数理解析研究所講究録 1374 巻 2004 年 89-94

Mirror 対称性と WKB 解析

森岡達史（大阪教育大学）

Tatsushi Morioka (Osaka Kyoiku University)

§0. 序.

[3] で紹介した Mirror 対称性の応用として、狭義凸な障害物により回折する光についての WKB 解析が可能になる。これは Lebeau [1] によって示された。[1] に関する基本を初学者向けに解説したものが [2] である。また、[3] は [2] の内容について、Mirror 対称性の部分を改めてまとめたものになっている。講演では、[3] に従って Mirror 対称性を説明した。本稿では、WKB 解析に関連して、[2] の要点を簡単に述べる。さらに、Mirror 対称性と統一理論の関係についても触れる。これは、§4 においてなされる。なお、記号は [2] で用いたものをそのまま使う。

注意. 本稿の §4-1 と §4-2 は [2 , 3] 等についての予備知識なしで読める。

§1. Mirror 対称性.

[3] の一部分のみ繰り返しておく。

波と粒子の双対性とは、光が波であると同時に粒子であることをいう。波と粒子の双対性は、擬量子物理により記述される。

定義 1.1. symplectic 多様体と量子化 I の組を擬量子物理という。

定義 1.2. 量子化 I とは symplectic 多様体上の関数を積分作用素に翻訳する手続きのことをいう。

擬量子物理には A 模型と B 模型がある。symplectic 多様体は、

A 模型 —- 余接束

B 模型 —- 重み関数をもつ複素多様体

である。B 模型においては、重み関数は強多重劣調和であることが仮定されている。擬量子物理による波と粒子の双対性の記述は、数学的には、主要型方程式の解の特異性伝播定理である。

定義 1.3. 量子化 II とは symplectic 同型写像を積分作用素に翻訳する手続きのことをいう。

A 模型と B 模型の間において、量子化 I と量子化 II は両立する。この関係を Mirror 対称性とよぶ。

§2. B 模型における Fourier 積分作用素.

以下、[2, §11-3] に従って説明する。

Y は $\mathbf{C}^n$ の開集合、$\varphi \in C^\omega(Y, \mathbf{R})$ とする。φ は Y で強多重劣調和であると仮定する。F は $H_\varphi(Y)$ に作用する Fourier 積分作用素とする。このとき、$\mathbf{C}^n$ のある開集合 X とある強多重劣調和関数 $\psi \in C^\omega(X, \mathbf{R})$ が存在して、F は $H_\varphi(Y)$ から $H_\psi(X)$ への写像になる。F の相関数を h で表す。h と φ と ψ の関係について要点をまとめると次のようになる。

要点 2.1. [2, §11-3 の (11.3.1) 式 (page 68)]

-Im $h + \varphi$ の col を経由して、$\psi \in C^\omega(X, \mathbf{R})$ が定まる。

要点 **2.2.** h により T^*X から T^*Y への symplectic 同型写像 $\chi^{\mathbf{C}}$ が定まる。

要点 **2.3.** $(\chi^{\mathbf{C}})^{-1}$ により、T^*Y の I-lagrangian Λ_φ は T^*X の I-lagrangian Λ_ψ に変換される。すなわち、$(\chi^{\mathbf{C}})^{-1}(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\psi$ が成り立つ。

要点 2.1 は h と φ から ψ が定まることを示している。一方、要点 2.2 と要点 2.3 により、h と ψ から幾何的に φ を決めることが可能になる。これを以下にまとめておく。

要点 **2.4.** h と ψ が与えられたとする。要点 2.2 と同様にして、h により T^*X から T^*Y への symplectic 同型写像 $\chi^{\mathbf{C}}$ が定まる。$\Gamma \subset T^*Y$ を、$\Gamma = \chi^{\mathbf{C}}(\Lambda_\psi)$ により定める。ある強多重劣調和関数 $\varphi \in C^\omega(Y, \mathbf{R})$ が存在して、$\Lambda_\varphi = \Gamma$ が成り立つ。F は h を相関数とする Fourier 積分作用素とする。このとき、F は $H_\varphi(Y)$ から $H_\psi(X)$ への写像である。

§3. 光の回折.

この節では、[2, §10-4, page 62] に現れる積分作用素 J についての要点を述べる。これは以下のようになっている。

要点 **3.1.** 次の (I) – (III) をみたすような積分作用素 J と重み関数 ψ をみつける。

(I). J は次のような形をしている。

$$
\begin{aligned}
&(Jf)(\ell, x, \lambda)\\
&= \iiint \exp(i\lambda(\Psi(x, y, \xi, \beta) + \ell\beta))\, p(\ell, x, y, \xi, \beta, \lambda) f(y, \lambda)\, dy d\xi d\beta
\end{aligned}
$$

(II). 任意の $f \in H_\psi(Y)$ に対して $\widetilde{P}(Jf) = 0$ が成り立つ。

(III). $J|_{\ell=0}$ は $H_\psi(Y)$ から $H_\varphi(Y)$ への写像である。

注意 **3.2.** $\widetilde{P}$ は $\square$ を FBI 変換により変換したものである。ただし、ここで用いる FBI 変換は、[(時間) × (障害物の境界)] についての FBI 変換である。

(II)より Ψ はある Hamilton-Jacobi 方程式の解であることが要求される。Ψ がみたすべき Hamilton-Jacobi 方程式が [2, §10-4, page 61] の (E) である。(I) より $J|_{\ell=0}$ の相関数は Ψ である。Ψ と φ から要点 2.4 により ψ が定まる。

§4. 統一理論との関係.

この節では、Mirror 対称性と統一理論との関係について簡単に述べる。

§4-1. 論理と課題.

まず論理について整理する。

論理 **4.1.** 統一理論はあると仮定する。

論理 **4.2.** 統一理論があるということは、物質と時空間が統一されているということである。

論理 **4.3.** 物質と時空間が統一されているということは、

(物質の根源) = (時空間の根源)

という結論が得られているということである。

論理 4.1 - 4.3 により次のことがわかる。

主張 4.4. 統一理論においては、時空間は、「原料が存在する結果としての出来上がり」である。

注意 4.5. 主張 4.4 に現れる「原料」は、物質の根源かつ時空間の根源である。

主張 4.4 より、統一理論を確立するためには以下のことが必要となる。

課題 4.6. 物質と時空間の「原料」を見きわめる。

課題 4.7. 時空間を先に与えるのではないような数学的模型を構成する。

注意 4.8. 時空間の「原料」は、時空間より先にあるものである。従って、時空間を先に与える数学的模型では統一理論を記述できない。

課題 4.6 に関して「概念の改革」が必要となる。これは、

物理的には「波の媒質」、
数学的には「空間」

という概念を変革することを意味する。

§4-2. 概念の改革.

まず統一理論の要点を述べておく。

要点 4.9. 統一理論においては、波はひとつだけである。

要点 4.10. 統一理論における波は、「媒質」が存在する波である。

要点 4.11. 物質と時空間は、統一理論における波の媒質が「振動」する結果として現れるものである。

要点 4.12. 統一理論における波の「媒質」を理解するためには、「古典的な波の媒質」という概念の改革が必要である。

統一理論における波の「媒質」を「原物質」とよぶことにする。

要点 4.13. 物質と時空間は、原物質が「振動」する結果として現れるものである。

要点 4.14. 古典的な波の媒質の外側には、我々の経験する空間が存在する。一方で、原物質の外側は存在しない。より正確にいうと、「原物質の外側」という概念は意味をなさない。

注意 4.15. 要点 4.11 と要点 4.13 は同じである。

要点 4.12 について説明する。例えば、弦の振動は空間 1 次元の波動方程式により記述される。弦の振動については、現実と数学の対応は、

波の媒質 (弦) $\longleftrightarrow$ 数学的空間 $(\mathbf{R})$

となっている。この $\mathbf{R}$ は可換な空間である。一般に、古典的な波の媒質を記述するときに使う数学的空間は、可換な空間 $\mathbf{R}^n$ である。ここで、n は波の媒質の次元に相当する。媒

質が弦の場合は $n=1$, 膜の場合は $n=2$ である。一方で、統一理論における波の媒質（原物質）を記述するときに使う数学的空間は非可換な空間である。話を整理すると、

$$\begin{array}{rcl} \text{古典的な波の媒質 (物質)} & \longleftrightarrow & \text{可換な数学的空間} \\ \text{統一理論における波の媒質(原物質)} & \longleftrightarrow & \text{非可換な数学的空間} \end{array}$$

という対応になっている。ここで、改めて要点を述べておく。

要点 **4.16.** §4-1 で述べた「概念の改革」とは、

可換な空間により記述される理論 $\longrightarrow$ 非可換な空間により記述される理論

という形で物理を発展させることである。

要点 **4.17.** 従来の理論と統一理論について、自然界に対する理解のしかたの違いは以下のとうりである。

従来の理論 – 時空間という容器の中に物質が存在する。

統一理論 – 原物質が「振動」する結果として物質と時空間が現れる。

注意 **4.18.** 原物質を中に含むような容器は存在しない。

注意 **4.19.** 非可換な数学的空間は「時空間を創り出すもの」である。非可換な数学的空間が時空間そのものに対応しているわけではない。

要点 **4.20.** 自然界を支配している法則をひとことでいうと、以下のようになる。

「原物質は静止していない。」

注意 **4.21.** 原物質はひとつだけしか存在しない。

§4-3 非可換幾何.

この節では、B 模型と非可換幾何の関係について説明する。

主張 **4.22.** B 模型は光について課題 4.7 をある水準で実行したものである。

課題 4.7 をもう 1 度書いておく。

課題 **4.7.** 時空間を先に与えるのではないような数学的模型を構成する。

B 模型における量子化 I は、非可換環の作用素表現を行う手続きになっている。この非可換環の構成が変型量子化に相当する。まず、本稿における変型量子化の意味を述べておく。

N は symplectic 多様体、f, $g \in C^{\omega}(N, \mathbf{R})$ とする。$\{f, g\} = H_f g$ と定義する。ここで H_f は f の Hamilton vector 場である。$\{f, g\}$ は f と g の Poisson bracket とよばれる。形式的な集合 $\mathcal{A}$ を以下により定める。

$$\mathcal{A} = \{p \ : \ p = \sum_{\ell=0}^{\infty} p_{\ell}(i\lambda)^{-\ell}\ , \quad p_{\ell} \in C^{\omega}(N, \mathbf{C})\ \} \tag{4.1}$$

定義 4.23. symplectic 多様体 N の変型量子化とは、以下の (I) と (II) をみたすような演算 $\circ$ を $\mathcal{A}$ に定めることをいう。

(I). $(\mathcal{A}, +, \circ)$ は環である。

(II). 任意の $p, q \in \mathcal{A}$; $p = \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell (i\lambda)^{-\ell}$, $q = \sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell (i\lambda)^{-\ell}$ に対して次の (a), (b) が成り立つ。

(a). $p \circ q$ の主要項は $p_0 q_0$ である。

(b). $p \circ q - q \circ p$ の主要項は $\{p_0, q_0\}(i\lambda)^{-1}$ である。

B 模型の symplectic 多様体について復習しておく。Y は $\mathbf{C}^n$ の開集合、$\varphi \in C^\omega(Y, \mathbf{R})$ とする。φ は Y で強多重劣調和であると仮定する。$\theta = -2i\bar{\partial}\partial\varphi$ とする。$(Y^{\mathbf{R}}, \theta)$ が B 模型の symplectic 多様体、φ が重み関数である。$(Y^{\mathbf{R}}, \theta)$ の変型量子化は以下のような手順でなされる。まず、形式的な集合 $\widetilde{\mathcal{A}}$ を次のように定める。

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{p \;:\; p = \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell (i\lambda)^{-\ell}, \quad \text{各 } p_\ell \text{ は } T^*Y \text{ から } \mathbf{C} \text{ への正則関数 } \} \tag{4.2}$$

さらに、$p, q \in \widetilde{\mathcal{A}}$; $p = \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell (i\lambda)^{-\ell}$, $q = \sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell (i\lambda)^{-\ell}$ に対して

$$p \circ q = \sum_{\ell=0}^{\infty} r_\ell (i\lambda)^{-\ell} \;;$$

$$r_\ell(x, \xi) = \sum_{|\alpha|+m+j=\ell} (\alpha!)^{-1} \frac{\partial^\alpha p_m}{\partial \xi^\alpha}(x, \xi) \frac{\partial^\alpha q_j}{\partial x^\alpha}(x, \xi), \qquad (x, \xi) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$$

と定義する。このとき、$(\widetilde{\mathcal{A}}, +, \circ)$ は環である。$\Lambda \subset T^*Y$ を $\Lambda = j_\varphi(Y)$ により定める。ここで j_φ は $\tilde{j}_\varphi$ と $T^*Y \cong T^*Y^{\mathbf{R}}$ により定まる Y の T^*Y への埋込みである。また、$\tilde{j}_\varphi$ は Y の $T^*Y^{\mathbf{R}}$ への埋込みであって、

$$\tilde{j}_\varphi(z) = (z, (d\varphi)_z) \;;\; z \in Y \tag{4.3}$$

により定義される。σ はT^*Y の正準2形式、π はT^*Y のY への射影とする。このとき、次が成り立つ。

- $\circ$ $(\Lambda, (\mathrm{Re}\,\sigma)|_\Lambda)$ は symplectic 多様体である。
- $\circ$ $(\mathrm{Im}\,\sigma)|_\Lambda = 0$ である。
- $\circ$ π により $(\Lambda, (\mathrm{Re}\,\sigma)|_\Lambda)$ と $(Y^{\mathbf{R}}, \theta)$ は symplectic 同型である。
- $\circ$ T^*Y は Λ の複素化である。

環 $(\widetilde{\mathcal{A}}, +, \circ)$ を Λ に制限することにより得られる環を $(\mathcal{A}, +, \circ)$ で表す。π により $(\mathcal{A}, +, \circ)$ は $(Y^{\mathbf{R}}, \theta)$ の変型量子化と解釈することができる。より正確な説明については [2, §11-2] を参照せよ。

注意 4.24. この節で定義された Λ は本稿の §2 の Λ_φ と同じである。

注意 4.25. $\mathcal{A}$ 及び $\widetilde{\mathcal{A}}$ は本稿だけで用いた記号であって、[2, §11-2] では使われていない。

References

1. G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **9** (1984), 1437–1494.
2. 森岡達史, 第2超局所解析の基本, 龍谷大学科学技術共同研究センター (2000).
3. 森岡達史, 波と粒子の双対性と対称性, 京都大学数理解析研究所講究録に掲載予定.
4. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).