

# $L(1, \chi)$ の指標に関する 2 乗平均

名古屋大学・多元数理科学研究科 吉元 昌己 (Masami Yoshimoto)

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Katsurada-Matsumoto の論文 [2] で  $L$  関数の指標に関する 2 乗平均の結果がある。本稿は、 $L$ -関数の代わりに Hurwitz ゼータ関数を用いた別証明を与えるものである。

## 1 既知の結果

**Theorem A** [1, 2].  $q \geq 3$ ,  $\chi$  は mod  $q$  の Dirichlet 指標,  $\chi_0$  は mod  $q$  の自明な指標とする。このとき

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi \neq \chi_0} |L(1, \chi)|^2 \\ &= \frac{\phi(q)}{q^2} J_2(q) \zeta(2) - \frac{\phi(q)^2}{q^2} (2\gamma_1 - \gamma^2 + 2\zeta(s)) \\ & \quad - \frac{\phi(q)}{q^2} J_1''(q) - \frac{\phi(q)^2}{q^2} \sum_{\substack{p|q \\ p:\text{prime}}} \frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2} - \frac{2\phi(q)}{q^2} R(q) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$J_z(q) := q^z \prod_{\substack{p|q \\ p:\text{prime}}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \sum_{d|q} \mu(d) \left(\frac{q}{d}\right)^z \quad (z \in \mathbb{C}),$$

$$J_z''(q) = \frac{d^2}{dz^2} J_z(q)$$

$\phi(q) = J_1(q)$ : Euler 関数

[2] で  $R(q)$  は次の漸近式で表されている:  $N$  は十分大,

$$R(q) = - \sum_{k|q} k \mu\left(\frac{q}{k}\right) \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \zeta(1-n) \zeta(1+n) k^{-n} + O(k^{-N}) \right\}.$$

## 2 Theorem A の別証明

Lemma 1 ([1]).

$$(J_1'(q))^2 = \phi(q)J_1''(q) + \phi(q)^2 \sum_{p|q} \frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2}.$$

Lemma 2.  $s \in \mathbb{C}$ ,  $s \neq 1$  とする。

(i)  $\chi: \text{mod } q$  の Dirichlet 指標の場合

$$L(s, \chi) = \frac{1}{q^s} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \chi(a) \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right),$$

(ii)  $\chi = \chi_0$ : 自明な指標の場合

$$L(s, \chi_0) = \frac{1}{q^s} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) = \frac{J_s(q)}{q^s} \zeta(s).$$

Lemma 3 (Nielsen [3]).

$$(\psi(x) + \gamma)^2 = \psi'(x) - \frac{\pi^2}{6} - 2\xi(x),$$

ここで、 $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ : digamma 函数,

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Proof of Theorem A. 以下  $\sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}}$  を  $\sum_a^*$  と表記する。  $\text{Re } s > 1$  の時、Lemma 2 より

$$\begin{aligned} \sum_{\chi} |L(s, \chi)|^2 &= \frac{1}{q^{2\sigma}} \sum_{a_1, a_2=1}^q \sum_{\chi} \chi(a_1) \bar{\chi}(a_2) \zeta\left(s, \frac{a_1}{q}\right) \zeta\left(\bar{s}, \frac{a_2}{q}\right) \\ &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left| \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) \right|^2 \\ &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left| \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) - \zeta(s) + \zeta(s) \right|^2 \\ &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left| \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) - \zeta(s) \right|^2 \\ &\quad + 2 \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \text{Re } \zeta(\bar{s}) \sum_a^* \left( \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) - \zeta(s) \right) + \frac{\phi(q)^2}{q^{2\sigma}} \\ &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left| \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) - \zeta(s) \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{q^{2\sigma}} |\zeta(s)|^2 (2 \text{Re } J_s(q) \phi(q) - \phi(q)^2). \end{aligned}$$

Lemma 2, (ii) より

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \neq \chi_0} |L(s, \chi)|^2 &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left| \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) - \zeta(s) \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{q^{2\sigma}} |\zeta(s)|^2 (2\operatorname{Re} J_s(q) \phi(q) - \phi(q)^2) \\ &\quad - \frac{1}{q^{2\sigma}} |\zeta(s)|^2 |J_s(q)|^2 \\ &= \frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}} \sum_a^* \left| \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) - \zeta(s) \right|^2 \\ &\quad - \frac{1}{q^{2\sigma}} |\zeta(s)|^2 |J_s(q) - \phi(q)|^2. \end{aligned}$$

$s \rightarrow 1$  とする。Lemmas 1, 3 より

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \neq \chi_0} |L(1, \chi)|^2 &= \frac{\phi(q)}{q^2} \sum_a^* \left( \psi\left(\frac{a}{q}\right) + \gamma \right)^2 - \frac{1}{q^2} (J_1'(q))^2 \\ &= \frac{\phi(q)}{q^2} \sum_a^* \psi'\left(\frac{a}{q}\right) - \frac{\pi^2 \phi(q)^2}{6 q^2} \\ &\quad - 2 \frac{\phi(q)}{q^2} \sum_a^* \xi\left(\frac{a}{q}\right) \\ &\quad - \frac{\phi(q)}{q^2} J_1''(q) - \frac{\phi(q)^2}{q^2} \sum_{p|q} \frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2}. \end{aligned}$$

$\psi'(x) = \zeta(2, x)$  が成り立つので

$$\sum_a^* \psi'\left(\frac{a}{q}\right) = J_2(q) \zeta(2).$$

よって、残りの項  $\sum_a^* \xi(a/q)$  が求まれば Theorem A の式が得られたことになる。  
Euler(-Maclaurin) の和公式を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_a^* \xi\left(\frac{a}{q}\right) &= \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \sum_{a=1}^d \xi\left(\frac{a}{d}\right) \\ &= \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \left\{ d \int_0^1 \xi(u) du + \frac{1}{2} (\xi(1) - \xi(0)) + \int_0^1 \bar{B}_1(du) \xi'(u) du \right\}. \end{aligned}$$

$\xi(x)$  の定義より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi(u) du &= \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{2} \zeta(2), \\ \xi(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n(n+1)} = \zeta(2), \quad \xi(1) = 0, \\ \xi'(u) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(u+n)^2} \end{aligned}$$

が成立するので、

$$\sum_a^* \xi\left(\frac{a}{q}\right) = \phi(q) \left( \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) \right) \\ + \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \sum_{n=1}^{\infty} H_n \int_0^1 \frac{\bar{B}_1(du)}{(u+n)^2} du.$$

右辺の最後の項が Theorem A の  $R(q)$  である。 □

**Corollary.** (i)  $R(q)$  に対して  $q$  に無関係に

$$|R(q)| \leq \frac{\zeta(2)\zeta(4)\sqrt{3}}{108} + 1 (< 2)$$

が成り立つ。

(ii) Euler-Maclaurin の和公式を使って更に計算することで

$$R(q) = -\mu(q) \left( \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) \right) \\ + \sum_{1 < d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \left\{ \sum_{n=2}^{N+1} \zeta(1-n)\zeta(1+n)d^{1-n} + O(d^{-N}) \right\}$$

が得られる。

**Remark.**  $q$ : 十分大

$$\sum_{p|q} \frac{p(\log p)^2}{(p-1)^2} \ll (\log \log q)^2.$$

Theorem A より次の定理が得られる：

**Theorem B ([1]).**  $Q$ : 十分大とする。このとき

$$\sum_{q \leq Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |L(1, \chi)|^2 \\ = \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} Q - c_3 \log^3 Q - c_2 \log^2 Q - c_1 \log Q - c_0 \\ + O\left(\frac{\log^2 Q}{Q} H(Q)\right)$$

が成り立つ。ここで

$$c_3 = \frac{1}{3\zeta(2)}, \quad c_2 = -\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}, \\ c_1 = \frac{1}{\zeta(2)} \left( 2\gamma_1 - \gamma^2 + 2\zeta(2) + \sum_{p: \text{prime}} \frac{p(\log p)^2}{(p-1)(p^2-1)} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{\zeta(s)} \Big|_{s=2},$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= \left( c_1 - \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{\zeta(s)} \Big|_{s=2} \right) \left( \gamma - \frac{\zeta'}{\zeta}(2) \right) + \frac{1}{3} \frac{d^3}{ds^3} \frac{1}{\zeta(s)} \Big|_{s=2} \\
&\quad - \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{p: \text{ prime}} \frac{p^3 (\log p)^3}{(p-1)(p^2-1)^2} + \frac{\gamma_2}{\zeta(2)} \\
&\quad + \zeta(2) \left( c_2^{(1)}(Q) + \frac{1}{2\zeta(2)} \right) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{R(q)}{q^2}, \\
c_2^{(1)}(Q) &:= \sum_{n \leq Q} \frac{\mu(n)}{n^2} \overline{B}_1 \left( \frac{Q}{n} \right), \\
H(Q) &:= \sum_{n \leq Q} \frac{\phi(n)}{n} - \frac{Q}{\zeta(2)} = O((\log Q)^{2/3} (\log \log Q)^{4/3}).
\end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] S. Kanemitsu, Y. Tanigawa, M. Yoshimoto and W. Zhang, On the discrete mean square of Dirichlet  $L$ -functions at 1, *Math. Z.* (to appear).
- [2] M. Katsurada and K. Matsumoto, The mean values of Dirichlet  $L$ -functions at integer points and class numbers of cyclotomic fields, *Nagoya Math. J.* **134** (1994), 151–172.
- [3] Niels Nielsen, *Die Gammafunktion*, Chelsis, New York, 1965