

# Orr-Sommerfeld 問題の解に対する計算機援用証明について

A computer assisted proof for the Orr-Sommerfeld problem

中尾 充宏<sup>†</sup>      Michael Plum<sup>‡</sup>      渡部 善隆\*  
 Mitsuhiro T.Nakao      Yoshitaka Watanabe

<sup>†</sup>九州大学大学院数理学研究院 (Faculty of Mathematics, Kyushu University)  
<sup>‡</sup>Faculty of Mathematics, Karlsruhe University  
 \*九州大学情報基盤センター (Computing and Communications Center, Kyushu University)

## 概要

本稿では、2次元平行流の安定特性を記述する非自己共役複素固有値問題である Orr-Sommerfeld 方程式の解の存在に対する計算機援用証明法について述べ、いくつかの検証例を与える。

## 1 非圧縮性粘性流体と基本流の安定性問題

直交  $x$ - $y$  座標で張られる 2次元平面の  $x$  方向無限の平行板 ( $y = y_1, y = y_2$ ) 内に非圧縮性粘性流体が一様に満たされているとする (図 1).

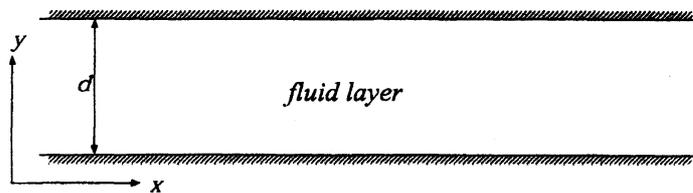


図 1: 無限平行板 (infinite parallel plates);  $d := y_2 - y_1$

この領域において非圧縮性粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式 (1) を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

ここに  $(u, v)$  は速度場,  $p$  は圧力場,  $R$  は流体の粘性度を支配する無次元数である Reynolds 数である。境界条件として  $y = y_1, y_2$  において滑りなしの条件を課す。

支配方程式 (1) を満たす基本流れ (basic flow) として

$$(u, v) = (U(y), 0), \quad p = p_0 + \frac{1}{R} \frac{d^2 U(y)}{dy^2} x, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \quad (2)$$

を取る。ただし  $p_0$  は適当な定数,  $U$  は  $x$  によらず, かつ  $y$  に関して 2 階連続微分可能な関数とする。

次に、基本流れ (2) の安定性を考える。解の成長過程を調べるため基本流れにわずかな変動を加える。 $U := U(y)$ ,  $P := p_0 + 1/R(d^2U(y)/dy^2)$  とおき、基本流れからの摂動を

$$u = U + \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \quad p = P + \hat{p} \quad (3)$$

で表現する。(3) を (1) に代入し、基本流れの大きさに比べて摂動が微小であるとして摂動項同士の積を無視すること (線形化) により、摂動方程式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v} \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta \hat{u}, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta \hat{v}, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

を得る。

## 2 Orr-Sommerfeld 方程式

連続の式 ((4) 第 3 式) を満たすように

$$\hat{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \hat{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

となる流れ関数 (stream function)  $\psi(t, x, y)$  を導入する。(4) の第 1 式, 第 2 式に (5) を代入し, 第 1 式を  $y$  で, 第 2 式を  $x$  でそれぞれ微分し圧力項を消去することで, 以下の式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + U \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + U \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta^2 \psi. \quad (6)$$

流れ関数  $\psi$  に関する境界条件は

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y = y_1, y_2 \quad (7)$$

となる。基本流れ  $(U(y), 0)$  が  $x, t$  に依存しないことから, 摂動を表す流れ関数  $\psi$  は  $x$  方向に進行する振動波と見ることができる。したがって基準モード (normal-mode) の形:

$$\psi = \psi(t, x, y) = \phi(y) e^{ia(x-ct)} \quad (8)$$

に分解する。ここに  $\phi(y)$  は振動の振幅を表す量,  $a > 0$  は波数,  $c$  は波の速度を表現する複素数である。物理的意味からは複素数の実部に注目すればよいことを考慮し,  $c$  を

$$c = c_r + ic_i, \quad c_r, c_i \in \mathbb{R}$$

の形で表現し, Euler の公式を用いて  $e^{ia(x-ct)}$  を展開した実部

$$e^{ac_i t} \cos a(x - c_r t)$$

に注目することで,  $c_r$  は  $x$  方向への波の進行速度 (位相速度) を, また  $ac_i$  は振幅の増幅率を示すことがわかる。また,  $a > 0$  より,  $c_i < 0$  ならば  $\psi$  は減衰するため流れは安定,  $c_i > 0$  ならば  $\psi$  は指数関数的に増幅されるため流れは不安定になることがいえる。

(8) を (6) に代入し  $D := d/dy$  とおくことで

$$\frac{1}{R} (D^2 - a^2)^2 \phi(y) = ia \left[ (U - c)(D^2 - a^2) \phi(y) - \frac{d^2 U}{dy^2} \phi(y) \right] \quad (9)$$

を得る. 境界条件は (7) より

$$\phi = D\phi = 0 \quad y = y_1, y_2 \quad (10)$$

となる. (9) は Orr [3] と Sommerfeld [5] が独立に導いたことから Orr-Sommerfeld 方程式と呼ばれる. また, 境界条件 (10) を課した Orr-Sommerfeld 方程式は固有値  $c$  および固有関数  $\phi$  を求める 1 次元固有値問題となる. この固有値問題を Orr-Sommerfeld 問題と呼ぶ.

次に, (9),(10) を数値的に取り扱いやすい形に書き直す. 変数  $y$  を  $x$  で書き直し,

$$\lambda := iaRc$$

と置くと, Orr-Sommerfeld 問題は

$$\begin{cases} (-D^2 + a^2)^2 u + iaR[U(-D^2 + a^2) + U'']u = \lambda(-D^2 + a^2)u & \text{on } \Omega = [x_1, x_2] \\ u(x_1) = u(x_2) = u'(x_1) = u'(x_2) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

を満たす固有対  $(\lambda, u)$  を求める問題となる\*1.

### 3 平面 Poiseuille 流れの安定性問題

本稿では, 平面 Poiseuille 流れに対する安定性の問題として (11) で特に

$$U = V := 1 - x^2, \quad \Omega = [-1, 1] \quad (12)$$

とした問題を考える. (11) は非自己共役 (non-selfadjoint) な複素固有値問題であり, 基本流の安定性は  $\lambda = iaRc$  より (11) の固有値  $\lambda$  の実部の符号で判定することができる. すなわち,  $\lambda$  の実部が正ならば流れ関数  $\psi$  は減衰するため安定, 負ならば不安定になる. また, (11) の固有値  $\lambda$  の実部が正から負に反転するもっとも小さい  $R$  を臨界 Reynolds 数 (critical Reynolds number) と呼び  $R_c$  と書き, その時の波数  $a$  を  $a_c$  と書く. Orszag[4] は, Chebyshev 多項式による近似計算の結果, (12) の条件の下

$$R_c = 5772.22, \quad a_c \in [1.0255, 1.0257]$$

という数値計算結果を得た. しかしながら,  $R_c, a_c$  の値を含め, Orr-Sommerfeld 問題に関する理論的な結果はこれまでほとんど得られていない.

ここでは,  $a, R > 0$  を動かしながら (11) の複素固有値  $\lambda$  を精度保証付きで計算し, さらに  $\lambda$  の実部を調べ, 正から負に転じる可能性のある  $R$  の範囲を特定するという目標を立てる.

簡単のため

$$\tilde{\Delta} := -D^2 + a^2$$

とおき, (11) を (13) に書き直す.

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 u + iaR(V\tilde{\Delta} + V'')u = \lambda\tilde{\Delta}u & \text{on } \Omega, \\ u(-1) = u(1) = u'(-1) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

さらに, 実数値関数  $v, w$  と実数  $\sigma, \mu$  を用いて  $u, \lambda$  を

$$\begin{cases} u = v + iw, \\ \lambda = \sigma + i\mu \end{cases} \quad (14)$$

\*1 論文によっては (9) 式を Orr-Sommerfeld 方程式として取り扱うこともある. その場合,  $\lambda = iaRc$  とすれば同値な (11) が得られる. ただし, 安定性の条件として虚数部分の符号を調べることに注意が必要.

と書き表す. (14) を (13) に代入し整理すると, 次を得る.

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 v - aR(V\tilde{\Delta} + V'')w = \sigma\tilde{\Delta}v - \mu\tilde{\Delta}w & \text{on } \Omega, \\ \tilde{\Delta}^2 w + aR(V\tilde{\Delta} + V'')v = \sigma\tilde{\Delta}w + \mu\tilde{\Delta}v & \text{on } \Omega, \\ v(-1) = v(1) = v'(-1) = v'(1) = 0, \\ w(-1) = w(1) = w'(-1) = w'(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

#### 4 関数空間の導入と不動点定式化

$L^2(\Omega)$  を  $\Omega$  上 2 乗可積分実関数の集合,  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  を  $\Omega$  上の  $L^2$ -内積,  $\|v\| := \sqrt{(v, v)_{L^2}}$  を  $\Omega$  上の  $L^2$ -ノルム,  $\|v\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|$  を  $\Omega$  上の  $L^\infty$ -ノルム,  $H^k(\Omega)$  を超関数の意味での  $k$  階微分が  $L^2(\Omega)$  となる実関数の集合, ノルムを  $\|v\|_{H^k} := \sqrt{\sum_{j=1}^k \left\| \frac{d^j v}{dx^j} \right\|^2}$  で定める. また,

$$H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) \mid v(-1) = v'(1) = v(1) = v'(-1) = 0\}$$

とするとき,  $\|v\|_{\tilde{\Delta}} := \|\tilde{\Delta}v\|$  は  $\|v\|_{H^2}$  と同値な  $H_0^2(\Omega)$  上のノルムであることから,  $H_0^2(\Omega)$  は  $(\tilde{\Delta}v, \tilde{\Delta}w)_{L^2}$  を内積とした Hilbert 空間となる. よって, 問題 (15) の弱解を与える無限次元空間  $X$  を  $X := H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  で定めるとき,  $X$  はノルム

$$\|[v, w, \sigma, \mu]^T\|_X := \sqrt{\|v\|_{\tilde{\Delta}}^2 + \|w\|_{\tilde{\Delta}}^2 + \sigma^2 + \mu^2}$$

に対して Banach 空間となる.

微分作用素  $\tilde{\Delta}$  については

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta}v, w)_{L^2} &= (v, \tilde{\Delta}w)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \forall w \in H^2(\Omega), \\ (\tilde{\Delta}v, \tilde{\Delta}w)_{L^2} &= (\tilde{\Delta}^2 v, w)_{L^2}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), w \in H_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

が成立する. ここに  $C_0^\infty(\Omega)$  は  $\Omega$  上無限階微分可能であり,  $x = -1, x = 1$  で恒等的に 0 となる関数の空間である. ここで,  $C_0^\infty(\Omega)$  が  $H_0^2(\Omega)$  で稠密 (dense) であることより, (15) と同値となる弱形式 (weak form) を次で定義することができる. (16) の第 3, 4 式は拘束条件である.

Given  $a, R, \xi_R, \xi_I \in \mathbf{R}$ ,  $v_0, w_0 \in H_0^2(\Omega)$  and  $V \in C^2(\bar{\Omega})$ , find  $[v, w, \sigma, \mu]^T \in X$  such that

$$\begin{cases} (\tilde{\Delta}v, \tilde{\Delta}\xi)_{L^2} = (aR(V\tilde{\Delta} + V'')w + \sigma\tilde{\Delta}v - \mu\tilde{\Delta}w, \xi)_{L^2}, & \forall \xi \in H_0^2(\Omega), \\ (\tilde{\Delta}w, \tilde{\Delta}\eta)_{L^2} = (-aR(V\tilde{\Delta} + V'')v + \sigma\tilde{\Delta}w + \mu\tilde{\Delta}v, \eta)_{L^2}, & \forall \eta \in H_0^2(\Omega), \\ (v, v_0)_{L^2} = \xi_R, \\ (w, w_0)_{L^2} = \xi_I. \end{cases} \quad (16)$$

次に,  $X$  から  $L^2(\Omega)$  への連続写像  $f_1, f_2$  を

$$f_1[v, w, \sigma, \mu]^T := aR(V\tilde{\Delta} + V'')w + \sigma\tilde{\Delta}v - \mu\tilde{\Delta}w, \quad (17)$$

$$f_2[v, w, \sigma, \mu]^T := -aR(V\tilde{\Delta} + V'')v + \sigma\tilde{\Delta}w + \mu\tilde{\Delta}v \quad (18)$$

で定める.  $f_1, f_2$  は  $X$  の有界集合を  $L^2(\Omega)$  の有界集合に写す.

また, Lax & Milgram の定理 (例えば [2]) より, 任意の  $g \in L^2(\Omega)$  に対し,

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 \omega = g \\ \omega(-1) = \omega(1) = \omega'(-1) = \omega'(1) \end{cases} \quad (19)$$

の解  $\omega \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  が一意に存在する.  $g \in L^2(\Omega)$  に対して (19) の解  $\omega \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  を対応させ, さらに  $H_0^2(\Omega)$  に埋め込むまでの写像を  $(\tilde{\Delta}^2)^{-1}$  と定義する.

$$(\tilde{\Delta}^2)^{-1}: \underset{g}{L^2(\Omega)} \rightarrow \underset{w}{H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)} \hookrightarrow \underset{w}{H_0^2(\Omega)}$$

$f_1, f_2, (\tilde{\Delta}^2)^{-1}$  を用いて, 写像  $F: X \rightarrow X$  を次で定める.

$$F[v, w, \sigma, \mu]^T := \begin{bmatrix} (\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_1[v, w, \sigma, \mu]^T \\ (\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_2[v, w, \sigma, \mu]^T \\ \sigma - (v, v_0)_{L^2} + \xi_R \\ \mu - (w, w_0)_{L^2} + \xi_I \end{bmatrix}. \quad (20)$$

この時,  $F$  は  $X$  上 compact 作用素であり, 弱形式 (16) は  $F$  の不動点:

$$F[v, w, \sigma, \mu]^T = [v, w, \sigma, \mu]^T$$

を求める問題と同値となる. よって, 一般の写像  $A$ , 一般の集合  $U$  に対する  $AU$  を

$$AU := \{Au \mid u \in U\}$$

と書くとき, Schauder の不動点定理により, 有界凸閉集合  $U \subset X$  に対し

$$FU \subset U$$

ならば,  $u = Fu$  なる  $F$  の不動点  $u$  が  $U$  内に存在することが確認できる.

## 5 有限次元部分空間と射影誤差

この節では, 具体的な  $H_0^2(\Omega)$  の有限次元部分空間  $S_h$  として区分的 3 次 Hermite 基底関数を導入し, 線形化問題に対する定量的 a priori 誤差評価を行なう.

区間  $\Omega = [-1, 1]$  を  $K$  等分する. 分割点

$$-1 = x_0, x_1, \dots, x_{K-1}, x_K = 1$$

の座標は  $x_k = -1 + 2k/K$  ( $k = 0, \dots, K$ ) で与えられる. また, 分割幅を  $h := 2/K$  とする (図 2 参照).

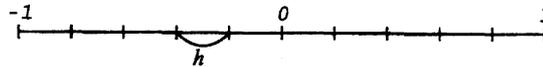


図 2:  $K = 10$  の分割例,  $h = 0.2$

$H_0^2(\Omega)$  の近似空間  $S_h$  を

$$\phi_n(x_m) = \delta_{nm}, \quad \phi_n'(x_m) = 0, \quad \psi_n(x_m) = 0, \quad \psi_n'(x_m) = \delta_{nm} \quad 1 \leq n \leq K-1, \quad 0 \leq m \leq K$$

を満足する  $2(K-1)$  個の関数によって

$$S_h := \text{span}\{\phi_n(x), \psi_n(x)\} \quad n = 1, \dots, K-1$$

で定義する.  $\phi_n(x), \psi_n(x)$  は標準基底関数:

$$\Phi(x) = \begin{cases} (x+1)^2(1-2x) & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} x(x+1)^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ x(1-x)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

を用いて

$$\phi_n(x) = \Phi\left(\frac{K}{2}(x+1) - n\right), \quad \psi_n(x) = \frac{2}{K}\Psi\left(\frac{K}{2}(x+1) - n\right) \quad n = 1, \dots, K-1$$

で決定できる.

次に, 無限次元空間から有限次元空間への射影  $P_h: H_0^2(\Omega) \rightarrow S_h$  を

$$(\bar{\Delta}(v - P_h v), \bar{\Delta}v_h)_{L^2} = 0, \quad \forall v_h \in S_h \quad (22)$$

で定義する. このとき,  $P_h$  の近似性として次の評価が成り立つ.

**Lemma 1**  $\forall g \in L^2(\Omega)$  に対し, (19) の解  $\omega$  と  $P_h \omega$  についての a priori 評価:

$$\|\omega - P_h \omega\|_{\bar{\Delta}} \leq C \|g\|, \quad (23)$$

$$\|\omega - P_h \omega\| \leq C^2 \|g\| \quad (24)$$

が成り立つ. ただし

$$C := \frac{4}{(\pi K)^2} \left(1 + \frac{4a^2}{(\pi K)^2}\right). \quad (25)$$

## 6 候補者集合と検証条件

この節では, Schauder の不動点定理が適用されうる集合 (「候補者集合」と呼ぶ) の構成方法と解の存在検証条件を [1] に基づき提案する. 以下, 特に断らず  $X, S_h, H_0^2(\Omega)$  上の恒等写像を区別せず  $I$  で表現する.

$X$  の有限次元部分空間  $X_h$  を

$$X_h := S_h \times S_h \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

とする. (22) で定義した射影  $P_h$  を用いて,  $X$  から  $X_h$  への射影  $\hat{P}_h$  を

$$\hat{P}_h[v, w, \sigma, \mu]^T := [P_h v, P_h w, \sigma, \mu]^T$$

で定義する. また, 射影  $\hat{P}_h$  による近似の誤差空間として

$$X_* := \{[v_*, w_*, 0, 0] \in X \mid v_* = (I - P_h)v, w_* = (I - P_h)w, v \in H_0^2(\Omega), w \in H_0^2(\Omega)\} \subset X$$

を定義する. このとき,  $P_h$  の一意分解性より, 任意の  $u = [v, w, \mu, \sigma]^T \in X$  は  $X_h$  の要素と  $X_*$  の要素を用いて

$$[v, w, \mu, \sigma]^T = [\hat{v}, \hat{w}, \mu, \sigma]^T + [v_*, w_*, 0, 0]^T, \quad [\hat{v}, \hat{w}, \mu, \sigma]^T \in X_h, [v_*, w_*, 0, 0]^T \in X_*$$

の形に一意に分解することができる.

したがって、 $X$  の不動点方程式  $u = Fu$  は

$$\begin{cases} \hat{P}_h u = \hat{P}_h Fu, \\ (I - \hat{P}_h)u = (I - \hat{P}_h)Fu \end{cases} \quad (26)$$

と一意に分解することができる。(26) を成分毎に書くと、 $[v, w, \sigma, \mu]^T = F[v, w, \sigma, \mu]^T$  は

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P_h v \\ P_h w \\ \sigma \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_h(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_1[v, w, \sigma, \mu]^T \\ P_h(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_2[v, w, \sigma, \mu]^T \\ \sigma - (v, v_0)_{L^2} + \xi_R \\ \mu - (w, w_0)_{L^2} + \xi_I \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} (I - P_h)v \\ (I - P_h)w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - P_h)(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_1[v, w, \sigma, \mu]^T \\ (I - P_h)(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_2[v, w, \sigma, \mu]^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

と分解される。

以降、 $u_h = [v_h, w_h, \sigma_h, \mu_h]^T \in X_h$  を近似解として固定し、有限次元部分に Newton-like 作用素:

$$\mathcal{N}_h u := \hat{P}_h u - [I - \hat{P}_h F'(u_h)]_h^{-1} \hat{P}_h (I - F)u : X \rightarrow X_h$$

を導入する。ただし、 $[I - \hat{P}_h F'(u_h)]_h^{-1} : X_h \rightarrow X_h$  は  $\hat{P}_h (I - F'(u_h)) : X \rightarrow X_h$  の定義域を  $X_h$  に制限した逆作用素とする。実際の計算では、 $[I - \hat{P}_h F'(u_h)]_h^{-1}$  の存在検証もあわせて行なうため、ここでは存在を仮定する。このとき

$$\hat{P}_h u = \hat{P}_h \mathcal{N}_h u \iff \hat{P}_h u = \hat{P}_h Fu$$

となるため、不動点方程式  $u = Fu$  は

$$\begin{cases} \hat{P}_h u = \mathcal{N}_h u, \\ (I - \hat{P}_h)u = (I - \hat{P}_h)Fu \end{cases}$$

と同値となる。したがって、 $X$  上の compact 写像  $T$  を

$$Tu := \mathcal{N}_h u + (I - \hat{P}_h)Fu$$

で定義すると、不動点問題  $u = Fu$  と  $u = Tu$  は同値となる。

次に、 $X_h$  の部分集合と  $X_*$  の部分集合から構成される  $X$  の候補者集合  $U$  を

$$U_h := \{[\hat{v}_h, \hat{w}_h, \hat{\sigma}, \hat{\mu}]^T \in X_h \mid \|\hat{v}_h\|_{\bar{\Delta}} \leq \gamma, \|\hat{w}_h\|_{\bar{\Delta}} \leq \delta, |\hat{\sigma}| \leq c_1, |\hat{\mu}| \leq c_2\},$$

$$U_* := \{[v_*, w_*, 0, 0]^T \in X_* \mid \|v_*\|_{\bar{\Delta}} \leq \alpha, \|v_*\| \leq C\alpha, \|w_*\|_{\bar{\Delta}} \leq \beta, \|w_*\| \leq C\beta\}$$

を用いて

$$U := u_h + U_h + U_*$$

で定義する。この時、以下の不動点定理の成立条件を得る。

**Theorem 1**

$$\begin{cases} \mathcal{N}_h U - u_h \subset U_h \\ (I - \hat{P}_h)FU \subset U_* \end{cases} \quad (27)$$

が成立するならば、 $U$  内に  $T$  の不動点が存在する。

次に, (27) を満たすことが期待される  $X$  の候補者集合  $U$  のより詳しい構成方法について述べる. 有限次元部分は  $U = u_h + U_h + U_* \subset X$  に対して

$$\mathcal{N}_h U - u_h = [V_h, W_h, \Sigma, M]^T \subset X_h$$

とおくことで, (27) の有限次元部分の検証条件  $\mathcal{N}_h U - u_h \subset U_h$  は

$$\sup_{\bar{v}_h \in V_h} \|\bar{v}_h\|_{\bar{\Delta}} \leq \gamma, \quad \sup_{\bar{w}_h \in W_h} \|\bar{w}_h\|_{\bar{\Delta}} \leq \delta, \quad \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} |\bar{\sigma}| \leq c_1, \quad \sup_{\bar{\mu} \in M} |\bar{\mu}| \leq c_2$$

と書ける.

(27) の無限次元部分の検証条件  $(I - \hat{P}_h)FU \subset U_*$  は,

$$\begin{bmatrix} (I - P_h)v \\ (I - P_h)w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - P_h)(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_1[v, w, \sigma, \mu]^T \\ (I - P_h)(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_2[v, w, \sigma, \mu]^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり, 固有値部分は常に満たされているため, 固有関数部分に着目すればよい.

任意の  $u \in U$  を  $u = [v, w, \sigma, \mu]^T$  と, また,

$$\begin{aligned} \hat{v}_* &= (I - P_h)(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_1[v, w, \sigma, \mu]^T, \\ \hat{w}_* &= (I - P_h)(\bar{\Delta}^2)^{-1} f_2[v, w, \sigma, \mu]^T \end{aligned}$$

とおくと, Theorem 1 より

$$\|\hat{v}_*\|_{\bar{\Delta}} \leq C \|f_1(u)\|, \quad \|\hat{w}_*\|_{\bar{\Delta}} \leq C \|f_2(u)\|, \quad \|\hat{v}_*\| \leq C^2 \|f_1(u)\|, \quad \|\hat{w}_*\| \leq C^2 \|f_2(u)\|$$

が成立する. よって,  $(I - \hat{P}_h)FU \subset U_*$  が満足されるためには,

$$C \sup_{\bar{u} \in U} \|f_1(\bar{u})\| \leq \alpha, \quad C \sup_{\bar{u} \in U} \|f_2(\bar{u})\| \leq \beta$$

が成り立てばよい.

以上をまとめると, 次の定理を得る.

**Theorem 2**  $u_h \in X_h$ , 集合  $U_h \subset X_h$ ,  $U_* \subset X_*$ ,  $U \subset X$  を

$$U_h := \{[\hat{v}_h, \hat{w}_h, \hat{\sigma}, \hat{\mu}]^T \in X_h \mid \|\hat{v}_h\|_{\bar{\Delta}} \leq \gamma, \|\hat{w}_h\|_{\bar{\Delta}} \leq \delta, |\hat{\sigma}| \leq c_1, |\hat{\mu}| \leq c_2\},$$

$$U_* := \{[v_*, w_*, 0, 0]^T \in X_* \mid \|v_*\|_{\bar{\Delta}} \leq \alpha, \|v_*\| \leq C\alpha, \|w_*\|_{\bar{\Delta}} \leq \beta, \|w_*\| \leq C\beta\},$$

$$U := u_h + U_h + U_*,$$

また,  $\mathcal{N}_h U - u_h \subset X_h$  を  $S_h \times S_h \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  の成分毎に

$$[V_h, W_h, \Sigma, M]^T := \mathcal{N}_h U - u_h$$

と表記する. このとき,

$$\begin{aligned} \sup_{\bar{v}_h \in V_h} \|\bar{v}_h\|_{\bar{\Delta}} &\leq \gamma, \\ \sup_{\bar{w}_h \in W_h} \|\bar{w}_h\|_{\bar{\Delta}} &\leq \delta, \\ \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} |\bar{\sigma}| &\leq c_1, \\ \sup_{\bar{\mu} \in M} |\bar{\mu}| &\leq c_2, \\ C \sup_{\bar{u} \in U} \|f_1(\bar{u})\| &\leq \alpha, \\ C \sup_{\bar{u} \in U} \|f_2(\bar{u})\| &\leq \beta \end{aligned}$$

が成立するならば,  $T$  の不動点が  $U$  に存在する.

Theorem 2 を用いた反復アルゴリズムは以下の通りである.

### Algorithm

- $k = 0$

初期値  $\gamma^{(0)}, \delta^{(0)}, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)} > 0$  を設定.

- $k \geq 1$

1. 微小な  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^{(k)} &:= (1 + \varepsilon)\gamma^{(k-1)}, & \hat{\delta}^{(k)} &:= (1 + \varepsilon)\delta^{(k-1)}, & \hat{c}_1^{(k)} &:= (1 + \varepsilon)c_1^{(k-1)}, \\ \hat{c}_2^{(k)} &:= (1 + \varepsilon)c_2^{(k-1)}, & \hat{\alpha}^{(k)} &:= (1 + \varepsilon)\alpha^{(k-1)}, & \hat{\beta}^{(k)} &:= (1 + \varepsilon)\beta^{(k-1)}. \end{aligned}$$

2. 候補者集合  $U^{(k)}$  を

$$U_h^{(k)} := \{[\hat{v}_h, \hat{w}_h, \hat{\sigma}, \hat{\mu}]^T \in X_h \mid \|\hat{v}_h\|_{\Delta} \leq \hat{\gamma}^{(k)}, \|\hat{w}_h\|_{\Delta} \leq \hat{\delta}^{(k)}, |\hat{\sigma}| \leq \hat{c}_1^{(k)}, |\hat{\mu}| \leq \hat{c}_2^{(k)}\},$$

$$U_*^{(k)} := \{[v_*, w_*, 0, 0]^T \in X_* \mid \|v_*\|_{\Delta} \leq \hat{\alpha}^{(k)}, \|v_*\| \leq C\hat{\alpha}^{(k)}, \|w_*\|_{\Delta} \leq \hat{\beta}^{(k)}, \|w_*\| \leq C\hat{\beta}^{(k)}\},$$

$$U^{(k)} := u_h + U_h^{(k)} + U_*^{(k)}$$

で構成.

3.  $N_h U - u_h \subset X_h$  を評価し

$$[V_h^{(k)}, W_h^{(k)}, \Sigma^{(k)}, M^{(k)}]^T := N_h U^{(k)} - u_h$$

とおく.

4.  $k$  回目の反復パラメータを

$$\gamma^{(k)} := \sup_{\bar{v}_h \in V_h^{(k)}} \|\bar{v}_h\|_{\Delta},$$

$$\delta^{(k)} := \sup_{\bar{w}_h \in W_h^{(k)}} \|\bar{w}_h\|_{\Delta},$$

$$c_1^{(k)} := \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma^{(k)}} |\bar{\sigma}|,$$

$$c_2^{(k)} := \sup_{\bar{\mu} \in M^{(k)}} |\bar{\mu}|,$$

$$\alpha^{(k)} := C \sup_{\bar{u} \in U^{(k)}} \|f_1(\bar{u})\|,$$

$$\beta^{(k)} := C \sup_{\bar{u} \in U^{(k)}} \|f_2(\bar{u})\|$$

で計算.

5.  $\gamma^{(k)} \leq \hat{\gamma}^{(k)}, \delta^{(k)} \leq \hat{\delta}^{(k)}, c_1^{(k)} \leq \hat{c}_1^{(k)}, c_2^{(k)} \leq \hat{c}_2^{(k)}, \alpha^{(k)} \leq \hat{\alpha}^{(k)}, \beta^{(k)} \leq \hat{\beta}^{(k)}$ , ならば終了. このとき  $U^{(k)} \subset X$  内に  $F$  の不動点が存在する.

6. 5. の条件が満たされない場合には  $k := k + 1$  として 1. に戻る.  $k$  があらかじめ定めた最大反復回数を超えた場合, またパラメータがあらかじめ定めた大きさを超えた場合には検証失敗.

### ◆ アルゴリズムの注釈

1. 実際の計算では,  $U$  は無限次元の項を含むため, また, 浮動小数点演算の丸め誤差のため, 厳密な  $\gamma^{(k)}, \delta^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}$  ( $k \geq 1$ ) の値を求めることは不可能である. しかしながら, ノルム評価と丸め誤差を考慮した区間演算アルゴリズムおよびソフトウェアを用いることによって, 《厳密な上界》を与えることは可能である. したがって, over-estimate された  $\gamma^{(k)}, \delta^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}$ , ( $k \geq 1$ ) で構成される集合と候補者集合との比較によって, 数学的に厳密な意味で検証条件が確認できる.
2.  $\varepsilon$  による拡大は, “ $\varepsilon$ -inflation” と呼ばれる加速法の一つである.  $\varepsilon > 0$  の具体的な値は問題によって使い分ける.
3. 初期値  $\gamma^{(0)}, \delta^{(0)}, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)} > 0$  の値も問題によって変化する. 経験的には, 近似解  $u_h$  が真

の解に十分近い場合、Newton 型作用素は反復を繰り返す毎に縮小を起こす集合に収束することが期待されることから、マシンエプシロン程度の初期値で十分である。

4.  $[V_h^{(k)}, W_h^{(k)}, \Sigma^{(k)}, M^{(k)}]^T$  の導出には、有限次元 Newton-like 作用素の逆作用素から構成される特異値問題をはじめとする評価が必要となる。これらに関する詳細は稿を改めて述べる予定である。

## 7 検証例

この節では、前節のアルゴリズムに基づいて得られた検証例をいくつか紹介する。計算環境は表 1 の通りである。丸め誤差を考慮した計算を行なうために Sun Forte Fortran コンパイラでサポートされている 4 倍精度区間変数を用いた。

表 1: 計算環境

コンパイラ	Sun Forte Fortran Desktop Edition 6 update 1
OS	SunOS 5.7
計算機	FUJITSU GP7000F model 900 SUN Ultra5 model 360

### 7.1 例 1

$R = 5775$ ,  $a = 1.02$ ,  $K = 700$  の時、近似解  $u_h$  の周りに構成される  $X$  の候補者集合:

$$U = u_h + U_h + U_*, \quad U_h = [V_h, W_h, \sigma, \mu]^T, \quad U_* = [V_*, W_*, 0, 0]^T \quad (28)$$

内に解が存在することを検証した。各集合のノルムは次の値で評価される。

$$\|V_h\|_{\Delta} \leq 0.000672, \quad \|W_h\|_{\Delta} \leq 0.000781, \quad \|V_*\|_{\Delta} \leq 0.007756, \quad \|W_*\|_{\Delta} \leq 0.004562.$$

また、固有値は

$$\lambda \in [-0.0557, 0.0023] + i[1554.5574, 1554.6167].$$

として包み込まれる。

### 7.2 例 2

$R = 5776$ ,  $a = 1.02$ ,  $K = 700$  の時、(28) と同様な候補者集合内に解が存在することを検証した。各集合のノルムは次の値で評価される。

$$\|V_h\|_{\Delta} \leq 0.000781, \quad \|W_h\|_{\Delta} \leq 0.000763, \quad \|V_*\|_{\Delta} \leq 0.004565, \quad \|W_*\|_{\Delta} \leq 0.007759.$$

また、固有値は

$$\lambda \in [-0.0655, -0.0074] + i[1554.7796, 1554.8391].$$

として包み込まれる。したがって、 $a = 1.02$ ,  $R = 5776$  においては少なくともひとつの固有値  $\lambda$  の実部が負になることが確認できる。

図 3 は、各  $a$  に対して固有値の実部が負になることが検証できた最小の  $R$  をプロットしたものである。 $Re(\lambda) = 0$  を与える中立曲線はこの下に存在すると予想される。

検証に成功した固有値が最小固有値であることの数学的保証はこのアルゴリズムでは得られておらず、中立曲線  $Re(\lambda) = 0$  の追跡、臨界 Reynolds 数自信の包み込みとともに今後の課題である。

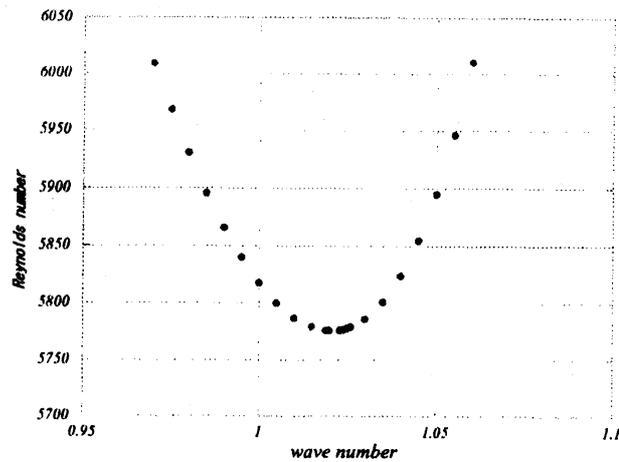


図 3:  $Re(\lambda) < 0$  が検証された  $[a, R]$

## 参考文献

- [1] 中尾充宏, 山本野人: 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.
- [2] 岡本 久, 中村 周: 関数解析, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 1997.
- [3] William M.F. Orr: The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid, Part I (A Perfect Liquid), Part II (A Viscous Liquid), *Proceedings of the Royal Irish Academy Sect. A*, Vol.27, pp.9-138 (1907).
- [4] Steven A. Orszag: Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation, *J. Fluid Mech.*, Vol.50, Part4, pp.689-703 (1971).
- [5] Arnold Sommerfeld: Ein Beitrag zur Hydrodynamischen Erklärung der Turbulenten Flüssigkeitsbewegungen, *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici* (Roma, 6-11 Aprile 1908), Vol.3, pp.116-124 (1909). 別名: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (4th Intern. Congr. Math. Rome)