

左辺が一致するオーバーレイ性を持つ左線形 TRS の 正規化戦略

水野 健一 (Ken'ichi MIZUNO)†, 草刈 圭一朗 (Keiichiro KUSAKARI)‡,

酒井 正彦 (Masahiko SAKAI)‡, 坂部 俊樹 (Toshiki SAKABE)‡

†名古屋大学工学部 (School of Eng., Nagoya Univ.)

‡名古屋大学大学院情報科学研究科 (Grad. School of Info. Sci., Nagoya Univ.)

1 はじめに

無限リストを扱う計算のように計算の順序により、計算結果が得られたり得られなかったりすることがある。このとき、どの計算から行うべきかを指定するものを計算戦略と呼ぶ。例えば、次の単純な項書換え系を考える。

$$R = \begin{cases} natList \rightarrow gen(0) \\ gen(n) \rightarrow cons(n, gen(n+1)) \\ take(nil, m) \rightarrow nil \\ take(xs, 0) \rightarrow nil \\ take(cons(n, xs), m+1) \rightarrow cons(n, take(xs, m)) \end{cases}$$

ここで、*natList* は 0 から始まる無限のリストを表す計算の停止しない関数である。これを、リストの先頭から *m* 個の要素を取り出す関数 *take* に与えて計算することを考える。例えば、*take(natList, 3)* の計算では、ML や C 言語が実行するように *gen* の計算ばかり続けてしまうと計算が停止しないが、*haskell* のように計算する箇所をうまく選んで計算を行うことにより、計算結果を得ることができる。このように無限リストの概念を持つプログラムは、一般にはバックトラックが必要な計算を分かりやすく記述することができるので、計算戦略の研究は重要なものとなる。

計算結果が存在するならばそれが必ず求められる戦略である正規化戦略について、左線形かつ重なりのない規則をもつクラスである直交な項書換え系に対して盛んに研究が続けられて来た [6, 14, 10, 3, 4]。また、それ以外のクラスについてもいくつかの研究が行われている [8, 16, 1] が、これらはいずれも計算結果が一意なクラスについての結果である。一方、我々は最内書換えが停止すると言う強い制限の下ではあるが計算結果が一意でないクラスにおいて、最内書換え戦略がすべての計算結果を見付けることができると言う完全な戦略であることを示した [15]。

本論文は、直交な項書換え系に対する正規化戦略である並列最外戦略、強逐次戦略、NV 逐次戦略のそれぞれに対して、左辺が一致するオーバーレイ性を持つ項書換え形に対しても完全である、すなわち、すべての正規形が発見できるための条件を示す。

2 準備

項書換え形的基本的概念を述べる。詳細については文献 [2, 9] を参照されたい。シグネチャは、関数記号の集合 *F* である。それぞれの関数は固有のアリティ(引数の数)を持つ。*F* と変数の加算無限集合 *X* から構成される項の集合を *T(F, X)* で表す。変数を持たない項の集合 *T(F, ∅)* を *T(F)* と表す。項 *s* と *t* が同一であることを *s ≡ t* と書く。*t* に現れる変数の集合を *Var(t)* で表す。同一変数が 2ヶ所以上現れない項を線形という。

項の位置は正整数の列を用いて表される。空列を ϵ で、列 *p* と *q* の接続を *p · q* で表すとき、項 *t* のすべての位置の集合 *Pos(t)* は次のように定義される。(1) *t* が変数のとき、*Pos(t) = {ε}*。(2) $t \equiv f(t_1, \dots, t_n)$ のとき、 $Pos(t) = \{\epsilon\} \cup \{i \cdot p \mid 1 \leq i \leq n, p \in Pos(t_i)\}$ 。位置 *p* が位置 *q* の上にある ($p \leq q$ と書く) とは、 $p \cdot r = q$ を満たす位置 *r* が存在することをいう。また、 $p \leq q$ でも $p \geq q$ でもないとき、*p* と *q* は並列であるといい $p \parallel q$ と書く。*p* ∈ *Pos(t)* のとき、*t* の位置 *p* における部分項を *t_p* で、*t* の位置 *p* を項 *s* で置き換えて得られる項を *t[s]_p* と表す。また、この記法を複数の位置に拡張して $t[s_1, \dots, s_n]_{p_1, \dots, p_n}$ のようにも用いる。 $x_i \sigma \equiv u_i (1 \leq i \leq n)$ を満たす代入 σ を $\{x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n\}$ のように記述する。

書換え規則 $l \rightarrow r$ は、変数でない項 *l* と項 *r* の対 (*l, r*) である。書換え規則の集合を項書換え系 (Term Rewriting System, 略して TRS) という。TRS *R* に対して、項上の書換え関係 \rightarrow_R は次

のように定義される。 $s \rightarrow_R t$ となる必要十分条件は、 $s|_p \equiv l\sigma$ と $t \equiv s[r\sigma]_p$ を満たす書換え規則 $l \rightarrow r$ 、位置 p 、代入 σ が存在することである。このとき、 $s \xrightarrow{(p,e)} t$ のように規則 $e = l \rightarrow r$ や位置 p を明記したり、 R を省略することもある。 $l\sigma$ をリデックスと呼ぶ。

リデックスを持たない項を正規形という。すべての正規形の集合を NF_{\rightarrow_R} もしくは NF_R で表す。 \rightarrow の反射的推移的閉包を \rightarrow^* で、推移的閉包を \rightarrow^+ と書く。 n ステップの書換えを \rightarrow^n と書く。二つの書換え系列 $A: t \rightarrow^* s$ と $B: s \rightarrow^* u$ を接続して得られる書換え系列 $t \rightarrow^* s \rightarrow^* u$ を $A; B$ で表す。 $s \rightarrow^* t \in NF_R$ のとき、 s は正規形を持つといい、 t を s の正規形という。TRS R が $\leftarrow \cdot \rightarrow^* \subseteq \rightarrow^* \cdot \leftarrow$ を満たすとき、 R は合流性を持つという。

書換え規則 $l \rightarrow r$ は、 l が線形るとき左線形、 r が線形るとき右線形、 l と r が両方とも線形るとき線形という。TRS R のどの書換え規則も左線形(それぞれ、右線形、線形)のとき、 R は左線形(右線形、線形)であるという。書換え規則 $l \rightarrow r$ と $l' \rightarrow r'$ が重なりを持つとは、 $s \notin X$ と $l\sigma \equiv s\sigma'$ を満たす l' の変数でない部分項 s と代入 σ, σ' が存在することをいう。特に、 $s \equiv l'$ のとき、根で重なるという。TRSのどの規則同士も根でない重なりを持たないとき、そのTRSはオーバーレイであるという。

t の位置 p のリデックスの、書換え $A: t \xrightarrow{(q,l \rightarrow r)} s$ に関する子孫 p/A は、以下のように定義される[6]。

$$p/A = \begin{cases} \{p\} & p||q \text{ or } p < q \text{ のとき} \\ \{qp_3p_2 \mid l|_{p_1} \equiv r|_{p_3}\} & \exists p_1, p_2 (p = qp_1p_2 \wedge p_1 \in \text{VPos}(l)) \text{ のとき} \\ \emptyset & \text{それ以外} \end{cases}$$

これはリデックスの位置の集合や書換え系列に対しても自然に拡張できる。 $P/A = \bigcup_{q \in P} q/A$ 。書換え系列 B について、 $P/(A; B) = (P/A)/B$ で与えられる。

定義 1 R をTRSとすると、次の二つの性質を満たす関係 \rightarrow_c を R の戦略と呼ぶ。

- (a) $\rightarrow_c \subseteq \rightarrow_R$
- (b) $NF_R = NF_{\rightarrow_c}$ 。

戦略 \rightarrow_c が、次の性質をもつとき、これを完全な戦略という。

- (c) $t \xrightarrow{*}_R u \in NF_R$ ならば $t \xrightarrow{*}_c u$ 。

3 (強) オーバレイ TRS の性質

本論文では一般には合流性を持たないオーバーレイ TRS について議論するので、リデックスに適用できる規則が複数存在して異なる項が得られる可能性がある。そこで、子孫の概念を位置だけでなく、リデックスの位置と書換え規則の対についても自然に拡張する。すなわち、リデックスの位置と書換え規則の対の集合 D について、 $D/A = \{(q, e) \mid q \in p/A, (p, e) \in D\}$ と定義する。

以下で用いる概念である、並列書換えを準備する。 s の互いに並列な位置にある(0個以上の)リデックスを書換えて t が得られるとき、 s は t に並列書換えされるといい、 $s \dashrightarrow t$ と書く。特に、書換えたリデックスの位置と書換えに用いた規則を $D = \{(p_1, e_1), \dots, (p_n, e_n)\}$ のように明示して、 $s \dashrightarrow_D t$ と書く。

直交なTRSではよく知られている並列書換えの補題(Parallel Moves Lemma[6]の補題2.4)は、オーバーレイ TRS に対して拡張できる。

補題 2 R を左線形オーバーレイ TRS とする。書換え系列 $A_1: s \dashrightarrow_{D_1} t_1$ 、 $A_2: s \dashrightarrow_{D_2} t_2$ とする。このとき、任意の $(p, e_1) \in D_1$ と $(p, e_2) \in D_2$ について $e_1 = e_2$ であるならば、項 u が存在して $t_1 \dashrightarrow_{D_2/A_1} u$ かつ $t_2 \dashrightarrow_{D_1/A_2} u$ 。

次に、強オーバーレイ TRS を定義しその性質を述べる。

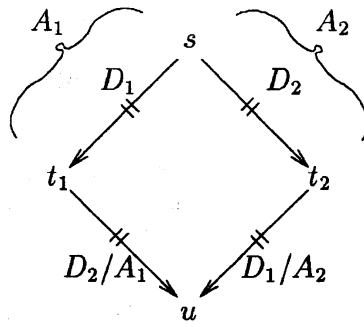


図 1: 並列書換えの補題

定義 3 TRS R のどの二つの書換え規則も、重なりがあるならば左辺が変数の名前替えのもとで等しいとき、その R は強オーバーレイ性を持つという。

強オーバーレイ TRS は、明らかに次の性質を持つ。

補題 4 R を強オーバーレイ TRS、 $l \rightarrow r \in R$ とし、書換え系列 $A: C[u]_p \xrightarrow{*} C'[l\sigma]_q$ を考える。このとき、 u がリデックスで、かつ、 $q \in p/A$ ならば、 $u \equiv l\theta$ を満たす代入 θ が存在する。

4 並列最外戦略の完全性

項 t 中のリデックス t_p は、 p より上にリデックスを持たないとき、最外リデックスであるという。項中のすべての最外リデックスを一度に書換える戦略を並列最外戦略といい、 \rightarrow_{PO} と書く。本節では、並列最外戦略の完全性について述べる。

補題 5 R を線形なオーバーレイ TRS、 t_p をリデックスとし、書換え系列 $A: t \xrightarrow{n} s \in NF$ 、 $B: t \xrightarrow{(p,e)} t'$ を考える。このとき、次の (1) と (2) が成立する

- (1) 書換え系列 A 中で p の子孫が e で書換えられているならば、書換え系列 $A': t' \xrightarrow{\leq n} s$ が存在する。
- (2) 書換え系列 A 中で p の子孫が書換えられていないならば、書換え系列 $A': t' \xrightarrow{\leq n} s$ が存在する。

証明 $n(\geq 1)$ に関する帰納法により示す。 $A_1: t \xrightarrow{(q,d)} u$ 、 $C: u \xrightarrow{n-1} s$ と書ける。補題 2 より、 $A'_1: t' \xrightarrow{D_{A'_1}} u'$ 、 $B': u \xrightarrow{D_{B'}} u'$ である。ここで、 $D_{A'_1} = (q,d)/B$ 、 $D_{B'} = (p,e)/A_1$ 。右線形性より、 $D_{A'_1}$ と $D_{B'}$ の要素数はそれぞれ高々 1 である。

- (1) $D_{B'} = \emptyset$ のとき、 $p = q$ かつ $e = d$ であり、 $D_{A'_1} = \emptyset$ 。すなわち、 $t' \equiv u \equiv u'$ 。よって、 A' として C を取ることで題意が成り立つ。
 そうでないとき、 $B': u \xrightarrow{(p',e)} u'$ と書け、 p' の子孫は C 中で書換えられている。また、 u は正規形でないので、 $n > 1$ である。よって、帰納法の仮定により $C': u' \xrightarrow{\leq n-1} s$ が得られる。よって、 A' として $A'_1; C'$ と取ることで題意が成り立つ。
- (2) $D_{B'} = \emptyset$ のとき、 A' として $A'_1; C$ を取ることで、題意が成り立つ。
 そうでないとき、 $B': u \xrightarrow{(p',e)} u'$ と書け、 p' の子孫は C 中で書換えられていない。また、 u は正規形でないので、 $n > 1$ である。よって、帰納法の仮定により $C': u' \xrightarrow{\leq n-1} s$ が得られる。よって、 A' として $A'_1; C'$ と取ることで題意が成り立つ。 \square

定理 6 R を線形な強オーバレイ TRS とするとき、並列最外戦略は完全な戦略である。

証明 $A : t \xrightarrow{n} s \in NF$ ならば $t \xrightarrow{*}_{PO} s$ であることを、 n に関する帰納法で証明する。

t が正規形ならば明らかに成立するので、正規形でない場合を考え、 t 中のすべての最外リデックスを明示して $t \equiv t[t_1, \dots, t_m]_{p_1, \dots, p_m}$ と書く。

s が正規形であることから、 p_1 から p_m の子孫のうち少なくとも一つは A 中で書換えられている。これを p_k とする。書換え系列 A 中で p_k の子孫が e を用いて書換えられたとすると、補題 4 より同じ規則が t_k に適用でき、 $t \xrightarrow{(p_k, e)} t[\dots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \dots]_{p_1, \dots, p_m}$ と書換えられる。補題 5(1)

より、 $t[\dots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \dots]_{p_1, \dots, p_m} \xrightarrow{<n} s$ が得られる。

これによって得られる系列について、同様に補題 4 と補題 5(1), (2) を各 i ($1 \leq i \leq m, i \neq k$) について繰り返し適用することにより、 $t \xrightarrow{PO} t[t'_1, \dots, t'_m]_{p_1, \dots, p_m} \xrightarrow{<n} s$ が得られる。帰納法の仮定より $t[t'_1, \dots, t'_m]_{p_1, \dots, p_m} \xrightarrow{*}_{PO} s$ であることから、定理が示された。□

5 必須戦略の完全性

本節では、強逐次戦略 [6] の拡張である強必須戦略 [4] と、NV 逐次戦略 [14] を拡張した NV 必須戦略 [4] の完全性を与える。

TRS の必須リデックスの概念は、オーバレイの場合にもそのまま定義できる。以下の必須リデックスの定義は、文献 [4] に基づくものである。まず、特別な関数記号 \bullet を導入する。以下では、シグネチャ F には \bullet が含まれていないとし、特に表示しない限り TRS や項は \bullet を含まないとして話を進める。 $R_\bullet = R \cup \{\bullet \rightarrow \bullet\}$ は、 $F \cup \{\bullet\}$ 上の TRS である。このとき、 $NF_{R_\bullet} = NF_R \cap T(F)$ である。

定義 7 R を F 上の TRS とし、 t_p がリデックスである $T(F)$ 項 t を考える。このとき、 $t[\bullet]_p \xrightarrow{*}_R s$ となる $s \in NF_{R_\bullet}$ を持たないとき、 t_p を R -必須リデックス という。

定義より明らかに次の命題が成り立つ。

命題 8 ([4]) R を F 上の TRS とし、 $T(F)$ 項 t の R -必須リデックスが t_p とする。このとき、 t から正規形に至るいかなる書換え系列 $t \xrightarrow{*}_R s \in NF_R$ についても、その中で p の子孫が書換えられている。

定義 9 R と S を TRS とする。このとき、 $\xrightarrow{*}_R \subseteq \xrightarrow{*}_S$ かつ $NF_R = NF_S$ ならば、 S は R の近似 TRS であるという。

定義 10 R を TRS とする。

- (a) R の各々の書換え規則の右辺をその左辺に出現しない変数に置き換えて得られる TRS を強近似 TRS といい、 R_s と書く。 R_s -必須リデックスを書換える戦略を強必須戦略 \rightarrow_{SS} という。
- (b) R の各々の書換え規則の右辺中の変数を、それぞれその左辺に出現しない相異なる変数に置き換えて得られる TRS を NV 近似 TRS といい、 R_{nv} と書く。 R_{nv} -必須リデックスを書換える戦略を NV 必須戦略 \rightarrow_{NVs} という。

定義より明らかに次の命題が成り立つ。

命題 11 R_s -必須リデックスは、 R_{nv} -リデックスである。また、 R_{nv} -リデックスは、 R -リデックスである。

補題 12 R を左線形オーバレイ TRS、 $A : t \xrightarrow{*}_R s \in NF_R$ とするとき、 t の R_{nv} -必須リデックスは A 中でコピーされない。

証明 t の R_{nv} -必須リデックス $t|_p$ が $A : t \xrightarrow{*}_R s$ 中でコピーされると仮定する。 R_{nv} では書換え規則の右辺の変数は左辺に現れないことから、 $t[\bullet]_p \xrightarrow{*}_{R_{nv}} s$ となり、 $t|_p$ が R_{nv} -必須リデックスであることに矛盾する。 \square

命題 11 より、補題 12 は R_s -必須リデックスについても成立する。

次に、本論文中で帰納法に用いるための、二つの並列書換え系列の間の無限減少列のない測度を定義する。

$$A : s_0 \xrightarrow{D_1} s_1 \xrightarrow{D_2} \cdots \xrightarrow{D_n} s_n, \quad B : t_0 \xrightarrow{E_1} t_1 \xrightarrow{E_2} \cdots \xrightarrow{E_m} t_m$$

とする。このとき、 $n > m$ であるか、あるいは、 $n = m$ かつ次の条件が成り立つ $j (1 \leq j \leq n)$ が存在するとき、 $|A| >_M |B|$ である。

$$|D_j| > |E_j|, \text{ かつ、すべての } k (j < k \leq n) \text{ について } |D_k| = |E_k|$$

補題 13 R を左線形なオーバーレイ TRS、 $t|_p$ を R_{nv} -リデックスとし、書換え系列 $A : t \xrightarrow{*} s \in NF$ 、 $B : t \xrightarrow{(p,e)} t'$ を考える。このとき、書換え系列 A 中で p の子孫が e で書換えられているならば、 $|A| >_M |A'|$ を満たす書換え系列 $A' : t' \xrightarrow{*} s$ が存在する。

証明 $t \xrightarrow{n} s$ のステップ数 $n (\geq 1)$ に関する帰納法により示す。 $A_1 : t \xrightarrow{D_{A_1}} u$ 、 $C : u \xrightarrow{n-1} s$ と書ける。補題 2 より、 $A'_1 : t' \xrightarrow{D_{A'_1}} u'$ 、 $B' : u \xrightarrow{D_{B'}} u'$ である。ここで、 $D_{A'_1} = D_{A_1}/B$ 、 $D_{B'} = (p,e)/A_1$ 。

補題 12 より、 $D_{B'}$ の要素数は高々 1 である。

$D_{B'} = \emptyset$ のとき、 $(p,e) \in D_{A_1}$ であるので、 $D_{A'_1} = D_{A_1} - (p,e)$ 。よって、 A' として $A'_1; C$ をとることにより題意が成り立つ。

そうでないとき、 $B' : u \xrightarrow{(p',e)} u'$ と書け、 p' の子孫は C 中で書換えられている。また、 u は正規形でないので、 $n > 1$ である。よって、帰納法の仮定から $|C| >_M |C'|$ を満たす $C' : u' \xrightarrow{n-1} s$ が得られる。よって、 A' として $A'_1; C'$ と取ることにより題意が成り立つ。 \square

定理 14 R を左線形な強オーバーレイ TRS とする。このとき次の (a) と (b) が成り立つ。

- (a) R が強必須系ならば、強必須戦略 \rightarrow_{SS} は完全である。
- (b) R が NV 必須系ならば、 NV 必須戦略 \rightarrow_{NVs} は完全である。

証明 (a) についてのみ証明を与えるが、(b) の証明も全く同様に行える。 $A : t \xrightarrow{*} s \in NF$ ならば $t \xrightarrow{SS} s$ であることを、 $>_M$ を用いた帰納法で証明する。

t が正規形ならば明らかに成立するので、正規形でない場合を考える。 R は強必須系なので、 t 中に強必須リデックス $t|_p$ が存在する。また、命題 8 と命題 11 より、 p の子孫は A 中で書換えられている。補題 4 より同じ規則が $t|_p$ に適用でき、 $t \xrightarrow{(p,e)} t'$ と書換えられる。補題 13 より、 $|A| >_M |A'|$ を満たす $A' : t' \xrightarrow{*} s$ が得られる。

帰納法の仮定より $t' \xrightarrow{SS} s$ であることから、定理が示された。 \square

謝辞

本研究は一部、科研費 #15500007 ならびに、IMI COE の補助を受けている。

参考文献

- [1] S. Antoy and A. Middeldorp, A Sequential Reduction Strategy, *Theoretical Computer Science*, 165(1), 1996, pp.75–95.
- [2] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.
- [3] H. Comon, Sequentiality, Monadic Second Order Logic and Tree Automata, *Information and Computation*, 157, 2000, pp.25–51.
- [4] I. Durand and A. Middeldorp, Decidable Call by Need Computations in Term Rewriting (Extended Abstract), Proc. of the 14th Int. Conf. on Automated Deduction (CADE'97), LNAI, 1249, 1997, pp.4–18.
- [5] G. Huet, Confluent Reductions: Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems, *Journal of the ACM*, 27, 1980, pp.797–821.
- [6] G. Huet and J.-J. Lévy, Computations in Orthogonal Rewriting Systems, I and II, in *Computational Logic, Essays in Honor of Alan Robinson*, The MIT Press, 1991, pp.396–443. Precious version: Call-by-Need Computations in Non-Ambiguous Linear Term Rewriting Systems, Rapport INRIA, 359, 1979.
- [7] J.M. Hullot, Canonical Forms and Unification, Proc. of the 5th Conf. on Automated Deduction (CADE'80), LNCS, 87, 1980, pp.318–334.
- [8] J.R. Kennaway, Sequential Evaluation Strategies for Parallel-Or and Related Reduction Systems, *Annals of Pure and Applied Logic*, 43, 1989, pp.31–56.
- [9] J. W. Klop, Term Rewriting Systems, in *Handbook of Logic in Computer Science*, ed. Abramsky et al., Oxford University Press, 1992.
- [10] T. Nagaya, M. Sakai and Y. Toyama, NVNF-Sequentiality of Left-Linear Term Rewriting Systems, RIMS Technical Report, 918, 1995, pp.109–117.
- [11] N. Nishida, M. Sakai and T. Sakabe, Generation of Inverse Term Rewriting Systems for Pure Treeless Functions, The International Workshop on Rewriting in Proof and Computation (RPC'01), Sendai, Japan, October 25-27, 2001, pp.188–198.
- [12] N. Nishida, M. Sakai and T. Sakabe, Generation of a TRS Implementing the Inverses of the Functions with Specified Arguments Fixed, Technical Report of IEICE, COMP2001-67, 2001, pp.33–40.
- [13] N. Nishida, M. Sakai and T. Sakabe, Narrowing-based Simulation of Term Rewriting Systems with Extra variables and its Termination Proof, Proc. of 12th Int'l Workshop on Functional and (Constraint) Logic Programming (WFLP'03), Valencia, Spain, 2003, pp.198–211.
- [14] M. Oyamaguchi, NV-Sequentiality: A Decidable Condition for Call-by-Need Computations in Term Rewriting Systems, *SIAM Journal on Computing*, 22(1), 1993, pp.114–135.
- [15] M. Sakai, K. Okamoto and T. Sakabe, Innermost Reductions Find All Normal Forms on Right-Linear Terminating Overlay TRSs, Proc. of 3rd Int'l Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming (WRS'03), Valencia, Spain, 2003, pp.79–88.
- [16] Y. Toyama, Strong Sequentiality of Left-Linear Overlapping Term Rewriting Systems, The 7th annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 1992, pp.274–284.