数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 189-197

Universal Character Ring and Fermionic Formulas

阪大基礎工　尾角正人(Masato Okado)
e-mail: okado@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

1 はじめに

ZabrockiによるΛ環上の作用素のqアナログを使って、ShimozonoとZabrockiはある多項式を定義し、筆者らが1998年頃に定義したフェルミ公式にある条件のもとで一致していると予想している。これを紹介してみたい。

2 フェルミ公式と$X=M$予想

論文[HKOTY, HKOTT]において"フェルミ公式"と呼ばれる正整数係数の多項式が提出された。これは2次元可解格子模型を解く代表的手法であるベーテ仮説法のストリング仮説に由来する。ちょっと記号を導入しよう。$\mathfrak{g}$をアフィンリー環、$\mathring{\mathfrak{g}}$をKacの教科書[K] p54-p55のアフィンリー環のディンキン図のテーブルからα_0に対応する頂点を除いた有限次元単純リー環、λを$\mathring{\mathfrak{g}}$のdominant integral weight、さらにRを

$$R=((r_1,s_1),(r_2,s_2),\dots,(r_L,s_L))\quad(1\le r_j\le n, s_j\ge 1)$$

なるデータ(r,s)の組とする。nは$\mathring{\mathfrak{g}}$のディンキン図の頂点の個数である。フェルミ公式とはこれら$(\mathfrak{g},\lambda,R)$に対して定まるt^{-1}の正整数係数の多項式で本稿では$M^{\mathfrak{g}}_{\lambda R}(t)$と記すことにする[1]。具体形は上記論文を参照されたい。

このmysteriousなMの"組合せ論的表現論"的意味を理解しようと我々は柏原の意味でのクリスタルから定義される"1次元状態和"[2]Xをクリスタルの存在を仮定して定義し、Mに一致すると予想した。もしこの予想が正しければ負号を含まないきれいな$\mathfrak{g}/\mathring{\mathfrak{g}}$の分岐関数の公式（スピノン指標公式）が得られる。これらの予想はアフィンリー環のタイプが$A^{(1)}_n$の場合にはすべて解決されているが、その他の場合はごく特殊な場合を除き未解決である。

---

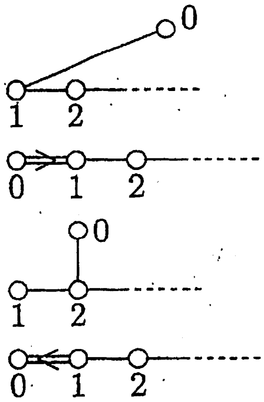
[1] $\mathfrak{g}$を固定して、[HKOTY]では$M(W_R,\lambda,q)$, [HKOTT]では$M_\infty(W_R,\lambda,q)$と書かれたものである。ただし、$W_R=W^{(r_1)}_{s_1}\otimes W^{(r_2)}_{s_2}\otimes\cdots\otimes W^{(r_L)}_{s_L}, q\to t$.

[2] これも可解格子模型に由来する。

3 Shimozono-Zabrocki's K polynomial

ΛをMacdonaldの教科書[M]にでてくる無限変数$x_1, x_2, \ldots$の対称多項式のなす環とする。Zabrocki[Z]によって、このΛ上の作用素に対しそのqアナログが定義されている。さらに、そのqアナログを用いてShimozono-Zabrocki[SZ]により、Kという多項式が定義された。$\mathfrak{g}$を非例外型アフィンリー環としよう。Kは$\mathfrak{g}$のn ($\mathring{\mathfrak{g}}$のディンキン図の頂点数)$\to\infty$の極限（下の4タイプに分類される）に付随して定義され、対応するフェルミ公式に一致すると予想された(Conj. 6.2)。

◇		ディンキン図
$\varnothing$	$A^{(1)}_{\infty}$	
□□	$C^{(1)}_{\infty}$	
日	$D^{(1)}_{\infty}$	
□	$D^{(2)}_{\infty}$	



さらにKの具体形を調べることにより、◇タイプの$K(K^{\diamondsuit})$は$K^{\varnothing}$とLittlewood-Richardson係数を使って表されることが導かれた。これは非例外型$\mathfrak{g}$のフェルミ公式がA型のフェルミ公式を使って表されることを意味する (Cor. 6.3)。この事実は筆者には予想だにできなかったことで、正直言ってびっくりしました。以下準備をして、Kの定義、上記の関係式、計算例を述べていく。

4 Plethystic notation

この節では plethystic notation[3] と呼ばれる記法を導入する。筆者自身まだ十分習熟しているとは言えないので誤解があるかもしれない。

$$X = x_1 + x_2 + \cdots$$

を係数が1の形式和とし、$x \in X$でxがXに含まれる変数であることを表す。そうすれば

$$Y = y_1 + y_2 + \cdots$$

[3] Λ-ring notation とも呼ばれているようだ。

のとき$z \in X+Y$は$z = x_i$ or y_jを表し、$z \in XY$は$z = x_i y_j$を表す。また、tはx_iのような変数とは異なるパラメータと思い、

$$tX = tx_1 + tx_2 + \cdots$$

によりx_iにtx_iを代入したことを表す。Cauchy element $\Omega[X] \in$ (Λを完備化したもの)を

$$\Omega[X] = \prod_{x \in X} (1-x)^{-1}$$

により導入する。すると$\Omega[X]$は指数則

$$\Omega[X+Y] = \Omega[X]\Omega[Y]$$

を満たすことになる。これにより$\Omega[-X]$はx_iに$-x_i$を代入して$\prod_{x \in X}(1+x)^{-1}$と解釈するのは適当でなく、

$$\Omega[-X] = \prod_{x \in X} (1-x)$$

と解釈するのが正しい[4]。また、$h_r, e_r \in \Lambda$をそれぞれ homogeneous symmetric function, elementary symmetric function ([M]参照)とすると

$$\Omega[tX] = \prod_{x \in X}(1-tx)^{-1} = \sum_{r \geq 0} t^r h_r, \quad \Omega[-tX] = \prod_{x \in X}(1-tx) = \sum_{r \geq 0}(-t)^r e_r$$

が成立する。また、$\mathcal{P}$を分割全体の集合とすると

$$\Omega[XY] = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda[X] s_\lambda[Y]$$

がいわゆる Cauchy formula となる。ただし、$s_\lambda[X]$はXに変数を持つご存知 Schur function である。

5 Λ上の adjoint multiplication と$s_\lambda^\diamondsuit$の定義

Λ上には$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$により内積が入る。この内積に関する$f$の$g$への adjoint multiplication $f^\perp g$ $(f, g \in \Lambda)$を

$$\langle f^\perp g, s_\lambda \rangle = \langle g, f s_\lambda \rangle \quad \text{for } \forall \lambda \in \mathcal{P}$$

で定義する。これは次と同値である。

$$f^\perp g = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \langle g, f s_\lambda \rangle s_\lambda$$

$\Diamond$	$\mathcal{P}^{\Diamond}$	$f_{\Diamond}$	$\Omega[f_{\Diamond}]$
$\varnothing$	$\{\emptyset\}$	0	1
$\square\!\square$	$\{2\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$	h_2	$\prod_{i\le j}(1-x_ix_j)^{-1}$
$\boxminus$	$\{(2\lambda)' \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$	e_2	$\prod_{i<j}(1-x_ix_j)^{-1}$
$\square$	$\mathcal{P}$	e_1+e_2	$\prod_i(1-x_i)^{-1}\prod_{i<j}(1-x_ix_j)^{-1}$

4つのシンボル$\Diamond=\varnothing,\square\!\square,\boxminus,\square$に対し、天下り的であるが$\mathcal{P}^{\Diamond}, f_{\Diamond}$を上のように定義しよう。$\mathcal{P}^{\Diamond}$は$\Diamond$を最小単位として作られるヤング図（分割）の集合であり、$\Omega[f_{\Diamond}]$は$X=f_{\Diamond}$のときの plethysitic notation による$\Omega[X]$である。このような記号のもとにリトルウッドの公式[L]は次のように簡潔に書かれることになる。

$$\Omega[f_{\Diamond}]=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^{\Diamond}} s_\lambda$$

また Schur function の$\Diamond$版として、$s_\lambda^{\Diamond}$を

$$s_\lambda^{\Diamond} \overset{\mathrm{def}}{=} \Omega[-f_{\Diamond}]^{\perp} s_\lambda$$

で定義する。

Remark 5.1 $\Diamond=\square\!\square,\boxminus$のときはそれぞれ*[KT]*で定義されている$sp_\lambda, o_\lambda$である。

このの$s_\lambda^{\Diamond}$は次の性質をもつ。

(i) $\{s_\lambda^{\Diamond}\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$は$\Lambda$の基底

(ii) Jacobi-Trudi型の行列式表示をもつ。

(iii) 構造定数は$\Diamond(\neq\varnothing)$によらない。すなわち、$s_\lambda^{\Diamond}s_\mu^{\Diamond}=\sum_\nu {}^{\Diamond}c_{\lambda\mu}^{\nu}s_\nu^{\Diamond}$とすると${}^{\square\!\square}c_{\lambda\mu}^{\nu}={}^{\boxminus}c_{\lambda\mu}^{\nu}={}^{\square}c_{\lambda\mu}^{\nu}$.

(iv) 適当な特殊化のもとで、$s_\lambda^{\square\!\square}$は$sp(2n)$の、$s_\lambda^{\boxminus}$は$o(2n)$および$o(2n+1)$の指標を与える。

6 放物型ホール・リトルウッド生成作用素の$\Diamond$版

$$\begin{aligned} Z &= z_1+z_2+\cdots+z_n \\ Z^* &= \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n} \end{aligned}$$

[4] [Z],[SZ]の論文を読んだとき、これに気付かず相当悩みました。

とおき Bernstein operator のtアナログを

$$\tilde{B}(Z) = R(Z)\Omega[ZX]\Omega[(t-1)Z^*X]^{\perp}$$

$$R(Z) = \prod_{1\le i<j\le n} (1 - z_j/z_i)$$

で定義する。

Remark 6.1 *Zabrocki[Z]は一般のΛ上の作用素に対し、そのtアナログを定義しており、上の $\tilde{B}(Z)$は Bernstein operator $B(Z)(=\tilde{B}(Z)|_{t=0})$に対してその処方箋を適用したものである。*

さらに、この節のタイトルの作用素を

$$H^{\diamondsuit}(Z) = \Omega[f_{\diamondsuit}[tX] - f_{\diamondsuit}[X]]^{\perp}\tilde{B}_{t\to t^2}(Z)\Omega[f_{\diamondsuit}[X] - f_{\diamondsuit}[tX]]^{\perp}$$

で定め、

$$H^{\diamondsuit}(Z) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} z^{\mu} H^{\diamondsuit}_{\mu}$$

と展開して、ヤング図（分割）の列$R = (R_1, R_2, \ldots, R_L)$に対し、

$$\mathbb{H}^{\diamondsuit}_{R}[X;t] = H^{\diamondsuit}_{R_1} H^{\diamondsuit}_{R_2} \cdots H^{\diamondsuit}_{R_L} \cdot 1$$

と定義する[5]。この$\mathbb{H}^{\diamondsuit}_{R}[X;t]$を用いて$t$の多項式$K^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t)$を

$$\mathbb{H}^{\diamondsuit}_{R}[X;t] = \sum_{\lambda} K^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t) s^{\diamondsuit}_{\lambda}(X)$$

と定義する。すると Shimozono-Zabrocki の予想は次のように与えられる。

Conjecture 6.2 *[SZ]* Rを長方形型ヤング図の幅が非増加となるよう並べられた列とし、$M^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t)$を 2 節で説明したフェルミ公式の極限とする。このとき、

$$K^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t) = t^{2(\|R\| + |R| - |\lambda|)} M^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t^{2/\epsilon})$$

が予想される。ただし、

$$\begin{aligned} \|R\| &= \sum_{i<j} |R_i \cap R_j|, \\ \epsilon &= \begin{cases} 1 & (\diamondsuit = \varnothing, \sqsubset\!\sqsupset, \boxminus) \\ 2 & (\diamondsuit = \square). \end{cases} \end{aligned}$$

---

[5] $\diamondsuit = \varnothing, R_j = (\mu_j)$のとき、この多項式はホール・リトルウッド関数$P_{\mu}(X;t^2)$に一致することが知られている。

この予想を仮定すると次のようなフェルミ公式同士の関係式が得られる。これらはフェルミ公式をじっと見ているだけでは到底予想できなかったものである。

Corollary 6.3

$$M^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t) = t^{\frac{\epsilon}{2}(|\lambda|-|R|)} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{P} \\ |\tau|=|R|}} M^{\varnothing}_{\tau R}(t^{\epsilon}) \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{P}^{\diamondsuit} \\ |\mu|=|R|-|\lambda|}} c^{\tau}_{\lambda\mu}$$

$c^{\tau}_{\lambda\mu}$はLittlewood-Richardson係数である。この式はA型以外のタイプのフェルミ公式をA型のものと関係づけている。また、転置に関する対称性も得られる。

Corollary 6.4

$$M^{\diamondsuit^t}_{\lambda^t R^t}(t) = t^{-\epsilon(\|R\|+|R|-|\lambda|)} M^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t^{-1})$$

ただし、^{t}はヤング図の転置を表し、$R^t = (R^t_1, R^t_2, \ldots, R^t_L)$である。

7 計算例

この節では、$\diamondsuit = \square\square, R = (\square, \square, \square)$の簡単な場合に$K^{\diamondsuit}_{\lambda R}(t)$を実際に計算してみることにする。リトルウッド[L]により

$$\begin{aligned} \Omega[-f_{\diamondsuit}] &= \Omega[f_{\diamondsuit}]^{-1} \\ &= \sum_{\mu=(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\ldots,\alpha_p+1|\alpha_1,\ldots,\alpha_p)} (-1)^{|\mu|/2} s_{\mu} \\ &= 1 - s_2 + s_{31} - \cdots \end{aligned}$$

が知られている。ただし、$\sum$記号に現れる$(\alpha|\beta)$はフロベニウスの記号によるヤング図を表す。よって、$s^{\diamondsuit}_{\lambda}$は

$$s^{\diamondsuit}_{\lambda} = \Omega[-f_{\diamondsuit}]^{\perp} s_{\lambda} = \sum_{\mu} \langle s_{\lambda}, (1 - s_2 + s_{31} - \cdots) s_{\mu} \rangle s_{\mu}$$

により計算される。いくつか具体例を計算すると、

$$\begin{aligned} &s^{\diamondsuit}_{\varnothing} = s_{\varnothing}, s^{\diamondsuit}_1 = s_1, s^{\diamondsuit}_2 = s_2 - s_{\varnothing}, s^{\diamondsuit}_3 = s_3 - s_1 \\ &s^{\diamondsuit}_{11} = s_{11}, s^{\diamondsuit}_{21} = s_{21} - s_1, s^{\diamondsuit}_{111} = s_{111} \end{aligned}$$

となる。これらを逆に解いて

$$\begin{aligned} &s_{\varnothing} = s^{\diamondsuit}_{\varnothing}, s_1 = s^{\diamondsuit}_1, s_2 = s^{\diamondsuit}_2 + s^{\diamondsuit}_{\varnothing}, s_3 = s^{\diamondsuit}_3 + s^{\diamondsuit}_1 \\ &s_{11} = s^{\diamondsuit}_{11}, s_{21} = s^{\diamondsuit}_{21} + s^{\diamondsuit}_1, s_{111} = s^{\diamondsuit}_{111} \end{aligned}$$

も得られる。次に$Z=z\ (n=1)$のときの$\tilde{B}(Z)$を考える。

$$\tilde{B}(z)=\Omega[zX]\Omega[\frac{t-1}{z}X]^{\perp}$$

より

$$\tilde{B}(z)s_\lambda=\sum_{r\geq 0}z^r h_r\cdot\sum_{\mu}\langle s_\lambda,\sum_{p\geq 0}\left(\frac{t}{z}\right)^p h_p\cdot\sum_{q\geq 0}\left(\frac{-1}{z}\right)^q e_q\cdot s_\mu\rangle s_\mu$$

となる。いくつか具体例を計算すると

$$\tilde{B}_1\cdot 1=s_1,\quad \tilde{B}_1\cdot s_1=ts_2+s_{11},$$
$$\tilde{B}_1\cdot s_2=t^2s_3+ts_{21},\quad \tilde{B}_1\cdot s_{11}=ts_{21}+s_{111}$$

となる。今の場合◇版ホール・リトルウッド生成作用素は

$$\begin{aligned}
H^{\diamond}(z) &= Q[X]^{\perp}\tilde{B}(z)P[X]^{\perp}\\
P[X] &= \prod_{i\leq j}\frac{1-tx_ix_j}{1-x_ix_j}=Q[X]^{-1}\\
P[X] &= 1+(1-t)s_2+\cdots,\quad Q[X]=1-(1-t)s_2+\cdots
\end{aligned}$$

で与えられる（ただし、$t \to t^{1/2}$）ので、具体例を計算すると

$$
\begin{aligned}
H^{\diamond}\cdot 1 &= s_1 \\
H^{\diamond}\cdot s_1 &= Q^{\perp}\cdot(ts_2+s_{11}) \\
&= t\sum_{\mu}\langle s_2,(1-(1-t)s_2+\cdots)s_\mu\rangle s_\mu \\
&\quad +\sum_{\mu}\langle s_{11},(1-(1-t)s_2+\cdots)s_\mu\rangle s_\mu \\
&= t(s_2-(1-t))+s_{11} \\
&= ts_2+s_{11}-t(1-t) \\
H^{\diamond}\cdot s_2 &= Q^{\perp}\tilde{B}_1(s_2+(1-t)) = Q^{\perp}(t^2s_3+ts_{21}+(1-t)s_1) \\
&= t^2\sum_{\mu}\langle s_3,(1-(1-t)s_2+\cdots)s_\mu\rangle s_\mu \\
&\quad +t\sum_{\mu}\langle s_{21},(1-(1-t)s_2+\cdots)s_\mu\rangle s_\mu \\
&\quad +(1-t)\sum_{\mu}\langle s_1,(1-(1-t)s_2+\cdots)s_\mu\rangle s_\mu \\
&= t^2(s_3-(1-t)s_1)+t(s_{21}-(1-t)s_1)+(1-t)s_1 \\
&= t^2s_3+ts_{21}+(1-t)(1-t-t^2)s_1 \\
H^{\diamond}\cdot s_{11} &= Q^{\perp}\tilde{B}_1s_{11} = Q^{\perp}(ts_{21}+s_{111}) \\
&= t(s_{21}-(1-t)s_1)+\sum_{\mu}\langle s_{111},(1-(1-t)s_2+\cdots)s_\mu\rangle s_\mu \\
&= t(s_{21}-(1-t)s_1)+s_{111}
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\diamond}_{R=(\square,\square,\square)}(X;t) &= t(t^2s_3+ts_{21}+(1-t)(1-t-t^2)s_1) \\
&\quad +ts_{21}-t(1-t)s_1+s_{111} \\
&\quad -t(1-t)s_1 \\
&= t^3s_3+(t^2+t)s_{21}+s_{111}-t(1-t)(1+t+t^2)s_1 \\
&= t^3s^{\diamond}_3+(t^2+t)s^{\diamond}_{21}+s^{\diamond}_{111}+t^2(1+t+t^2)s^{\diamond}_1
\end{aligned}
$$

となり、$K^{\diamond}_{(3)R}(t)=t^3, K^{\diamond}_{(21)R}(t)=t^2+t, K^{\diamond}_{(111)R}(t)=1, K^{\diamond}_{(1)R}(t)=t^2(1+t+t^2)$が得られ、確かにConj. 6.2（の右辺で$t\to t^{1/2}$としたもの）が成立していることが確認できる。

References

[HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, Prog. Math. Phys. **23** (2002) 205–272, Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Contemp. Math. **248** (1999), 243–291.

[K] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1990.

[KT] K. Koike and I. Terada, *Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n*, J. Algebra **107** (1987) 466–511.

[L] D. E. Littlewood, *The theory of group characters and matrix representation of groups*, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1950.

[M] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[SZ] M. Shimozono and M. Zabrocki, *Deformed universal characters for classical and affine algebras*, preprint.

[Z] M. Zabrocki, *q-Analogs of symmetric function operators*, Disc. Math. **256** (2002) 831–853.