

売り出しのタイミング・ゲームと Nash 平衡

大阪府立大学 総合科学部・理学系研究科 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

大阪府立大学 総合科学部・理学系研究科 北條仁志 (Hitoshi Hohjo)

Department of Mathematics and Information Sciences
Osaka Prefecture University

Abstract

本報告では、先に提案したあるクラスのタイミング型 2 人非 0 和無限ゲームに対して、より一般的な立場から Nash 平衡の意味での解を導く。ある市場においてある生産物を複占している 2 つの企業が、互いにこの生産物を売りに出すタイミングを競っている。この生産物の価値は周期的に収穫でき、各期間において時間の経過に伴って増加するが、相手が先に売り出すと不連続的に価値が減少し、その後はまた時間の経過とともに増加する。両企業とも次の期までには、自分の所有している生産物を売ってしまわなければならない。各企業にとっての売り出しのタイミング、すなわち互いに相手の売り出し時刻を考慮に入れた上での、自分にとっての最適な売り出し時刻を決めることが目的となる。このゲームの Nash 平衡は、生産物の各期首における価値と各期末のそれとの大小関係の組み合わせに依存して決まってくるのがわかる。

1. はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする 2 人非 0 和ゲームである。

2 人のプレーヤ (Player I, II) が、小豆や大豆と言った生産物の販売をある市場で複占している。I と II による市場占有率は半々であり、お互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫でき各期の初めに生産されると、2 人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すかのタイミングを考えなければならない。両プレーヤは、次の期には新しい収穫があるので、この生産物を各期の終わりまでには売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、両プレーヤのいずれもが売りに出さない間は時間の経過に伴って上昇する。しかし、いずれか一方のプレーヤが自分の持分を売りに出すと急激に (不連続的に) 評価額が下落し、その後また時間の経過に従って上昇する。2 人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額と、相手プレーヤの売りだし時刻を考えに入れながら、売り出しのタイミングを決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。本研究集会では、素朴な第一歩を報告する。

このような問題にあっては、通常のタイミングゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。一方のプレーヤが売りに出した瞬間、そのことが直ちに相手プレーヤに知らされる場合、彼は、ノイジーな状態にあると言われる。逆に、一方のプレーヤが何時売りに出しても、相手にそのことが連絡されず、彼が既に売りに出したのかまだ売りに出していないのかを相手が知らない状態にあるとき、彼は、サイレントな状態にあると言う。

この情報様式の組み合わせにより、以下三つの型のゲームが考えられる：

1. 両プレーヤともにサイレントな状態にある。
2. 両プレーヤともにノイジーな状態にある。
3. Player I はサイレントな状態にあるが、Player II はノイジーな状態にある。

2. 記号と仮定

本報告では1期間のゲームを考え、期間は単位区間 $[0, 1]$ で表現する。

$v(t)$: 両プレーヤともにまだ売りに出していないときの、時刻 $t \in [0, 1]$ における生産物の価値

微分可能であり $v'(t) > 0$ for $t \in (0, 1)$ を仮定する。

r : 一方のプレーヤが既に売りに出したときの割引率で、

$$0 < r < 1$$

と仮定。すなわち一方のプレーヤが既に売りに出した後は、

$t \in [0, 1]$ での評価額は $v(t)$ から $rv(t)$ へ減少する。

我々はまた、 $0 < v(0) < \infty$ を仮定する。

ここで、もし二人のプレーヤが同時に時刻 $t \in [0, 1]$ で売りに出したときは、評価額 $v(t)$ を半分ずつ分け合うことになるとする。

本報告では、応用上自然と考えられる制約： $v(0) < rv(1)$ を仮定した場合に関しての解析と結果をまとめ、続いてこの仮定を外した場合の結果について報告する。

3. サイレントゲーム

ここでは、二人ともサイレントな状態にあるものとする。お互いに、相手が既に売りに出したのか、まだ出していないのかわからず、自分が売りに出してから始めて、生産物の評価額を知ることとなる。従って、Player I と Player II の純戦略をそれぞれ、 $x \in [0, 1]$ と $y \in [0, 1]$ とすると、I への期待利得 $M_1(x, y)$ と II への期待利得 $M_2(x, y)$ は次のように与えられる：

$$M_1(x, y) = \begin{cases} v(x), & x < y \\ (1/2)v(x), & x = y \\ rv(x), & x > y \end{cases} ; \quad (1)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} v(y), & y < x \\ (1/2)v(y), & y = x \\ rv(y), & y > x \end{cases} \quad (2)$$

両利得関数の形と構造から、Player I と II は、ある区間 $(a, 1)$ 上の密度部分 $f(x) > 0$ と点 1 での可能な mass 部分 $\alpha > 0$ とで構成される混合戦略(cdf) $F(x)$ を用いるものとする。ここに、 $0 < a < 1$ である。そうすると

$$M_2(F, y) = \begin{cases} v(y), & y < a \\ v(y)[1 - (1-r)F(y)], & a < y < 1 \\ v(1)[(1/2)\alpha + (1-\alpha)r], & y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

を得る。そこで

$$M_2(F, y) = \text{constant} \quad \text{for } y \in (a, 1)$$

が成立するようにすると

$$v(y)[1 - (1-r)F(y)] = (1-r)f(y)v(y), \quad y \in (a, 1)$$

が得られるので、結局

$$F(z) = [1/(1-r)] [1 - \{k/v(z)\}], \quad a < z < 1$$

が成立しなければならないこととなる。ここに k は積分定数である。ところで

$$F(a) = 0 \quad \text{かつ} \quad F(1) = 1 - \alpha$$

であるから

$$k = v(a) ; \quad (1-\alpha)(1-r) = [1 - \{v(a)/v(1)\}]$$

でなければならない。そこで $\alpha = 0$ と置くことにより

$$v(a) = rv(1), \quad 0 < a < 1$$

かつ

$$M_2(F, y) = v(y) < v(a), \quad y < a \\ = v(a), \quad a < y < 1$$

が成立する。 $v(t)$ は $t \in [0, 1]$ につき狭義単調増加関数であるから、 a は $[0, 1]$ 内で唯一つ存在する。

以上の議論より定理 1 をうる。

定理 1. いま a^0 を方程式 $v(a) = rv(1)$ の区間 $[0, 1]$ に於ける唯一つの根とし、さらに、混合戦略として

$$F^0(z) = 0, \quad 0 < z < a^0 \\ = [1/(1-r)][1 - \{1 - v(a)/v(z)\}], \quad a^0 \leq z \leq 1$$

とする。そうすると $(F^0(x), F^0(y))$ は非 0 和ゲーム(1)と(2)に対しての 1 つの平衡点である。また、対応する I に対しての平衡値 v_1 と II に対しての平衡値 v_2 は

$$\begin{cases} v_1 = M(F^0, F^0) = rv(1) ; \\ v_2 = M(F^0, F^0) = rv(1) \end{cases}$$

となる。

4. ノイジーゲーム

ここでは、両プレーヤともノイジープレーヤである場合を扱う。Player I と II の純戦略を、それぞれ、 $x \in [0, 1]$ と $y \in [0, 1]$ であるとする。ここに、戦略 x とは、I は x を決め、もし II がこの x までに自分の生産物を売りに出さなければ x で売りに出し、II が x までに既に売りに出しておれば $rv(t)$ 細大にする時刻 1 まで待ってから売りに出すことを意味する。戦略 y についても同様に定義される。そうすると、I への期待利得 $M_1(x, y)$ と II への期待利得 $M_2(x, y)$ は次式のように与えられる：

$$M_1(x, y) = \begin{cases} v(x), & x < y \\ (1/2)v(x), & x = y \\ rv(1), & x > y \end{cases} ; \quad (4)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} v(y), & y < x \\ (1/2)v(y), & y = x \\ rv(1), & x > y \end{cases} . \quad (5)$$

利得関数の形と構造から、純戦略の中に平衡戦略は存在しない。さらに、前節のような密度部分と mass 部分とで構成される cdf のクラスの中にも見つけることが出来ない。これは $x = y$ での利得関数に $1/2$ の係数がかかっていることに原因している。そこで、我々は次のような混合戦略 $G(z)$ を考察する。

今 a を方程式 $v(a) = rv(1)$ の区間 $[0, 1]$ に於ける唯一つの根、すなわち

$$a = v^{-1}(rv(1)), \text{ ここに } v^{-1}(\cdot) \text{ は } v(t) \text{ の逆関数}$$

とする。そこで、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 δ を

$$\delta = v^{-1}(rv(1) + \varepsilon) - a = v^{-1}(rv(1) + \varepsilon) - v^{-1}(rv(1)) > 0$$

となるように選び、そして

$$G^{\circ}(z) = \begin{cases} 0, & z < a \\ (1/\delta), & a < z < a + \delta \\ 0, & z > a + \delta \end{cases} \quad (6)$$

とおく。そうすると

$$M_2(G^{\circ}, y) = \begin{cases} v(y) < v(a) = rv(1), & y < a \\ \int_a^y \{rv(1)/\delta\} dx + \int_y^{y+\delta} \{v(x)/\delta\} dx, & a \leq y \leq y + \delta \\ rv(1), & y > a + \delta \end{cases} \quad (7)$$

を得る。そうすると

$$M_2(G, y) = rv(1) \int_a^y (1/\delta) dx + v(y) \int_y^{a+\delta} (1/\delta) dx$$

$$\begin{aligned}
 &< rv(1) \{(y-a)/\delta\} + v(a+\delta) \{(a+\delta-y)/\delta\} \\
 &= rv(1) \{(y-a)/\delta\} + \{rv(1) + \varepsilon\} \{(a+\delta-y)/\delta\} \\
 &= rv(1) + \varepsilon \{1+(a-y)/\delta\} \\
 &< rv(1) + \varepsilon, \quad a \leq y \leq a + \delta
 \end{aligned}$$

であるから、次の関係が成立する：

$$M_2(G^{\circ}, y) \begin{cases} < rv(1), & y < a \\ < rv(1) + \varepsilon, & a \leq y \leq a + \delta \\ = rv(1), & y > a + \delta. \end{cases} \quad (8)$$

全く同様な議論が $M_1(x, G^{\circ})$ に対しても成立する。

以上の議論より、次の定理が成立する。

定理2. a^0 を方程式 $v(a) = rv(1)$ の区間 $[0, 1]$ に於ける唯1つの根とし、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$G(z) = \begin{cases} 0, & z < a^0 \\ (1/\delta), & a^0 \leq z \leq a^0 + \delta \\ 0, & z > a^0 + \delta \end{cases}$$

とする。ここに δ は

$$\delta = v^{\uparrow}(rv(1) + \varepsilon) - v^{\uparrow}(rv(1)) > 0.$$

そうすると $(G^0(x), G^0(y))$ は非0和ゲーム (4) と (5) の1つの ε 平衡点である。すなわち、任意の混合戦略 (cdf) に対して

$$\begin{cases} M_1(F, G^0) < rv(1) + \varepsilon; \\ M_2(G^0, F) < rv(1) + \varepsilon, \end{cases}$$

が成立する。

5. $rv(1) \leq v(0)$ に対して

前節までは、この種のモデルに関しては、自然と考えられる仮定 $rv(1) > 1$ を前提として解析し、Nash 平衡点を導いてきたが、本節では、一般化を追求する意味で $rv(1) \leq v(0)$ を仮定した時に目を向ける。

まずサイレントゲームに関して考察しよう。第3節の(3)式を観察するとこの仮定の下では $a = 0$ すなわち $\alpha = 0$ とすることが出来ないので、Player I と Player II は、ある区間 $(a, 1)$ 上の密度部分 $f(z) > 0$ と点 0 での可能な mass 部分 $\alpha \geq 0$ および点 1 での可能な mass 部分 $\beta \geq 0$ とで構成される混合戦略 $F(x)$ を用いるものとする。そうすると、次の(9)と(10)が得られる。

$$M_1(F, y) = \begin{cases} v(0) [(1/2)\alpha + (1-\alpha)], & y = 0 \\ v(y) [1 - (1-r)F(y)], & 0 < y < 1 \\ v(1) [(1/2)\beta + (1-\beta)r], & y = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$M_2(x, F) = \begin{cases} v(0) [(1/2)\alpha + (1-\alpha)], & x = 0 \\ v(x) [1 - (1-r)F(x)], & 0 < x < 1 \\ v(1) [(1/2)\beta + (1-\beta)r], & x = 1 \end{cases} \quad (10)$$

ここに、 $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ かつ $0 < \alpha + \beta < 1$ である。

そこで密度部分 $f(z)$ を第3節でのそれと同じ、すなわち互いに相手プレーヤが $(0, 1)$ 内でのどのような純戦略を選んでも常に一定の期待利得を与えるような混合戦略となるように選ぶとすると、各プレーヤはお互いに $\alpha\beta=0$ とせざるを得なくなる。従って

$\alpha = 1$ とすると

$$M_1(F, y) = \begin{cases} (1/2)v(0), & y = 0 \\ rv(y), & 0 < y < 1 \\ rv(1), & y = 1 \end{cases} ; \quad M_2(x, F) = \begin{cases} (1/2)v(0), & x = 0 \\ rv(x), & 0 < x < 1 \\ rv(1), & x = 1 \end{cases}$$

が成立するので、以下のような結果を得る。

定理3. $(1/2)v(0) \leq rv(1) \leq v(0)$ が成立すると仮定する。次のような二つの混合戦略を考える：

$$\begin{aligned} F_1(z) &= 1 - [1/(1-r)][1 - \{rv(1)/v(0)\}], & z = 0 \\ &= [1/(1-r)][1 - \{rv(1)/v(z)\}], & 0 < z \leq 1 ; \\ F_0(z) &= [1/(1-r)][1 - \{rv(0)/v(z)\}], & 0 \leq z < 1 \\ &= 1 - [1/(1-r)][1 - \{rv(0)/v(1)\}], & z = 1, \end{aligned}$$

すなわち、前者は点1に、後者は点0に、それぞれ mass part を持つように混合戦略 (cdf) を選ぶ。そうすると $(F_1(x), F_0(y))$ および $(F_0(x), F_1(y))$ は非0和ゲーム (1) と (2) の平衡点である。この時、対応する平衡値は

$$\begin{cases} M_1(F_1, F_0) = v(0) \\ M_2(F_0, F_1) = rv(1) \end{cases} \quad \begin{cases} M_1(F_0, F_1) = rv(1) \\ M_2(F_1, F_0) = v(0) \end{cases}$$

となる。

定理4. $rv(1) < (1/2)$ を仮定する。そうすると $(0, 0)$ は非0和ゲーム (1) と (2) の Nash 平衡点となる。この時、対応する平衡値は

$$M_1(0, 0) = M_2(0, 0) = (1/2)v(0)$$

となる。

この定理は、時間が次の周期までのいっぱい経過しても、それ程生産物の価値が上がらない時は、両プレーヤとも出来るだけ早くその生産物を売りに出すのが最適となる、ことを意味する。

次に、ノイジーゲームについて考察する。利得関数(4)と(5)を観察し第4節の議論を詳しく吟味すると、次の定理に到達する。

定理5. 非0和ゲーム(4)と(5)に対して、(0, 0)はNash平衡点となる。また、対応する平衡値は

$$M_1(0, 0) = M_2(0, 0) = (1/2)v(0)$$

となる。

この定理は、ノイジーゲームに対しては、相手の売り出し時刻が情報として伝えられるため、やはり $rv(0)$ の値が $v(1)$ に比べて小さい場合は、出来るだけ早く売り出すのが最適となることを意味する。

6. 今後への残された問題

i) サイレント・ノイジーゲームへの展開。

プレーヤIはサイレンとプレーヤで、IIはノイジープレーヤの時

ii) N人ゲームへの一般化。

iii) ここでは、 r を定数と仮定したが、経過時刻 t $[0, 1]$ の関数とした時は複雑ではあるが、現実的であり面白い。

iv) より現実的なモデルへの展開。

参考文献

1. M. Dresher, *Games of Strategy : Theory and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
2. S. Karlin, *Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics 2*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
3. Y. Teraoka and Y. Yamada, *Games of production development in manufacturing*, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems 445, Stochastic Modelling in Innovative Manufacturig, Springer, Berlin, 1997, 58-67.
4. Y. Teraoka and H.Hohjo, *N-person games on territory*, Game Theory and Applications v , Nova Science Publishers, Inc., New York, 2000, 134-141.