of host-parasitoid systems, *Nonlinear Anal.* **47** (2001), 1383-1393.

[12] Kon, R. and Takeuchi, Y., Permanence of 2-host 1-parasitoid systems, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms* **10** (2003), 389-402

[13] Kon, R., Permanence of discrete-time Kolmogorov systems for two species and saturated fixed points, *J. Math. Biol.* **48** (2004), 57-81.

[14] Ranta, E., Kaitala, V., Alaja, S. and Tesar, D., Nonlinear dynamics and the evolution of semeloparous and iteroparous reproductive strategies, *Amer. Natur.* **155** (2000), 294-300.

[15] Yakubu, A.-.A, The effects of planting and harvesting on endangered species in discrete competitive systems, *Math. Biosci.* **126** (1995), 369-378.