数理解析研究所講究録 1381 巻 2004 年 159-167

計算可能無理数を基数とする記数法と計算可能実数

赤間 陽二　　飯塚 新司
東北大学大学院理学研究科数学専攻

平成 16 年 1 月 13 日

1 序

実数の位取記数法は Knuth [Knuth97] にあるように古くから調べらているが, 基数 β を 1 より大きな一般の実数と取った位取記数法は重要であり, 実数のエルゴールド的な性質を調べる基本的な手段である実数の Parry 展開 [Par60, Rny57] と関連している.

実数と実関数の Markov 流の計算可能性の研究においても, 実数の位取記数法はある程度調べられている. 例えば Bridges [Bridges94, 61 頁] に次を見ることができる。

> 各計算可能実数 x は計算可能 $d \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ 進表示をもつのだが, しかしその展開を計算するアルゴリズムは x が有理数か, または無理数かに依存している. これは避けることができない. もし単一のアルゴリズムで, 各計算可能実数 x に対し適用でき, x の d 進表示を計算するものがあったとしたら, ある計算可能全域関数 $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{N}$ が存在して, 各 $x \in \mathbb{R}_c$ に対して $f(x)$ は x を越えない最大の整数となる. しかしそのような計算可能関数 f は存在しない.

そこで、基数 $\beta > 1$ を計算可能無理数とした位取り記数法と計算可能実数の関係を本稿では調べる。具体的には

> 計算可能実数ジェネレータを使った Markov 流の計算可能実数の表現と, 計算可能**無理数** $\beta > 1$ による計算可能 β 進表示は, 互いに効果的に翻訳可能である.

を示す.

2 基本的な概念と記法

まず Markov 流の計算可能実数の定義を思い出す.

下の図を通る矢印を追っていくことで, $\mathbb{Q}$ のアルゴリズム的な列挙を得る.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{-1}{1} & & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{-2}{1} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{0}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{1}{2} & \cdots & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{0}{3} & & \frac{-1}{3} & \cdots & & & & \\
& \swarrow & & & & & & \\
\frac{0}{4} & \cdots & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

さらに, アルゴリズム的な 1 対 1 の $\mathbb{Q}$ の列挙 q を得るために, このリストから繰り返しを取り除くことができる. **$\mathbb{N}^n$ から $\mathbb{Q}$ への計算可能部分関数**により, 部分関数 $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ で, 部分関数 $q^{-1} \circ \psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ が計算可能となるものを意味することにする.

$\mathbb{N}^n$ から $\mathbb{N}$ への計算可能部分関数の全体の標準的列挙

$$\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots$$

(簡単のために, 通常は φ_i によって $\varphi_i^{(1)}$ を表す) に対して,

$$q \circ \varphi_0^{(n)},\ q \circ \varphi_1^{(n)},\ q \circ \varphi_2^{(n)}, \ldots$$

は $\mathbb{N}^n$ から $\mathbb{Q}$ への計算可能部分関数からなる集合のアルゴリズム的な列挙である. また, $\mathbb{N}^n$ から $\mathbb{N}$ の万能 Turing 機械

$$\mathcal{U}_n \ :\ \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}\ ;\ (i, k_1, \ldots, k_n) \mapsto \varphi_i^{(n)}(k_1, \ldots, k_n)$$

(簡単のために, 通常は $\mathcal{U}$ によって $\mathcal{U}_1$ を表す) に対して,

$$q \circ \mathcal{U}_n \ :\ \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$$

は $\mathbb{N}^n$ から $\mathbb{Q}$ の万能 Turing 機械である.

言葉と記号を多用することで, 文脈によりその方が便利な時は, $\varphi_i^{(n)}$ と $q \circ \varphi_i^{(n)}$ (そして φ_i と $q \circ \varphi_i$) , $\mathcal{U}_n$ と $q \circ \mathcal{U}_n$ (そして $\mathcal{U}$ と $q \circ \mathcal{U}$) を同一視することにする. 部分関数 f の**インデクス**とは $f = \varphi_i$ となる i のことである.

実数 x に対して適当な計算可能全域関数 $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ が存在して, 全ての非負整数 n に対して

$$|x - s(n)| \leq 2^{-n}$$

であるとき, x を**計算可能実数**(記号. $x \in \mathbb{R}_c$) といい, s を x の**計算可能実数ジェネレータ**と呼ぶ.

$\beta > 1$ に対して, $z \in [0, 1)$ の**計算可能 β 進表示**とは任意の計算可能全域関数 $f : [1, \infty) \cap \mathbb{Z} \to [0, \beta) \cap \mathbb{Z}$ で,

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \beta^{-n}$$

となるものである.

3 Markov 流の計算可能実数表現と計算可能無理数による位とり記数法の効果的な変換

本稿では

> 計算可能実数ジェネレータを使った Markov 流の計算可能実数の表現と, 計算可能**無理数**$\beta > 1$ による計算可能 β 進表示は, 互いに効果的に翻訳可能である.

を示す. なお, 基数 β が計算可能でないときや, 有理数であるときは上の定理が得られないことは明らかであろう.

補題 1 $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を $\beta \in (\mathbb{R}_c \setminus \mathbb{Q})$ の計算可能実数ジェネレータとする. 次の Turing 機械は停止し, かつ正当である.

- 入力 : 任意の $n \in \mathbb{N}$.
- 出力 : $\beta > 2^{-n}$ ならば 0, $\beta < 2^{-n}$ ならば 1.

$\mathcal{T}_\beta :=$ "入力 $n \in \mathbb{N}$ に対して;

1. 2^{-n} を計算する.
2. 各 $m = 0, 1, \ldots$ に対して,
3. $|s(m) - 2^{-n}| > 2^{-m}$ ならばステージ 4 へ. そうでなければ次の m へ.
4. $s(m) > 2^{-n}$ ならば 0 を, $s(m) < 2^{-n}$ ならば 1 を出力して停止."

証明 まず次を主張する.

主張 1 ステージ 2 ～ 3 のループは有限回で停止する.

主張の証明であるが, もし, 有限回で停止しないと仮定すると,

$$\left|s(m) - 2^{-n}\right| \leq 2^{-m} \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$
$$\therefore\ 2^{-n} = \lim_{m \to \infty} s(m) = \beta \notin \mathbb{Q}.$$

これは $2^{-n} \in \mathbb{Q}$ に矛盾する.

$\mathcal{T}$ は入力 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\beta > 2^{-n}$ ならば 0 を, $\beta < 2^{-n}$ ならば 1 を出力することは次のようにして証明できる.

f の全域性と主張 1 より, ステージ 1 ～ 3 は計算可能となる. ステージ 4 において, ステージ 3 より,

$$\left|2^{-n} - s(m)\right| > 2^{-m}.$$

また, s は β の計算可能実数ジェネレータだから,

$$|\beta - s(m)| \leq 2^{-m}.$$

よって, $\beta > 2^{-n}$ のとき,

$$\left|2^{-n} - s(m)\right| > 2^{-m} \geq |\beta - s(m)| \geq \beta - s(m) > 2^{-n} - s(m)$$
$$\therefore\ s(m) > 2^{-n}.$$

従って $\mathcal{T}$ は 0 を出力する. また, $\beta < 2^{-n}$ のとき,

$$|s(m) - 2^{-n}| > 2^{-m} \geq |s(m) - \beta| \geq s(m) - \beta > s(m) - 2^{-n}$$
$$\therefore\ s(m) < 2^{-n}.$$

従って $\mathcal{T}$ は 1 を出力する. □

上の定理を用いて次の定理を証明する.

定理 1 全ての $\beta \in (\mathbb{R}_c \setminus \mathbb{Q}) \cap (1,2)$ に対して, 適当な計算可能全域関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して, 全ての非負整数 i に対して, i が適当な $z \in [0,1)$ の計算可能 β 進表示のインデクスならば, $h(i)$ は z の計算可能実数ジェネレータの適当なインデクスである.

証明のため, まず, 次の 2 点に注意する. $\beta > 1$ より $\forall n \geq 0\ \exists N \geq 0$

$$\left| z - \sum_{k=1}^{N} \varphi_i(k)\beta^{-k} \right| = \sum_{k=N+1}^{\infty} \varphi_i(k)\beta^{-k} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta^{-k} = \frac{\beta^{-N}}{\beta - 1} \leq 2^{-n}.$$

ここで, N はいくらでも大きく取れることに注意する.

$n \geq 0$ に対して N は次の Turing 機械 $\mathcal{T}$ で計算できる. まず $\mathbb{R}_c$ 上の四則演算は計算可能であることを思い出す. また, $\beta \notin \mathbb{Q}$ より $\frac{\beta^{-N}}{\beta-1}, \frac{\beta^{-(N+1)}}{\beta-1}$ のいずれかは $\mathbb{R}_c \setminus \mathbb{Q}$ に属することに注意する.

$\mathcal{T}$ = "入力 $n \in \mathbb{N}$ に対して; 各 $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

1. $\gamma \leftarrow \frac{\beta^{-m}}{\beta-1}$.
2. $\delta \leftarrow \frac{\beta^{-(m+1)}}{\beta-1}$.
3. γ に対する補題 1 の Turing 機械 $\mathcal{T}_\gamma$ に 0 を入力し, 一方で, δ に対する補題 1 の Turing 機械 $\mathcal{T}_\delta$ に 0 を入力し, それら二つを交互にステップごとに動作させる.
4. いずれか一方が 1 を出力したら $m+1$ を出力して停止する. いずれか一方が 0 を出力したら次の m へ."

主張 2 Turing 機械 $\mathcal{T}$ は停止する.

証明 $\frac{\beta^{-m}}{\beta-1}, \frac{\beta^{-(m+1)}}{\beta-1}$ のいずれか一方は $\mathbb{R}_c \setminus \mathbb{Q}$ に属するから, $\mathcal{T}_\gamma$ に 0 を入力したものは停止するか, $\mathcal{T}_\delta$ に 0 を入力したものは停止する. □

定義 1 $\mathcal{T}$ で計算される関数を N で表す.

主張 3 Turing 機械 $\mathcal{T}$ は正当である.

証明 ステージ 3 において $\mathcal{T}_\gamma$ が 1 を出力して, $\mathcal{T}$ が $N(n) = m+1$ を出力する場合は, $\mathcal{T}_\gamma$ の性質から $\gamma = \frac{\beta^{-m}}{\beta-1} < 2^{-n}$ であり,

$$\left| z - \sum_{k=1}^{N(n)} \varphi_i(k)\beta^{-k} \right| \leq \frac{\beta^{-N}}{\beta - 1} < \frac{\beta^{-m}}{\beta - 1} < 2^{-n}.$$

ステージ3において$\mathcal{T}_\delta$が1を出力して，$\mathcal{T}$が$N(n)=m+1$を出力する場合は，$\mathcal{T}_\delta$の性質から$\delta=\frac{\beta^{-(m+1)}}{\beta-1}<2^{-n}$であり，

$$\left|z-\sum_{k=1}^{N(n)}\varphi_i(k)\beta^{-k}\right|\leq\frac{\beta^{-N}}{\beta-1}<2^{-n}. \qquad \square$$

定理 *1* の証明 s-m-n定理より，計算可能全域関数$h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$で，

$$\varphi_{h(i)}(n)=\sum_{k=1}^{N(n)}\varphi_i(k)\beta^{-k}$$

をみたすものが存在する．iが適当な$z\in[0,1)$の計算可能β進表示のインデクスならば，$h(i)$はzの計算可能実数ジェネレータのインデクスである． $\square$

定理1の「計算可能実数ジェネレータ」と「計算可能β進表示」を入れ換えた次の命題も証明できる．

定理 2 全ての$\beta\in(\mathbb{R}_c\setminus\mathbb{Q})\cap(1,2)$に対して，適当な計算可能全域関数$h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$が存在して，全ての非負整数$i$に対して，$i$が適当な$z\in[0,1)$の計算可能$\beta$進表示のインデクスならば，$h(i)$は$z$の計算可能実数ジェネレータの適当なインデクスである．

従って，この場合，

系 1 計算可能実数ジェネレータを使った実数表現と，計算可能無理数$\beta>1$による計算可能β進表示は，互いにコンピュータで翻訳可能である．

今まで計算可能β進表示を持つ実数は$z\in[0,1)$に限ったが，その制限を外し，計算可能β進表示を自然に拡張する．計算可能無理数$\beta>1$による計算可能β進表示を用いて定義した計算可能実数と計算可能関数は，従来の計算可能実数と計算可能関数に一致する．

上の定理2の証明のポイントは，$z\in[0,1)$のβ進表示は$\beta\notin\mathbb{Z}$であるため複数個あるということである．

定義 2 $x\in\mathbb{R}_c$に対して，xの計算可能実数ジェネレータのインデクスを，xの**コード**ということにする．Turing機械の内部では，計算可能実数は，そのコードで符号化されるものとする．

Turing機械$\mathcal{H}$を次で与える:

$\mathcal{H}:=$ “入力$(b,i,n)\in\mathbb{N}^3$ (b,iはそれぞれ$\beta,z\in\mathbb{R}_c$のコード) に対して;

1. $\alpha\leftarrow\frac{1}{\beta-1}$ (αのコードをaとする)．
2. 各$p=0,1,\ldots$に対して，
3. $\quad\varphi_a(p)-2^{-p}>1$ならばステージ4へ．そうでなければ次の$p$へ．
4. $z_0\leftarrow z$.
5. 各$k=1,2,\ldots,n$に対して，
6. $\quad w_k\leftarrow z_{k-1}\beta$ (w_kのコードをj_kとする)．

7. 各 $q=0,1,\ldots$ に対して,
8. $\varphi_{j_k}(q)-2^{-q}>1$ または $\varphi_{j_k}(q)+2^{-q}<\varphi_a(p)-2^{-p}$ ならばステージ 9 へ.
そうでなければ次の q へ.
9. $\varphi_{j_k}(q)-2^{-q}>1$ ならば $c_k:=1$. そうでなければ $c_k:=0$.
10. $z_k\leftarrow w_k-c_k$. 次の k へ.
11. c_n を出力して停止."

$\mathcal{H}$ により計算される計算可能部分関数を $H:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N}$ とおく. また $\beta\in(\mathbb{R}_c\setminus\mathbb{Q})\cap(1,2)$ とし, β のコード b を 1 つ固定する.

主張 1 i が適当な $z\in[0,1)$ のコードならば, 任意の $n\geq 1$ に対して $H(b,i,n)$ は定義されている.

証明 ステージ 2 ～ 3 とステージ 7 ～ 8 のループが停止すればよい.
ステージ 2 ～ 3: 停止しないと仮定すると,

$$\varphi_a(p)-2^{-p}\leq 1 \quad (\forall p\in\mathbb{N})$$
$$\therefore\ \alpha=\lim_{p\to\infty}\varphi_a(p)\leq 1.$$

これは $\alpha=\frac{1}{\beta-1}>1$ に矛盾する.
ステージ 7 ～ 8: 停止しないと仮定すると,

$$\varphi_{j_k}(q)-2^{-q}\leq 1 \text{ かつ } \varphi_{j_k}(q)+2^{-q}\geq\varphi_a(p)-2^{-p} \quad (\forall q\in\mathbb{N}).$$

よって $q\to\infty$ とすれば,

$$1\geq w_k\geq\varphi_a(p)-2^{-p}.$$

これはステージ 3 の $\varphi_a(p)-2^{-p}>1$ に矛盾する. □

主張 2 i が適当な $z\in[0,1)$ のコードならば,

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}H(b,i,n)\beta^{-n}.$$

証明

$$0\leq z-\sum_{k=1}^{n}H(b,i,k)\beta^{-k}<\alpha\beta^{-n} \quad (\forall n\geq 1)$$

を示せば十分. n に対して, $\mathcal{H}$ の定義にあるように z_k,w_k,j_k,c_k をとる. $\mathcal{H}$ の動作より,

$$\begin{cases} z_0=z,\ z_k=w_k-c_k, \\ w_k=z_{k-1}\beta, \\ c_k=H(b,i,k), \end{cases} \qquad (1\leq\forall k\leq n)$$

が成り立つ. また, 簡単な計算により,

$$z-\sum_{k=1}^{n}H(b,i,k)\beta^{-k}=z_n\beta^{-n}.$$

よって $0 \leq z_n < \alpha$ となればよい. これを示すため,

$$0 \leq z_m < \alpha \quad (0 \leq \forall m \leq n)$$

が成り立つことを m に関する帰納法で示す. $m = 0$ のとき,

$$0 \leq z < 1 < \frac{1}{\beta - 1} = \alpha$$

より成立. $m-1$ まで成り立つと仮定する. m 回目のステージ 9 において,

$$c_m = \begin{cases} 1, & \varphi_{j_m}(q) - 2^{-q} > 1 \text{ のとき}, \\ 0, & \varphi_{j_m}(q) - 2^{-q} \leq 1 \text{ のとき}. \end{cases}$$

が成り立つ. よって, $c_m = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_{j_m}(q) - 2^{-q} - 1 & &(\because\ \varphi_{j_m}(q) - 2^{-q} > 1) \\ &\leq w_m - 1 & &(\because\ |\varphi_{j_m}(q) - w_m| \leq 2^{-q}) \\ &= z_{m-1}\beta - 1 & & \\ &< \alpha\beta - 1 & &(\because\ \text{帰納法の仮定より } 0 \leq z_{m-1} < \alpha) \\ &= \alpha. & &(\because\ \alpha = \tfrac{1}{\beta-1}) \end{aligned}$$

$z_m = w_m - 1$ であるから, $0 \leq z_m < \alpha$. また, $c_m = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 &\leq z_{m-1}\beta & &(\because\ \text{帰納法の仮定より } 0 \leq z_{m-1} < \alpha) \\ &= w_m & & \\ &\leq \varphi_{j_m}(q) + 2^{-q} & &(\because\ |\varphi_{j_m}(q) - w_m| \leq 2^{-q}) \\ &< \varphi_a(p) - 2^{-p} & &(\because\ \varphi_{j_m}(q) - 2^{-q} \leq 1 \text{ とステージ 8 より}) \\ &\leq \alpha. & &(\because\ |\varphi_a(p) - \alpha| \leq 2^{-p}) \end{aligned}$$

$z_m = w_m$ であるから, $0 \leq z_m < \alpha$. 従って m のときも成立. □

s-m-n 定理より, 計算可能全域関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で,

$$\varphi_{h(i)} = H(b, i, \cdot) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

をみたすものが存在する. 主張 2 より, i が適当な $z \in [0,1)$ のコードならば, $h(i)$ は z の β 進表示の適当なインデクスである. これにより定理 2 の証明が完了する. □

4 Bridges の *Computability: A mathematical sketch book* のある命題の反例

Bridges [Bridges94] は, 計算論, 計算可能解析学, Blum の抽象計算量理論を扱う入門書であり, 計算可能解析学は 4 章で扱っている.

その章の中で, $\mathbb{R}_c$ 上の関数に対する連続性と計算可能性に関しての基礎的な概念と基本的な結果を扱っている.

定義 3 (計算可能関数, 効果的（一様）連続性) 1. 集合 X の $\mathbb{N}$ 上の**表現**とは, N から X の上の部分関数のことである. 特に

(a) $\mathbb{N}$ の表現 $\rho_{\mathbb{N}}$ とは $\mathbb{N}$ の恒等関数のことである.

(b) $\mathbb{Q}$ の表現 $\rho_{\mathbb{Q}}$ とは q のことである.

(c) $\mathbb{R}_c$ の表現 $\rho_{\mathbb{R}_c}$ とは, 全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\rho_{\mathbb{R}_c}(i) = x \iff \varphi_i \text{ は } x \text{ の計算可能実数ジェネレータ}$$

が成立するものである.

2. 部分関数 $\Theta : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ $(n \geq 0)$ が**計算可能**であるとは, n 引数計算可能部分関数 $\theta : \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して, もし $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{domain}(\Theta)$ かつ $\rho_{A_1}(i_1) = a_1, \ldots, \rho_{A_n}(i_n) = a_n$ ならば, $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathrm{domain}(\theta)$ であり, かつ $\rho_B(\theta(i_1, \ldots, i_n)) = \Theta(a_1, \ldots, a_n)$ (もし $\theta(i_1, \ldots, i_n) \in \mathrm{domain}(\rho_B)$ でなくとも, $\theta(i_1, \ldots, i_n)$ は定義されているかもしれないことを注意しておく.)

3. 部分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**効果的に連続**であるとは, 各 $x \in \mathrm{domain}(f)$ に対して, ある計算可能全域関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して, もし $y \in \mathrm{domain}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, かつ $|x - y| \leq 2^{-h(n)}$ ならば, $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$ が成り立つことをいう.

4. 一方, f が**効果的に一様連続**であるとは, 関数 h が x によらずに選ばれることをいう. 則ち, ある計算可能全域関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して, もし $x, y \in \mathrm{domain}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, かつ $|x - y| \leq 2^{-h(n)}$ ならば, $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$ が成り立つことをいう.

定理 3 (Kreisel-Lacombe-Schoenfield-Čeitin) 全ての計算可能全域関数 $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ は効果的に連続である.

Bridges の本では, その部分的な逆として命題 4.28(70 頁)

> **命題 4.28** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全域的関数で, $\mathbb{R}_c$ を $\mathbb{R}_c$ に移し, $\mathbb{R}$ 上, 効果的に一様連続とする. このとき, f の $\mathbb{R}_c$ への制限は計算可能である.

を「証明」し, 序文でこの本で original としている. しかし, 残念ながら反例があるのでこの場を借りて提示したい.

K を recursive でない r.e. 集合とし, その特性関数を χ とする. 反例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

定義 4

$$\begin{aligned} f(x) &= \chi(0), & (x \leq 0); \\ f(m) &= \chi(m), & (m \in \mathbb{N}); \end{aligned}$$

その他は折れ線で補完する.

f は全域的で連続である. また, 傾きが ± 1 の範囲だから一様連続である. しかも効果的に一様連続である. というのは,

$$\forall x, y\ \left[|x-y| < 2^{-n} \implies |f(x) - f(y)| < 2^{-n}\right]$$

だからである. また, 明らかに $f(\mathbb{R}_c) \subseteq \mathbb{R}_c$. しかし,

主張 3 f は計算可能ではない.

証明 f が計算可能と仮定すると, 適当な計算可能部分関数 $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して定義 3(2) を満たす. このとき, 適当な計算可能全域関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して $\varphi_{g(m)}$ は $m \in \mathbb{N}$ の計算可能実数ジェネレータである. また,

$$\begin{array}{llllll} m \notin \mathcal{K} & \Rightarrow & f(m) = 0 & \Rightarrow & |\varphi_{\theta \circ g(m)}(2)| & \leq 2^{-2} \\ m \in \mathcal{K} & \Rightarrow & f(m) = 1 & \Rightarrow & |\varphi_{\theta \circ g(m)}(2) - 1| & \leq 2^{-2} \end{array}$$

f が全域的だから $f(m) = 0$ または $f(m) = 1$ が必ず成立するから, 次の Turing 機械は必ず停止する.

"入力 $m \in \mathbb{N}$ に対して;

1. $\mathcal{U}(\theta \circ g(m), 2) < 1/2$ ならば 0 を出力し停止する.

2. $\mathcal{U}(\theta \circ g(m), 2) > 1/2$ ならば 1 を出力し停止する. "

この Turing 機械は, recursive でない $\mathcal{K}$ の特性関数 χ を計算し, 矛盾する. これで主張の証明が完了した. □

参考文献

[Bridges94] D. Bridges. *Computability: A mathematical sketch book.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1994.

[Knuth97] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming.* Vol. 1-3. Addison-Wesley, 3d ed., 1997.

[Par60] W. Parry. On the β-expansions of real numbers. *Acta Mathematica, Acad. Sci. Hung.*, 11:401–416, 1960.

[Rny57] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8:477–493, 1957.