数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 163-170

ASSOCIATOR AND DOUBLE SHUFFLE RELATION

寺杣 友秀 (Tomohide Terasoma)
東大数理 (University of Tokyo)

1. Introduction

n を自然数とし、$k_1,\ldots,k_n$ を 1 以上の整数で k_n のみ 2 以上であるとする。このとき index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ の多重ゼータ値を

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\ldots,k_n)=\sum_{m_1<\cdots<m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

によって定義する。1 form $\omega_1,\ldots,\omega_n$ に対して反復積分を inductive に

$$\int_a^b\omega_1\omega_2\cdots\omega_n=\int_a^b\{\omega_1(x)\int_a^x\omega_2\cdots\omega_n\}$$

と定義すると

$$\zeta(k_1,\ldots,k_n)=\int_0^1\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}\frac{dt}{1-t}\cdot\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}\frac{dt}{1-t}$$
$$\cdots\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}\frac{dt}{1-t}$$

と表される。この積分表示を見ることにより、多重ゼータ値は $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の基本群に入るホッジ構造の周期として捉えることができる。index の異なる多重ゼータ値の間に成り立つ relation の中でいま注目したいのは、Associator relation という関係式と relgularized double shuffle relation といわれるものある。主結果は Associator relation は relularized double shuffle relation を導くというもので、これは Deligne 氏との共同研究の成果である。

ここで Associator relation は $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ を種数 0 の曲線上の 5 点の moduli 空間 $\mathcal{M}_{0,5}$ に何通りかの方法で埋め込むときに現れる関係式であり、regularized double shuffle relation は多重ゼータ値の級数表示をから得られる関係式でありその起源はまったく異なるものである。これに関して予想としては Associator relation でも regularized double shuffle relation と dulaity relation でもすべての関係式を尽くしているというのが確からしいといわれていることを付記しておく。

2. Drinfeld associator と Associator relation

多重ゼータ値の関係式を記述するのにその generating function ともいえる Drinfeld associator を使うのが有用であるので、その復習をしよう。$\mathcal{U}^{DR}=\mathbf{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ を $e_0=Res_0$, $e_1=Res_1$ で生成される非可換巾級数環とする。これには e_0,e_1 で生成される、augmentation ideal と呼ばれる、両側イデアル I

およびその巾による位相が入り、この位相に関して完備である。以下、完備化されたテンソル積を単に$\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}} = \mathcal{U}^{DR} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ 書くことにする。ここで

$$\omega = e_0 \frac{dt}{t} + e_1 \frac{dt}{t-1}$$

を$\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$-valued の 1 form として、$\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の 2 点 p, q 及び p, q を結ぶ path γ に対して、iterated integral

$$\int_{\gamma} \overbrace{\omega\omega \cdots \omega}^{n-\text{times}} \tag{2.1}$$

を同様に定義する。ここで 1 form の値の積としては$\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$ の積を用いた。(2.1) は$\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$ の n 次の斉次の元となるので、

$$\exp(\int_{\gamma} \omega) = 1 + \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} \omega\omega + \int_{\gamma} \omega\omega\omega + \cdots$$

は$\mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}}$ の元として well defined である。またこれは path の合成に関して乗法的である。すなわち p, q および q, r を結ぶ path δ, γ に対して $\exp(\int_{\gamma\delta} \omega) = \exp(\int_{\gamma} \omega) \cdot \exp(\int_{\delta} \omega)$ となる。これは基点 p, q が一致している場合には基本群の群環の準同型の言葉でいえる。一致していない場合にも一般的に考えたいので groupoid の記述法を導入することにする。群から群環を作ったのと同じ仕方で goupoid の $\mathbf{Q}$-線型結合をとると、環のようなものができる。ただし a の始点と b の終点が一致している時のみ、その積 ab が定義できる。このような代数体系を algebroid とよぶ。すなわち、集合 S 上の algebroid $\mathcal{U}$ とは $p, q \in S$ で index 付けされたベクトル空間 $\mathcal{U}_{p,q}$ の族とその上の結合法則、分配法則を満たす算法の族 $\mathcal{U}_{q,r} \times \mathcal{U}_{p,q} \to \mathcal{U}_{p,r}$ であって、次の条件を満たすものである。(1) 環 $\mathcal{U}_{p,p}$ は単位元をもつ。(2) $\mathcal{U}_{p,q}$ は環 $\mathcal{U}_{q,q}$ 上の左加群とみて rank 1 free module である。集合 S_1, S_2、写像 $f : S_1 \to S_2$ 及び S_1, S_2 上の algebroid $\mathcal{U}_1$ $\mathcal{U}_2$ が与えられた時、f 上の homomorphism $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ とは linear map $\varphi_{p,q} : \mathcal{U}_{1,p,q} \to \mathcal{U}_{2,f(p),f(q)}$ の族で、$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ のそれぞれの積構造と compatible となるものの事である。

空間 X からその fundamental groupoid(二つの点 p, q を結ぶ path の homotopy 類からできる groupoid) をとってそこからつくられた algebroid を X の fundamental algebroid という。これには de Rham relaization と Hodge realization がある。そして、それらの algebroid は itereated integral を用いて比較することができる。$\mathbf{Q}[\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, p, q)]$ およびその augmentation ideal による完備化 $\mathcal{U}^B = \mathbf{Q}[\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, p, q)]\,\hat{}$ は集合 $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上の algebroid となる。また$\mathcal{U}^B_{\mathbf{C}}$ をその $\mathbf{C}$ への完備化テンソル積とすると、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}^B_{\mathbf{C}} & \to & \mathcal{U}^{DR}_{\mathbf{C}} \\ \gamma & \mapsto & \exp \int_{\gamma} \omega \end{array}$$

は algebroid の同型を引き起こす。

さて Drinfeld associator を特殊な path およびその極限をとるという操作により定義する。 t, u を十分小さい実数として t と $1-u$ を結ぶ path $[t, 1-u]$ を考える。

Proposition 2.1. 次の極限が存在する。

$$\Phi_{DR}(e_0,e_1)=\lim_{t,u\to 0}\exp(-\log ue_1)\cdot\exp\int_{[t,1-u]}\omega\cdot\exp(\log te_0)$$

上の極限を Drinfeld associator という。Drinfeld associator における $e_0^{k_n-1}e_1e_0^{k_{n-1}-1}e_1\dots e_0^{k_1-1}e_1$ の係数は $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ で与えられることがわかる。また一般に e_1 出始まるか、あるいは e_0 で終る word $\mathbf{w}=w_1w_2\dots w_n$ についても $e_{w_1}e_{w_2}\cdots e_{w_n}$ の係数は weight が n の多重ゼータ値で表されることが知られている。これは Drinfeld associator Φ_{DR} が group like であり、$\Phi_{DR}(e_1,0)=1$ であることから導かれる事実である。

この極限操作は、一般的な定義はここでは与えないが、tangential base point を使い定式化される。つまり $0,1$ に無限に近い base points $\vec{01},\vec{10}$ が定まり、その点を結ぶ path の homotopy 類の集合を $Path_{\vec{01},\vec{10}}=Path(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\},\vec{01},\vec{10})$ とおくと、その $\mathbf{Q}$ 上の一次結合のある filtration による完備化を $\mathbf{Q}[[Path_{\vec{01},\vec{10}}]]$ と書くと、上の極限操作は $\mathbf{Q}[[Path_{\vec{01},\vec{10}}]]$ の $\mathbf{C}$ 上の完備化テンソル積から $\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}$ への同型

$$\mathbf{Q}[[Path_{\vec{01},\vec{10}}]]\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}\to\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}$$

を導く。そしてこの同型における $[0,1]$ の像が Drinfeld associator である。

Drinfeld associator Φ_{DR} の満たす relation について述べよう。

1. Φ_{DR} の定義と iterated integral の乗法性から

$$\Phi_{DR}(e_0,0)=1,\Phi_{DR}(e_1,e_0)=\Phi_{DR}(e_0,e_1)^{-1}$$

がわかる。

2. iterated integral に関する shuffle relation を書き直せば、

$$\Delta(\Phi_{DR}(e_0,e_1))=\Phi_{DR}(e_1,e_0)\otimes\Phi_{DR}(e_1,e_0)$$

を得る。ここで Δ は $\Delta(e_i)=e_i\otimes 1+1\otimes e_i\ (i=0,1)$ なる環準同型 $\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}\to\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}\otimes\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}$ である。言い換えれば Φ_{DR} が group like element であるという事である。

3. $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ のなかの上半平面のみを通り $0,1,\infty$ の近くをまわる path が可縮であることから来る関係式。(これは 6 項関係式と呼ばれる。)

$$\Phi_{DR}(e_\infty,e_0)e^{\frac{1}{2}e_\infty}\Phi_{DR}(e_1,e_\infty)e^{\frac{1}{2}e_1}\Phi_{DR}(e_0,e_1)e^{\frac{1}{2}e_0}=1$$

4. 5 項関係式と呼ばれる関係式。これを述べるためには rational curve 上の異なる 5 点の moduli space $\mathcal{M}_{0,5}$、その stable compactification である $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$、および $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ を $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ の boundary の tubler neighbourhood へ埋め込むことを考察しなくてはならない。Boundary $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}-\mathcal{M}_{0,5}$ は 10 個の $\mathbf{P}^1$ と同型な irreducible component からなり、それぞれの component は 5 点を $p_1,\dots,p_5$ としたとき、$p_i=p_j$ となる点の配置からなる。対応する component を l_{ij} と書くことにする。いま $\mathcal{M}_{0,5}$ の $\mathbf{R}$-valued point $\mathcal{M}_{0,5}(\mathbf{R})$ のひとつの connected component P をとると、P の boundary は 5 つの boundary component に含まれる。この boundary component は $\{1,\dots,5\}$ のひとつの cyclic ordering を定める。これに対して $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ "infinitesimal" な埋め込みが 5 つ定まる。たとえば

l_{ij} が boundary component のひとつであるとすると、$\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ を l_{ij}^0 の tubler neibourhood に埋め込むことにより fundamental algebroid の準同型

$$\mathbf{Q}[[Path^B(l_{ij}^0)]] \to \mathbf{Q}[[Path^B(\mathcal{M}_{0,5})]]$$

が誘導される。de Rham fundamental algebroid についても infinitesimal inclusion が同様の準同型を誘導する。

$$\mathbf{Q}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \to \mathcal{U}^{DR}(\mathcal{M}_{0.5}) = \mathbf{Q}\langle\langle e_{ij}\rangle\rangle_{1\le i<j\le 5}$$

ここで $\mathcal{U}^{DR}(\mathcal{M}_{0,4})$ は $e_{ij}=e_{ji}$ $(1\le i<j\le 5)$ で生成される完備な非可換環で、それらの間の関係式は $[e_{ij}+e_{jk}, e_{ik}]=0$ $(i,j,k$ は全て異なる$)$ で与えられる。

この"infinitesimal inclusion" と comparizon map の compatibility からくる relation が 5 項関係式である。例えば cyclic ordering $(1,2,3,4,5)$ に対する relation は

$$\Phi_{DR}(e_{23},e_{12})\Phi_{DR}(e_{51},e_{45})\Phi_{DR}(e_{34},e_{23})\Phi_{DR}(e_{12},e_{51})\Phi_{DR}(e_{45},e_{34})=1$$

である。

Definition 2.2. $\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}$ *の* 1 *で始まる元* $\Phi=\Phi(e_0,e_0)$ *が (1)〜(4) の relation を満すとき、*Φ *を associator という。*

(1)〜(4) は Φ の係数に関する relation とみなせる。この relation を associator relation という。Associator を $\Phi=\sum_{\mathbf{w}=(w_1,\dots,w_n)} c_{\mathbf{w}} e_{w_1}\cdots e_{w_n}$ と表すとき、一般の $\mathbf{w}$ の係数 $c_{\mathbf{w}}$ は e_0 で始まり e_1 で終る word の係数の $\mathbf{Q}$-linear combination で書かれることが (1),(2) の関係式からわかる。

Associator の集合を algebroid の言葉で言い替えることができる。いま $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$, $\mathcal{M}_{0,5}$ の infinitesimal base point の集合を $|\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}|$, $|\mathcal{M}_{0,5}|$ とする。例えば、

$$|\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}| = \{\overrightarrow{10}, \overrightarrow{01}, \overrightarrow{1\infty}, \overrightarrow{\infty 1}, \overrightarrow{0\infty}, \overrightarrow{\infty 0}\}$$

である。$*=DR,B$ として infinitesimal inclusion に対して

$$\mathcal{U}^*(l_{ij}^0) \to \mathcal{U}^*(\mathcal{M}_{0,5})$$

がそれぞれ定義される。

Proposition 2.3. *Associator を与えることと、二つの comparizon map と呼ばれる algebroid の同型*

$$c_4 : \mathcal{U}_{\mathbf{C}}^B(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}) \to \mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\})$$
$$c_5 : \mathcal{U}_{\mathbf{C}}^B(\mathcal{M}_{0,5}) \to \mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}(\mathcal{M}_{0,5})$$

で以下の条件を満すものを与えることは同値である。

1. *c_i は augmentation と compatible な Hopf algebra の同型である。*
2. *infinitesimal base point の近くの local monodromy e_i は compatible*
3. *(de Rham, Betti のそれぞれに関する) infinitesimal inclusion に関して compatible*

4. c_4 の *abel*化

$$\mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{B}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})^{ab} \to \mathcal{U}_{\mathbf{C}}^{DR}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})^{ab}$$

で $[0,1]$ の像は 1 となる。

Proposition 2.3 から、associator Φ が与えられると category

$$\begin{aligned} Vec_{\mathbf{Q}} \otimes_{Vec_{\mathbf{C}}} Vec_{\mathbf{Q}} = \{(V^B, V^{DR}, comp) \mid & \\ & V^B, V^{DR} \text{ は } \mathbf{Q} \text{ 上のベクトル空間}, \\ & comp : V^B \otimes \mathbf{C} \simeq V^{DR} \otimes \mathbf{C} \text{ は同型 } \} \end{aligned}$$

内の algebroid object $\mathcal{U}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})$, $\mathcal{U}(\mathcal{M}_{0,5})$ および infinitesimal inclusion に対する algebroid 間の写像が定まることが結論される。

3. Regularized double shuffle relation

iterated integral に関する shuffle relation を用いると二つの多重ゼータ値の積が多重ゼータ値の $\mathbf{Q}$-linear combination に表されることを述べた。例えば、

$$\zeta(2)\zeta(2) = 4\zeta(1,3) + 2\zeta(2,2) \tag{3.1}$$

というような関係式がある。一方 $\zeta(2)$ の級数展開を使うと

$$\begin{aligned} \zeta(2)\cdot\zeta(2) =& \sum_n \frac{1}{n^2} \cdot \sum_m \frac{1}{m^2} \\ =& 2\sum_{n<m} \frac{1}{n^2m^2} + \sum_n \frac{1}{n^4} \\ =& 2\zeta(2,2) + \zeta(4) \end{aligned} \tag{3.2}$$

となり、等式 (3.1) と (3.2) より

$$4\zeta(1,3) = \zeta(4) \tag{3.3}$$

なる関係式が得られる。このタイプの関係式を double shuffle relation という。double shuffle relation により、たくさんの関係式が得られるが、このままでは予想される関係式の全てが得られるわけではない。double shuffle relation は $\zeta(1)$ のような発散級数に対しても、Zagier, Boutet de Monvel の定理を使うことにより、regularized double shuffle relation という関係式に拡張される。これまでの実験結果によると、regularized double shuffle relation は全ての relation を尽していると予想される。

この regularized double shuffle relation の Racinet による定式化を与える。Drinfeld associator Φ_{DR} を $\Phi_{DR}(e_0, e_1) = 1 + \varphi_1 e_1 + \varphi_0 e_0$ と表し、$\Phi_{DR,Y} = 1 + \varphi_1 e_1$ と定義する。このとき $y_i = -e_0^{i-1}e_1$ $(i = 1, 2, \dots)$ とおくと

$$\Phi_{DR,Y} \in \mathbf{Q} + \mathbf{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle e_1 = \mathcal{W} = \mathbf{C}\langle\langle y_1, y_2, \dots\rangle\rangle$$

となる。

Definition 3.1 (Harmonic coproduct). *Harmonic coproduct* Δ_* なる環準同型

$$\Delta_* : \mathcal{W} \to \mathcal{W} \otimes \mathcal{W}$$

を $\Delta(y_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i \otimes y_{n-i}$ によって定義する。ここで $y_0 = 1$ と定義する。

Proposition 3.2 (Racinet). $\Phi^{reg}_{DR,Y} = \Phi^{reg}_{DR,Y}(y_1, y_2, \ldots)$ を

$$\Phi^{reg}_{DR,Y} = (e^{\gamma y_1}\Gamma(1+y_1))^{-1}\Phi_Y$$

で定義する。このとき

$$\Delta_*(\Phi^{reg}_{DR,Y}) = \Phi^{reg}_{DR,Y} \otimes \Phi^{reg}_{DR,Y}$$

が成立する。

上の relation を harmonic shuffle relation という。この harmonic shuffle relation と iterated integral の shuffle relation をあわせるて得られる関係式が double shuffle relation である。

4. Main Theorem

これまで二つの多重ゼータ値に関する関係式を述べてきた。ひとつは associator relation でもうひとつは harmonic shuffle relation である。両方とも多重ゼータ値の generating function である Drinfeld associator Φ_{DR} に関する式としてあらわされる。この報告で述べたいことは勝手な associator Φ が harmonic shuffle relation を満す、ということである。ひとつ特筆すべき点は、harmonic shuffle relation には $\Gamma'(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ なる factor が現れる事である。この factor も与えられた associator Φ に準じておきかえなければならない。ここで 1 から始まるり、1 次の項が消えているべき級数 $\Gamma'(u)$ は Drinfeld associator を使うと $\Phi_{DR,Y}$ の $\mathcal{U}^{DR,ab}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}[[e_0, e_1]]$ における image が $(\Gamma'(e_0)\cdot\Gamma'(e_1))/\Gamma'(e_0+e_1)$ となることにより特徴付けられていることに注意しよう。

一般に Associator

$$\Phi = 1 + \varphi_0 e_0 + \varphi_1 e_1 \in \mathbf{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$$

に対して、$\Phi_Y = 1 + \varphi_1 e_1$ とおくと $\Phi_Y \in \mathbf{C}\langle\langle y_1, y_2, \ldots\rangle\rangle$ である。

Theorem 4.1. Φ^{ab}_Y を Φ_Y の $\mathcal{U}^{DR,ab}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}[[e_0, e_1]]$ における像とする。このとき次の二つが成り立つ様な $\Gamma'_\Phi(u)$ が *unique* に存在する。

1.
$$\Phi^{ab}_Y = \frac{\Gamma'_\Phi(e_0)\cdot\Gamma'_\Phi(e_1)}{\Gamma'_\Phi(e_0+e_1)}$$

2.
$$\Gamma'_\Phi(u) \equiv 1 \ mod\ I^2$$

実はこの定理は motivic な意味で証明できる。Galois version に関する同様の定理は伊原康隆氏によっても得られていることを注意しておく。

Theorem 4.2 (Main Theorem). $\Gamma'_\Phi(u)$ を *Theorem 4.1* で与えられた巾級数とする。$\Phi^{reg}_Y = \Gamma'_\Phi(y_1)^{-1}\Phi_Y$ とおくと、

$$\Delta_*(\Phi^{reg}_Y) = \Phi^{reg}_Y \otimes \Phi^{reg}_Y$$

が成り立つ。

証明の概略は次のようなものである。Associatorが与えられると $\mathcal{M} = Vec_{\mathbf{Q}} \times_{Vec_{\mathbf{C}}} Vec_{\mathbf{Q}}$ における algebroid objects $\mathcal{U}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}), \mathcal{U}(\mathcal{M}_{0,5})$ および inifinitesimal inclusion から誘導される algebroid の homomorphisms が定義できた。$\mathcal{M}$ は abel 圏であるのみならず tensor 積、innter homomorphism などが定義されている Tannaka 圏をなしている。とくにその fiber functor として、$(V^B, V^{DR}, comp)$ に対して V^B (V^{DR}) を対応させるもの、すなわち Betti (de Rham) realization がある。これらをもとに、algebroid 上の加群、すなわち $\mathcal{M}$ の $\mathcal{U}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})$-module object の概念が定義される。さらに、algebroid object の homomorphism $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ および $\mathcal{U}_1$-module $\mathcal{F}$ に対して higher direct image に対応する、algebroid の relative cohomology が定義される。これらは単に群の cohomology を $\mathcal{M}$ の中で書換えたものである。さらに少し微妙な点を含んでいるが、定義されるものとして、constructible sheaf, perverse sheaf, vanishing cycle がある。これらの概念を組合せて multiplicative convolution を定義し、はじめにしめした Gamma 関数を用いて、Fourier 変換を定義する。この二つをもちいて新たな fiber functor を用い、定理を示すことになる。

4.1. **Harmonic coproduct.** この章の内容に関しては、最近えられたことなので、もしかしたら、間違いを含んでいるかもしれません。Harmonic coproduct の構造をみてみよう。まず $u \in \mathbf{C}$ として $g_u = 1 + uy_1 + u^2y_2 + \dots$ は Δ_* に関して group like であることがわかる。したがって $l_u = uy_1 + u^2y_2 + \dots$ とおくと、

$$\begin{aligned} \log l_u &= l_u - \frac{1}{2}l_u^2 + \frac{1}{3}l_u^3 + \cdots \\ &= uT_1 + u^2T_2 + u^3T_3 \cdots \end{aligned} \tag{4.1}$$

となる。ここで

$$T_p = y_p - \frac{1}{2}\sum_{i+j=p} y_iy_j + \frac{1}{3}\sum_{i+j+k=p} y_iy_jy_k + \cdots \pm \frac{1}{p}y_1^p$$

である。(4.1) を u に関して何回が微分して、0 を代入することにより、T_p は Lie like element となる。実際 abel 化 $\mathcal{W}^{ab} = \mathbf{C}[[c_1, c_2, \dots]]$ $(y_i^{ab} = c_i)$ での T_p の imaget_p は c_i を elementary symmetric function としたときの、power sum symmetric function に対応している。$\mathcal{W}$ は T_p で生成される free associative algebra となる。このことから degree $p \geq 3$ の Lie like な homogeneous element は y_i に関して degree 3 を modulo して、

$$\theta_p(a_p, a_{ij}) = a_pT_p + \sum_{i<j, i+j=p} a_{ij}[y_i, y_j]$$

の形に書かれる。さらに

$$\Delta : \mathcal{U}/e_0 \to (\mathcal{U}/e_0) \otimes (\mathcal{U}/e_0)e_i \mapsto e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$$

によって Δ を定めると、$\Delta(\theta(1, a_{ij})) = 0$ なる条件を課すと、(本来は $\theta(1, a_{ij}) \mp \frac{1}{p}y_1^p$ を考えるべきだが y-degree 3 は簡単のため、modulo している。) a_{ij} が unique にさだまることがわかる。これを $\overline{\theta_p}$ と書くと,$\mathcal{U}$ への $\overline{\theta}$ の lifting $\theta_p \in \mathcal{U}$ であって

$$\Delta(\theta_p) = \theta_p \otimes 1 + 1 \otimes \theta_p$$

となるものが unique に定まる。さらに θ による Ihara bracket が $\mathcal{W}$ の Δ_* の Lie like element を保つという条件を考えると、p は odd でなくてはならい。この θ_p が e_1 に関する degee 3 を modulo とした Soule element の lifting とならなくてはならない。たとえば、(多分知られていることだとは思いますが、計算が正しかったら)

$$\theta_3 = [e_0, [e_0, e_1]] + [e_1, [e_1, e_0]] \quad \text{mod } e_1\text{-degree } 3$$

となる。