数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 80-86

二次 L 関数の値分布について
On value distribution of quadratic L-functions

名越 弘文 (Nagoshi Hirofumi) 新潟大学 (Niigata University)
見正 秀彦 (Mishou Hidehiko) 名大多元数理 (Nagoya University)

1 導入

$\mathbb{D}=\{s=\sigma+it\in\mathbb{C}|\frac{1}{2}<\sigma<1\}$ を critical strip、$\zeta(s)$ を Riemann zeta 関数とする。1910 年代の H.Bohr の研究以来、Riemann zeta 関数の値分布についていくつかの結果が知られている。その中でも S.M.Voronin [7] の得た次の結果は興味深いものである。

Voronin (1975).
$0<r<\frac{1}{4}$, $f(s)$ を $|s|\leq r$ 上零点を持たない連続関数で、$|s|<r$ 内で正則なものとする。このとき任意の正数 ε に対し、次の不等式が成り立つ。

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu\left\{t\in[0,T]\mid\max_{|s|\leq r}\left|\zeta(s+\frac{3}{4}+it)-f(s)\right|<\varepsilon\right\}>0$$

ここで μ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度。

大雑把に述べると、この定理は任意の正則関数は $\zeta(s)$ の適当な垂直方向への平行移動 $\zeta(s+it)$ でコンパクト一様近似でき、しかも近似を与える t は実数全体で正の密度で存在することをあらわしている。この性質を $\zeta(s)$ の普遍性とよぶ。

各 Dirichlet 指標 χ に対し Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ も t-aspect の普遍性を有するが、それだけでなく、Dirichlet 指標をパラメーターとして動かしたときも同様の普遍性が成り立つ。

Bagchi [1], Gonek [3]
$p_1,\cdots,p_r$ を素数、C を $\mathbb{D}$ 内の単連結コンパクト集合、関数 $f(s)$ を C 上零点を持たない連続関数で、C の内部で正則なものとする。このとき、任意の正数 ε に対し、

$$\liminf_{q\to\infty}{}' \frac{1}{\phi(q)}\sharp\left\{\chi\ (\mathrm{mod}\ q)\mid\max_{s\in C}|L(s,\chi)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0$$

ここで $\phi(q)$ は Euler 関数とする。$\liminf'$ は $\liminf$ で q の動かし方を、
(i)q を素数に制限

又は
(ii)q を $p_1, \cdots, p_r$ により生成される整数に制限
したものと考える。

今回の講演では、この Dirichlet L 関数の指標に関する普遍性が、二次指標に制限しても成立する事を報告する。

2 結果

以下、D は判別式、d は基本判別式を表すとする。$\chi_D(\cdot) = (\frac{D}{\cdot})$ を Kronecker symbol とする。

Theorem 1. 関数 $f(s)$ を $\mathbb{D}$ 内の零点を持たない正則関数で、実軸上の区間 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内で正値をとるもの、C を $\mathbb{D}$ 内のコンパクト集合とする。このとき、任意の正数 ε に対し、次の 3 つの不等式が成り立つ。

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{1}{\sharp\{0 < d \leq X\}} \sharp \left\{ 0 < d \leq X \mid \max_{s\in C} |L(s,\chi_d) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{1}{\sharp\{-X \leq d < 0\}} \sharp \left\{ -X \leq d < 0 \mid \max_{s\in C} |L(s,\chi_d) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{1}{\sharp\{0 < p \leq X\}} \sharp \left\{ 0 < p \leq X \mid \max_{s\in C} |L(s,\chi_p) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

ここで p は素数判別式を表すとする。

定理 1 の系として次の結果が得られる。

Corollary 1. $s_0 = \sigma_0 + it_0, \frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$ を固定する。

1. $t_0 \neq 0$ ならば、L 関数の値の集合

$$\{L(s_0,\chi_d) | d > 0\},\ \{L(s_0,\chi_d) | d < 0\},\ \{L(s_0,\chi_p) | p > 0\}$$

はそれぞれ $\mathbb{C}$ 内で稠密となる。

2. $t_0 = 0$ ならば、

$$\{L(\sigma_0,\chi_d) | d > 0\},\ \{L(\sigma_0,\chi_d) | d < 0\},\ \{L(\sigma_0,\chi_p) | p > 0\}$$

はそれぞれ $\mathbb{R}_{>0}$ 内で稠密となる。

定理 1 の直接の系としては、$\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$ という条件は外せないが、別の議論により、$\Re s = 1$ 上での稠密性も成り立つことが分かる（[4] 参照)。特に $s_0 = 1$ と取ると、類数公式との組合わせから次が得られる。

Corollary 2. 集合

$$\left\{\frac{h(d)\log\epsilon(d)}{\sqrt{d}} \mid d>0\right\},\quad \left\{\frac{h(d)}{\sqrt{|d|}} \mid d<0\right\}$$

はそれぞれ $\mathbb{R}_{>0}$ 内で稠密となる。ここで $h(d)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数、$\epsilon(d)$ は基本単数。

Corollary 3. n を正の正数、$\frac{1}{2}<a<b<1$ とする。このとき、適当な基本判別式 d をとれば、一階微分 $L'(s,\chi_d)$ は区間 $[a,b]$ 上少なくとも n 個の零点をもつ。

3 定理 1 の証明の概略

定理 1 の一つ目の不等式を証明する。ここでは議論を簡単にする為、基本判別式 d の代わりに判別式 D で $D\equiv 1 \pmod 8$、つまり $\chi_D(2)=1$ を満すものについて主張を証明する。以下、$M_X=\{0<D\leq X \mid D\equiv 1 \pmod 8\}$ とおく。

Lemma 1 ([6],Lemma 8). $X>2$ に対し、$R_X=\{s=\sigma+it \mid \frac{1}{2}+(\log\log X)^{-\frac{1}{2}}\leq\sigma\leq\frac{5}{4},\ |t|\leq\sqrt{\log X}\}$、$h_X=\exp((\log\log X)^{\frac{3}{4}})$ ととる。このとき、$^\forall s\in R_X$ について、

$$\sum_{|D|\leq X}\left|L(s,\chi_D)-\prod_{p\leq h_X}\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|^2 \ll X\exp(-(\log\log X)^{\frac{1}{4}}).$$

Lemma 2. $\nu\geq 3$ に対し、$a_p=\pm 1$ $(3\leq p\leq\nu, p$ は素数$)$ をとる。このとき、

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{\sharp M_X}\sharp\left\{D\in M_X \mid \chi_D(p)=a_p\ (3\leq p\leq\nu)\right\}=\frac{1}{2^{\pi(\nu)-1}}\frac{\phi(Q)}{Q}$$

ここで、$Q=\prod_{3\leq p\leq\nu}p$。

(証明) $\chi_D(p)=1$ となるのは、D が $\frac{p-1}{2}$ 個ある $\bmod p$ の平方剰余類のいずれかに属し、$\chi_D(p)=-1$ となるのは、D が $\frac{p-1}{2}$ 個ある $\bmod p$ の非平方剰余類のいずれかに属す時である。従って、中国式剰余定理から、$\chi_D(p)=a_p$ $(3\leq p\leq\nu)$ となる為の条件は、D が $Q=\prod_{3\leq p\leq\nu}p$ を法とする $\prod_{3\leq p\leq\nu}\frac{p-1}{2}=\phi(Q)2^{-\pi(\nu)+1}$ 個の剰余類のいずれかに属す事である。M_X の定義より、

$$\sharp M_X=\frac{X}{8}+O(\sqrt{X})$$

一方、剰余類 $a \pmod Q$ を一つ固定すると、

$$\sum_{\substack{D\in M_X \\ D\equiv a(Q)}} 1 = \frac{X}{8Q} + O(\sqrt{X})$$

この2式から主張が得られる。　(証明終)

次の補題は Weierstrass の多項式近似定理の Dirichlet 多項式版とでも言うべきものである。一般に稠密補題 (denseness lemma) といい、普遍性の証明の鍵となる。

Lemma 3. $g(s)$ を $\mathbb{D}$ 上の正則関数で、実軸上の区間 $(\frac{1}{2},1)$ 上実数値をとるもの、C を $\mathbb{D}$ 内のコンパクト集合とする。このとき任意の正数 ε に対し、$\nu>0$ を十分大きく取れば、$a_p=\pm1$ $(3\le p\le\nu)$ を

$$\max_{s\in C}\left|g(s)-\sum_{p\le\nu}\log\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1}\right|<\varepsilon$$

が成り立つように取れる。ここで $a_2=1$ とおく。

証明は、$\mathbb{D}$ 上の L^2- 空間内で、関数列 $\{p^{-s}\}_{p\ge2}$ が適当な条件を満している事を、素数定理などを用いて確認する。詳しくは [4] を参照。

それでは定理1の証明に移る。まず、$\varepsilon>0$, $X>0$ に対し次の集合を考える。

$$A_X=\left\{D\in M_X \;\middle|\; \max_{s\in C}\left|L(s,\chi_D)-\prod_{p\le h_X}\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|<\varepsilon\right\} \tag{1}$$

すると、$0<^\forall \varepsilon,\varepsilon'<1$ に対し、X が十分大ならば、

$$\frac{\sharp A_X}{\sharp M_X}>1-\varepsilon' \tag{2}$$

が成り立つ。実際、(2) が成り立たないとすると、(1) より

$$\sum_{D\in A_X^c}\left|L(s,\chi_D)-\prod_{p\le h_X}\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|^2\ge\varepsilon'\varepsilon^2\sharp M_X$$

が成り立たねばならないが、これは補題1の評価に反する。

定理1の仮定より、$\log f(s)$ を区間 $(\frac{1}{2},1)$ 上実数値をとるように定義できる。従って補題2より、$\nu>0$ を

$$\nu^{1-2\sigma_1}<\varepsilon^3 \quad (\sigma_1=\min_{s\in C}\Re s) \tag{3}$$

を満すよう十分大きくとり固定すると、$a_p = \pm 1$ $(3 \le p \le \nu)$ を

$$\max_{s\in C}\left|\log f(s) - \sum_{p\le\nu}\log\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)^{-1}\right| < \varepsilon \tag{4}$$

が成り立つように取れる。この ν, a_p に対し、判別式の集合

$$B_X = \{D \in M_X \mid \chi_D(p) = a_p\ (3 \le p \le \nu)\} \tag{5}$$

を定めると、補題2より、これは正の密度

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\sharp B_X}{\sharp M_X} = \frac{1}{2^{\pi(\nu)-1}}\frac{\phi(Q)}{Q} \tag{6}$$

を持つ。(2)、(6) より ε' を小さく取り、X を十分大きく取れば、$A_X \cap B_X$ は正の密度を持つ。又、$D \in A_X \cap B_X$ について、(1),(4),(5) より、

$$\begin{aligned}
&\max_{s\in C}|L(s,\chi_D) - f(s)| \\
&\le \varepsilon + \max_{s\in C}\left|\prod_{p\le h_X}\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1} - f(s)\right| \\
&\ll_{C,f} \varepsilon + \max_{s\in C}\left|\sum_{p\le h_X}\log\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1} - \log f(s)\right| \\
&\ll_{C,f} 2\varepsilon + \max_{s\in C}\left|\sum_{\nu<p\le h_X}\log\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|.
\end{aligned} \tag{7}$$

そこで、$A_X \cap B_X$ に属す大部分の D について、(7) の第二項が十分小さくなる事を証明する。 $s \in C$ を固定し、二乗平均

$$\sum_{D\in B_X}\left|\sum_{\nu<p\le h_X}\log\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|^2 \tag{8}$$

を計算する。$\log(1-\chi_D(p)p^{-s})$ を Taylar 展開すると、2次以上の項の寄与は無視できる。 また補題2より、$D \in B_X$ となる条件は、Q を法とする合同条件である。従って (8) は

$$\ll \sum_{a}\sum_{\substack{D\in M_X \\ D\equiv a(Q)}}\left|\sum_{\nu<p\le h_X}\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right|^2 \tag{9}$$

ここで a は mod Q の剰余類で補題2の条件を満しているものを表し、その個数は $\phi(Q)2^{-\pi(\nu)+1}$ である。剰余類 a を一つ固定し、絶対値を計算すると、

$$\sum_{\substack{D\in M_X\\ D\equiv a(Q)}}\sum_{\nu<p\le h_X}\frac{1}{p^{2\sigma}}+\sum_{\substack{\nu<p,q\le h_X\\ p\ne q}}\frac{1}{p^s\bar{q}^s}\sum_{\substack{D\in M_X\\ D\equiv a(Q)}}\chi_D(pq)$$
$$\ll\left(\frac{X}{8Q}+O(\sqrt{X})\right)\nu^{1-2\sigma_1}+\sum_{\substack{\nu<p,q\le h_X\\ p\ne q}}\frac{1}{p^s\bar{q}^s}\sum_{\substack{D\in M_X\\ D\equiv a(Q)}}\chi_D(pq) \tag{10}$$

第二項は Q を法とする Dirichlet 指標 λ を用いて、

$$\frac{1}{\phi(Q)}\sum_{\lambda}\bar{\lambda}(a)\sum_{D\in M_X}\lambda(D)\chi_D(pq)$$

と表される。ところで、$\chi_D(pq)=(\frac{D}{pq})$ は pq を法とする指標が D で取る値とみなせる。特に $(Q,p,q)=1$ より、$\lambda(D)\chi_D(pq)$ は pqQ を法とする非単位指標である。 従って Polya-Vinogradov の不等式を用いると、この指標和は

$$\ll\sqrt{X}+(Qpq)^{\frac{1}{2}}\log(Qpq)\ll\sqrt{X}$$

と評価される。ここで $h_X\ll\log X$ を用いた。以上の計算と (3),(9),(10) より

$$\sum_{D\in B_X}\left|\sum_{\nu<p\le h_X}\log\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|^2\ll\varepsilon^3\frac{1}{2^{\pi(\nu)-1}}\frac{\phi(Q)}{Q} \tag{11}$$

が得られる。$B'_X\subset B_X$ を

$$B'_X=\left\{D\in B_X\mid\max_{s\in C}\left|\sum_{\nu<p\le h_X}\log\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|<\varepsilon\right\} \tag{12}$$

と取る。すると補題1と (1) から (2) を得たのと同様の議論により、(6),(11),(12) より

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\sharp B'_X}{\sharp M_X}>\frac{1}{2}\lim_{X\to\infty}\frac{\sharp B_X}{\sharp M_X}=\frac{1}{2^{\pi(\nu)}}\frac{\phi(Q)}{Q}$$

が従う。 これと (2) より、十分小さい $\varepsilon'>0$ をとり固定すると、

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\sharp(A_X\cap B'_X)}{\sharp M_X}>\frac{1}{2^{\pi(\nu)}}\frac{\phi(Q)}{Q}-\varepsilon'>0$$

即ち、$A_X\cap B'_X$ は正の密度を持つ。 又、$D\in A_X\cap B'_X$ に対し、(7),(12) から、

$$\max_{s\in C}|L(s,\chi_D)-f(s)|<\varepsilon$$

が成り立つ。以上で定理1の一つ目の不等式が証明できた。

最後に3つ目の不等式、即ち素数判別式に制限した場合に触れておく。証明の構成はほぼ同様である。補題1の代わりとして、Elliot [2] の結果を用いる。補題2の類似の成立は算術級数の素数定理により保証される。最後に問題となるのは、(10) から (11) を得る途中で、Polya-Vinogradov 不等式を用いた個所であるが、この部分は Siegel-Walfisz の評価

$$\sum_{p\le x}\chi(p) \ll x\exp(-c\sqrt{\log x})$$

で代用できる。詳しくは [5] を参照されたし。

References

[1] B.Bagchi, *The statistical behavior and universality properties of the Rieman zeta-function and other allied Dirichlet series,* Ph. D. Thesis, Calcutta, Indian Stastical Institute, (1981).

[2] P.D.T.A. Elliot, *On the distribution of the values of quadratic L-series in the half-place* $\sigma > \frac{1}{2}$, Invent. Math. 23 (1973), 319-338.

[3] S.M.Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions,* Ph. D. Thesis. University of Michigan., (1979).

[4] H. Mishou and H.Nagoshi, *Functional distribution of* $L(s,\chi_d)$ *with real characters and denseness of quadratic class numbers,* preprint

[5] H.Mishou and H.Nagoshi, *On the distributions of L- functions and class numbers for quadratic fields with prime discriminants* (仮), 現在執筆中.

[6] E.Stankus, *Distribution of Dirichlet L-functions with real characters,* Litovsk. Mat. Sb. 15(1975), 199-214 (in Russian).

[7] S.M.Voronin, *Theorem on the "universality " of the Riemann zeta-function,* Math. USSR-Izv. 9(1975), 475-486.