

## 売り出しのタイミングゲーム

大阪府立大学 総合科学部 数理・情報科学科 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

大阪府立大学 総合科学部 数理・情報科学科 北條仁志 (Hitoshi Hohjo)

Department of Mathematics and Information Sciences  
Osaka Prefecture University

### Abstract

本報告では、次のような2人非0和無限ゲームを提案し、Nash 平衡の意味での解を導く。互いに競争状態にある二つの企業が、ある生産物の販売権をある市場で複占している。この生産物の価値は収穫後時間の経過に伴って増加するが、相手が先に売り出すと不連続的に価値が減少しその後また時間とともに増加する。また、両企業とも次の収穫期までには自分の所有文は売ってしまわなければならない。両者は、互いに相手の売り出し時刻を考慮に入れながら自分に取っての最適な売りだし時刻を決めなければならない。このゲームの Nash 平衡は生産物の期首での価値と期末でのそれに依存することがわかる。

### 1. はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする2人非0和ゲームである。

2人のプレーヤ (Player I, II) が、小豆や大豆と言った生産物の販売をある市場で複占している。I と II による市場占有率は半々であり、お互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫でき各期の初めに生産されると、2人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すかのタイミングを考えなければならない。両プレーヤは、次の期には新しい収穫があるので、この生産物を各期の終わりまでには売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、両プレーヤのいずれもが売りに出さない間は時間の経過に伴って上昇する。しかし、いずれか一方のプレーヤが自分の持分を売りに出すと急激に (不連続的に) 評価額が下落し、その後また時間の経過に従って上昇する。2人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額と、相手プレーヤの売りだし時刻を考えに入れながら、売り出しのタイミングを決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。本研究集会では、素朴な第一歩を報告する。

このような問題にあっては、通常のタイミングゲームと同様に、各プレーヤに利用

できる情報の様式には二つの型がある。一方のプレーヤが売りに出した瞬間、そのことが直ちに相手プレーヤに知らされる場合、彼は、ノイジーな状態にあると言われる。逆に、一方のプレーヤが何時売りに出しても、相手にそのことが連絡されず、彼が既に売りに出したのかまだ売りに出していないのかを相手が知らない状態にあるとき、彼は、サイレントな状態にあると言う。

この情報様式の組み合わせにより、以下三つの型のゲームが考えられる：

1. 両プレーヤともにサイレントな状態にある。
2. 両プレーヤともにノイジーな状態にある。
3. Player I はサイレントな状態にあるが、Player II はノイジーな状態にある。

## 2. 記号と仮定

本報告では1期間のゲームを考え、期間は単位区間  $[0, 1]$  で表現する。

$v(t)$  : 両プレーヤともにまだ売りに出していないときの、時刻  $t \in [0, 1]$  における生産物の価値

微分可能であり  $v'(t) > 0$  for  $t \in (0, 1)$  を仮定する。

$r$  : 一方のプレーヤが既に売りに出したときの割引率で、

$$0 < r < 1$$

と仮定。すなわち一方のプレーヤが既に売りに出した後は、

$t \in [0, 1]$  での評価額は  $v(t)$  から  $rv(t)$  へ減少する。

我々はまた、 $0 < v(0) < \infty$  を仮定する。

ここで、もし二人のプレーヤが同時に時刻  $t \in [0, 1]$  で売りに出したときは、評価額  $v(t)$  を半分ずつ分け合うことになるとする。

後の議論のため

$$v(0) < rv(1)$$

も仮定しておく。

## 3. サイレントゲーム

ここでは、二人ともサイレントな状態にあるものとする。お互いに、相手が既に売りに出したのか、まだ出していないのかわからず、自分が売りに出してから始めて、生産物の評価額を知ることとなる。従って、Player I と Player II の純戦略をそれぞれ、 $x \in [0, 1]$  と  $y \in [0, 1]$  とすると、I への期待利得  $M_1(x, y)$  と II への期待利得  $M_2(x, y)$  は次のように与えられる：

$$M_1(x, y) = \begin{cases} v(x), & x < y \\ (1/2)v(x), & x = y \\ rv(x), & x > y \end{cases} ; \quad (1)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} v(y), & y < x \\ (1/2)v(y), & y = x \\ rv(y), & y > x \end{cases} \quad (2)$$

両利得関数の形と構造から、Player I と II は、ある区間  $(a, 1)$  上の密度部分  $f(x) > 0$  と点 1 での可能な mass 部分  $\alpha > 0$  とで構成される混合戦略(cdf)  $F(x)$ を用いるものとする。ここに、 $0 < a < 1$  である。そうすると

$$M_2(F, y) = \begin{cases} v(y), & y < a \\ v(y)[1 - (1-r)F(y)], & a < y < 1 \\ v(1)[(1/2)\alpha + (1-\alpha)r], & y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

を得る。そこで

$$M_2(F, y) = \text{constant} \quad \text{for } y \in (a, 1)$$

が成立するようにすると

$$v(y)[1 - (1-r)F(y)] = (1-r)f(y)v(y), \quad y \in (a, 1)$$

が得られるので、結局

$$F(z) = [1/(1-r)] [1 - \{k/v(z)\}], \quad a < z < 1$$

が成立しなければならないこととなる。ここに  $k$  は積分定数である。ところで

$$F(a) = 0 \quad \text{かつ} \quad F(1) = 1 - \alpha$$

であるから

$$k = v(a) ; \quad (1-\alpha)(1-r) = [1 - \{v(a)/v(1)\}]$$

でなければならない。そこで  $\alpha = 0$  と置くことにより

$$v(a) = rv(1), \quad 0 < a < 1$$

かつ

$$M_2(F, y) = v(y) < v(a), \quad y < a \\ = v(a), \quad a < y < 1$$

が成立する。 $v(t)$  は  $t \in [0, 1]$  につき狭義単調増加関数であるから、 $a$  は  $[0, 1]$  内で唯 1 つ存在する。

以上の議論より定理 1 をうる。

定理 1. いま  $a^0$  を方程式  $v(a) = rv(1)$  の区間  $[0, 1]$  に於ける唯一つの根とし、さらに、混合戦略として

$$F^0(z) = 0, \quad 0 < z < a^0 \\ = [1/(1-r)][1 - \{1 \cdot v(a)/v(z)\}], \quad a^0 \leq z \leq 1$$

とする。そうすると  $(F^0(x), F^0(y))$  は非 0 和ゲーム(1)と(2)に対しての 1 つの平衡点である。また、対応する I に対しての平衡値  $v_1$  と II に対しての平衡値  $v_2$  は

$$\begin{cases} v_1 = M(F^0, F^1) = rv(1) ; \\ v_2 = M(F^0, F^2) = rv(1) \end{cases}$$

となる。

#### 4. ノイジーゲーム

ここでは、両プレーヤともノイジープレーヤである場合を扱う。Player I と II の純戦略を、それぞれ、 $x \in [0, 1]$  と  $y \in [0, 1]$  であるとする。ここに、戦略  $x$  とは、I は  $x$  を決め、もし II がこの  $x$  までに自分の生産物を売りに出さなければ  $x$  で売りに出し、II が  $x$  までに既に売りに出しておれば  $rv(x)$  細大にする時刻 1 まで待ってから売りに出すことを意味する。戦略  $y$  についても同様に定義される。そうすると、I への期待利得  $M_1(x, y)$  と II への期待利得  $M_2(x, y)$  は次式のように与えられる：

$$M_1(x, y) = \begin{cases} v(x), & x < y \\ (1/2)v(x), & x = y \\ rv(1), & x > y \end{cases} ; \quad (4)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} v(y), & y < x \\ (1/2)v(y), & y = x \\ rv(1), & x > y \end{cases} . \quad (5)$$

利得関数の形と構造から、純戦略の中に平衡戦略は存在しない。さらに、前節のような密度部分と mass 部分とで構成される cdf のクラスの中にも見つけることが出来ない。これは  $x = y$  での利得関数に  $1/2$  の係数がかかっていることに原因している。そこで、我々は次のような混合戦略  $G(z)$  を考察する。

今  $a$  を方程式  $v(a) = rv(1)$  の区間  $[0, 1]$  に於ける唯一つの根、すなわち

$$a = v^{-1}(rv(1)), \text{ ここに } v^{-1}(\cdot) \text{ は } v(t) \text{ の逆関数}$$

とする。そこで、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\delta$  を

$$\delta = v^{-1}(rv(1) + \varepsilon) - a = v^{-1}(rv(1) + \varepsilon) - v^{-1}(rv(1)) > 0$$

となるように選び、そして

$$G^0(z) = \begin{cases} 0, & z < a \\ (1/\delta), & a < z < a + \delta \\ 0, & z > a + \delta \end{cases} \quad (6)$$

とおく。そうすると

$$M_2(G^0, y) = \begin{cases} v(y) < v(a) = rv(1), & y < a \\ \int_a^y \{rv(1)/\delta\} dx + \int_y^{y+\delta} \{v(x)/\delta\} dx, & a \leq y \leq y + \delta \\ rv(1), & y > a + \delta \end{cases} \quad (7)$$

を得る。そうすると

$$\begin{aligned}
 M_2(G, y) &= rV(1) \int_a^y (1/\delta) dx + v(y) \int_y^{a+\delta} (1/\delta) dx \\
 &< rV(1) \{(y-a)/\delta\} + v(a+\delta) \{(a+\delta-y)/\delta\} \\
 &= rV(1) \{(y-a)/\delta\} + \{rV(1) + \varepsilon\} \{(a+\delta-y)/\delta\} \\
 &= rV(1) + \varepsilon \{1+(a-y)/\delta\} \\
 &< rV(1) + \varepsilon, \quad a \leq y \leq a+\delta
 \end{aligned}$$

であるから、次の関係が成立する：

$$M_2(G^0, y) \begin{cases} < rV(1), & y < a \\ < rV(1) + \varepsilon, & a \leq y \leq a+\delta \\ = rV(1), & y > a+\delta. \end{cases} \quad (8)$$

全く同様な議論が  $M_1(x, G^0)$  に対しても成立する。

以上の議論より、次の定理が成立する。

定理 2.  $a^0$  を方程式  $v(a) = rV(1)$  の区間  $[0, 1]$  に於ける唯一つの根とし、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$G(z) = \begin{cases} 0, & z < a^0 \\ (1/\delta), & a^0 \leq z \leq a^0 + \delta \\ 0, & z > a^0 + \delta \end{cases}$$

とする。ここに  $\delta$  は

$$\delta = v^{-1}(rV(1) + \varepsilon) - v^{-1}(rV(1)) > 0.$$

そうすると  $(G^0(x), G^0(y))$  は非 0 和ゲーム (4) と (5) の 1 つの  $\varepsilon$  平衡点である。すなわち、任意の混合戦略 (cdf) に対して

$$\begin{cases} M_1(F, G^0) < rV(1) + \varepsilon; \\ M_2(G^0, F) < rV(1) + \varepsilon, \end{cases}$$

が成立する。

## 5. 今後の問題点

i) サイレント・ノイジーゲームへの展開

プレーヤ I はサイレントプレーヤで、プレーヤ II はノイジープレーヤ

ii)  $v(1) < v(0)$  の場合はどうなるか。こちらのほうが興味深い。

iii) N人ゲームへの一般化

iv) ここでは  $r$  を一定値と仮定したが、時刻  $t \in [0, 1]$  の関数とした時は複雑ではあるが興味深い。

v) もっと現実的な問題設定。

## 参考文献

1. M. Dresher, *Games of Strategy : Theory and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
2. S. Karlin, *Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics 2*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
3. Y. Teraoka and Y. Yamada, *Games of production development in manufacturing*, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems 445, Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing, Springer, Berlin, 1997, 58-67.
4. Y. Teraoka and H. Hohjo, *N-person games on territory*, Game Theory and Applications v, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2000, 134-141.