数理解析研究所講究録 1385 巻 2004 年 94-104

ウェーブレット展開の無条件収束性について
(Unconditional Convergence of Wavelet Expansions)

姫路工業大学大学院理学研究科* 保城寿彦 (Toshihiko HOSHIRO)
Graduate School of Science, Himeji Institute of Technology

はじめに：

本稿は Shannon のウェーブレットのような減衰度の悪いウェーブレットのよる展開においても L^p $(1 < p < \infty)$ での無条件収束性が成立することの証明の概説を目標とします．講演の際にも述べました様に，この研究は昨年度の短期共同研究における萬代氏による芦野氏との共同研究 [1] についての講演に端を発しております．その講演のときにはまだ研究の途中で証明に問題点があり，方針の変更を迫られましたが，後でその問題点を解決出来ました．私としましては短期共同研究の本来の趣旨にあったことができて，大変良かったと思っております．ここにこの研究に導いて下さった萬代・芦野両氏に対して深く感謝の意を表したいと思います．またこの短期共同研究において講演の機会を与えて下さった芦野氏には重ねて感謝の意を表したいと思います．

1 導入

ここではまず無条件収束の定義からはじめてこれまでに知られているウェーブレットに関係する以外の無条件収束性に関する事実について概括します．特に無条件収束性がある作用素の族の有界性と関わっていて，そのことを経由して 実解析学の中心的話題と深く関連することに注目して下さい．証明については Hernandez and Weiss [4] や Wojtaszczyk [9] 等を参照して下さい．まず定義からはじめます．

定義 1.1 B を Banach 空間として，$x_j \in B$ $(j = 1, 2, \ldots)$ とする． 級数 $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ が無条件収束するとは，任意の順序の入れ換えに対して和の値が不変であるということ，すなわち任意の $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への 1 対 1 上への写像 σ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

が成立することをいう．

*平成１６年４月から兵庫県立大学大学院物質理学研究科になります．

定義 1.2 B を Banach 空間として, $x_j \in B$ $(j=1,2,\dots)$ とする. x_j $(j=1,2,\dots)$ が B の無条件基底であるとは次の 2 条件をみたすことをいう.

(1) x_j $(j=1,2,\dots)$ は基底, つまり任意の $x \in B$ に対し $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j=1,2,\dots)$ が存在し

$$\|x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j\|_B \to 0, \quad (N \to \infty)$$

となる.

(2) 上で $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$ は無条件収束である.

1. まず無条件収束の定義をみて大学の微積分の授業をやったことのある者が考えることは絶対収束との関係です. 級数 $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ が

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_B < \infty$$

となるとき絶対収束するといいます. 無条件収束を $\epsilon-\delta$ 論法で記述すると, 任意の正数 ϵ に対し N の有限部分集合 M が存在して, 任意の有限部分集合 N に対して

$$\left\| \sum_{j \in N \setminus M} x_j \right\|_B < \epsilon$$

となりますから, これから

絶対収束 $\Rightarrow$ 無条件収束

となることがわかります. この逆が成立するかというと, $B=\mathbb{C}$ のときは Riemann によって示されていることが思い出されますが, 無限次元の Banach 空間では一般的には逆は成立しません. そのような例については $L^p[0,1]$ $(1<p<\infty)$ では

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{n} \quad (r_n(x) \text{ は Rademacher 関数})$$

がありますが, この件については参考文献 [9] を参照して下さい.

2. 無条件収束性と作用素の族の有界性との関係は次の命題から始まります:

命題 1.3 x_j $(j=1,2,\dots)$ が Banach 空間 B の基底であるとき次の 3 つの条件は同値である.

(1) x_j $(j=1,2,\dots)$ は無条件基底である.

(2) $x=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j$ および $\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots)$ $(\epsilon_j=1$ または $-1)$ に対し作用素 T_ϵ を

$$T_\epsilon x=\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j\,\alpha_j x_j$$

と定義すると, $x\in B$ および ϵ に依存しない定数 C が存在して

$$\|T_\epsilon x\|_B\le C\|x\|_B$$

となる.

(3) $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots)$ $(\beta_j\in\mathbb{C},\,|\beta_j|\le 1)$ に対して

$$T_\beta x=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\,\alpha_j x_j$$

としたとき, $x\in B$ および β に依存しない定数 C が存在して

$$\|T_\beta x\|_B\le C\|x\|_B$$

となる.

上から無条件収束性が T_ϵ や T_β の作用素ノルムが ϵ や β に依存しない定数でおさえられることと同値であることがわかります. 一見 (3) の条件の方が強い条件に思えますが, 実は $\{T_\beta\}$ は $\{T_\epsilon\}$ の凸包, つまり $\{T_\epsilon\}$ は $\{T_\beta\}$ の角の部分にあたり, そのため (2) と (3) は同値になります. また (3) から $x=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j\in B$ なら $x=\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|x_j\in B$ となり, x が Banach 空間 B に入るための条件は係数の絶対値で決定されることがわかります.

3. Fourier 級数の場合, すなわち $L^p[0,2\pi]$ の関数を $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ で展開する場合, $p=2$ 以外では一般に無条件収束にはなりません. この事実は Zygmund と Paley によって証明されました. Zygmund の有名な本 "Trigonometric Series" [10] でも Fourier 級数

$$f_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta}e^{in^{\alpha}}e^{inx}$$

の $x\to 0$ のときの挙動が扱われていて, 絶対値が 1 の $e^{in^{\alpha}}$ の部分がその挙動に及ぼす挙動からも上の条件 (3) のようにはならないことが推察できます.

作用素の族の有界性という視点から考えると, $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が $L^p[0,2\pi]$ の基底になることは Hilbert 変換の L^p 有界性から導かれます. このことは Dirichlet 核

$$D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}$$

に対し

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x-y)\, f(y)\, dy$$

とおくと, $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が $L^p[0,\,2\pi]$ の基底であることは $f\in L^p[0,\,2\pi]$ のとき

$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0, \quad (N\to\infty)$$

となることですが, これを示すには $\{S_N\}$ が $L^p[0,\,2\pi]$ の有界作用素の集合として有界集合であることを示すことができれば, 後は L^p の関数を滑らかな関数で近似してやると関数が滑らかならば Fourier 級数は元の関数に L^p よりも強い位相で収束するので, $\epsilon-\delta$ 論法を用いることにより証明することができます. ここで Hilbert 変換（M. Riesz が扱ったもの）を

$$\begin{aligned} H\,f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{p.v.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} n)\, e^{in(x-y)} f(y)\, dy \\ &= \frac{i}{2\pi}\ \mathrm{p.v.} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) f(y)\, dy \end{aligned}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} S_N\, f(x) = &-\frac{1}{2}\, e^{-i(N+1)x} H\left(e^{i(N+1)\cdot} f(\cdot)\right) \\ &+\frac{1}{2}\, e^{i(N+1)x} H\left(e^{-i(N+1)\cdot} f(\cdot)\right) \end{aligned}$$

と表示でき, このことから $\{S_N\}$ が $\mathfrak{L}(L^p)$ の有界集合であることがわかります. (この議論の詳細については [7] を参照して下さい.)

上の議論の中で S_N は命題 1.3 の T_ϵ に類似したものです. 作用素 S_N の場合は T_ϵ の ϵ_j にあたるものの値が 0 または 1 で, その値が変化するところが 2 箇所と有限個であるため $\mathfrak{L}(L^p)$ で有界になるわけで, これが変化する箇所の個数に制限が無い場合では一般には有界集合にはなりません. つまり $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が $L^p[0,\,2\pi]$ $(p\neq 2)$ の無条件基底でないことは

$$K_\epsilon(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n\, e^{inx} \quad (\epsilon_n = 0 \text{ または } 1,\ \text{しかも } 1 \text{ となるところは有限個})$$

として

$$T_\epsilon f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_\epsilon(x-y)\, f(y)\, dy$$

とおいたとき, $\{T_\epsilon\}$ が $\mathfrak{L}(L^p)$ $(p\neq 2)$ の有界集合にはならないことと同値であることがわかります.

以上述べた様な作用素の有界性を一般化すると

$$K_\beta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n\, e^{inx}$$

として上と同様に作用素 T_β を定義したとき, 数列 β_n $(n \in \mathbb{Z})$ が有界である以外に如何なる条件があれば T_β が $L^p[0, 2\pi]$ $(1 < p < \infty)$ の有界作用素になるかという問題にぶちあたります. これに1つの十分条件を与えたのが Marcinkiewicz で, 例えば

$$2^{j-1} \le |n| < 2^j \quad \text{なら} \quad \beta_n = c_j \quad (\text{一定}), j \in \mathbb{N}$$

であれば T_β は $L^p[0, 2\pi]$ $(1 < p < \infty)$ の有界作用素になることが知られております. また更にこの様な結果の Fourier 変換版を考えたのがよく知られている Fourier multiplier に関する Hörmander-Mihlin の定理だということもわかります.

2 ウェーブレット展開と結果

本稿の主題はウェーブレット展開です. ここでウェーブレットとはいわゆる正規直交ウェーブレット, すなわち

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad (j, k \in \mathbb{Z})$$

が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底になるものをさすこととします. ウェーブレット展開の無条件収束性については mather wavelet ψ が充分な局所性 ($|x| \to \infty$ のときの減衰) を持てば成立することが知られています. 例えば Kahne -Lemarié [6], Hernandez-Weiss [4], Wojtaszczyk [9] 等の教科書でもいくらかのページがさかれています. 無条件収束性のための仮定は教科書によって少しずつ異なりますが, 例えば [6] では

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\le \frac{C}{(1+|x|)^{1+\epsilon}}, \\ |\psi(x+h) - \psi(x)| &\le C|h|^\beta \end{aligned} \tag{2.1}$$

で (ここで $\epsilon > 0, 0 < \beta \le 1$) , いずれの場合も $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ であることは仮定されています.

すべてのウェーブレットがこのような強い局所性を持つかというとそうではなく, その代表的なものとして Shannon のウェーブレットがあります. つまり supp $\hat{f} \subset [-B\pi, B\pi]$ なら

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{B}\right) \frac{\sin \pi(Bx-k)}{\pi(Bx-k)}$$

となることが Shannon の標本化定理ですが, この定理に対応する mather wavelet ψ は

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\chi_I(\xi), \quad I = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi],$$

つまり

$$\psi(x) = -2\,\frac{\sin(2\pi x) + \cos(\pi x)}{\pi(2x+1)}$$

で, 上記のような強い局所性は持ちません (この定義は参考文献 [4] によるもので, 上の式の $e^{i\xi/2}$ は必ずしも必要ありません) .

更にこの Shannon のウェーブレットに類するものとして, unimodular wavelets あるいは minimally supported wavelets と呼ばれる mather wavelet ψ の Fourier 変換 $\hat{\psi}$ が有界閉区間の有限和の特性関数になるものがあります. とくに

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi} &= \chi_{K_\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N}, \\
K_\ell^+ &= [\frac{2^\ell}{2^{\ell+1}-1}\pi,\, \pi] \cup [2^\ell\pi,\, 2^\ell\pi + \frac{2^\ell}{2^{\ell+1}-1}\pi], \\
K_\ell^- &= -K_\ell^+, \\
K_\ell &= K_\ell^- \cup K_\ell^+
\end{aligned}
$$

であれば ψ は mather wavelet になることが知られていますが ([4] および [9] 参照), これらも強い局所性を持ちません.

昨年度の短期共同研究において萬代氏は芦野氏との共同研究 [1] の内容について講演されました. その研究成果の 1 次元のウェーブレットの無条件収束性に関連する部分を要約すると以下のようになります（記号および表現等については以下とは若干異なります）.

定理 2.1 (Ashino and Mandai [1])

$$\hat{\psi} = \chi_{[-2\pi,\,-\pi]\cup[\pi,\,2\pi]}$$

とおく. このとき次が成立する.

(1) $f \in L^2$ が $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-2\cdot 2^N\pi,\, -2^N\pi] \cup [2^N\pi,\, 2\cdot 2^N\pi]$ をみたすとする. ただしここで N は整数とする. このとき $f \in L^p$ $(1 < p < \infty)$ であるための必要十分条件は

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{Nk}\rangle|^p < \infty$$

となることである. とくにこのとき展開

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{Nk}\rangle\, \psi_{Nk}$$

は $L^p(\mathbb{R})$ で無条件収束である.

(2) $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ に対し

$$S_N f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{Nk}\rangle\, \psi_{Nk}$$

とおく. このとき

$$f = \sum_{N=-\infty}^{\infty} S_N f$$

の右辺は $L^p(\mathbb{R})$ で無条件収束になっている.

この定理は $L^p(\mathbb{R})$ での無条件収束性についての部分的な結果で, 完全には無条件収束性は保証されておりません. 局所性の弱いウェーブレットは Fourier 級数の場合に近いので, 萬代氏は昨年の講演の際には結果は否定的ではないか? と言っておられました. 本稿はそれが実は肯定的であると主張します.

定理 2.2 ψ は *unimodular wavelet* , つまり $\hat{\psi}(\xi)$ が有界閉区間の有限個の和集合の特性関数であるものとする. このとき $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ に対し, そのウェーブレット展開

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$$

は $L^p(\mathbb{R})$ で無条件収束である. また

$$W_\psi f(x) = \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2 2^{-j} \chi_{[k2^{-j},\,(k+1)2^{-j}]}(x) \right)^{1/2}$$

とおくと, 定数 C が存在して

$$C^{-1} \|f\|_{L^p} \leq \|W_\psi f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$$

となる.

この定理から上記の局所性の弱いウェーブレットも参考文献 [4], [6], [9] 等で無条件収束性が保証されているものと同じ性質を持つことがわかります. またその証明から Sobelev 空間 $W^{p,s}$ での無条件収束性も成立することもわかります.

3 証明の概略あるいはアイデア

強い局所性を持つウェーブレット展開が L^p で無条件収束であるこのと証明の方針は参考文献 [6] と [9] とでは大筋では共通していて, 作用素

$$T_\beta f(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \beta_{jk} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}, \quad (|\beta_{jk}| \leq 1)$$

の L^p 有界性を示すことにあります. (ここで Fourier 級数展開が無条件収束でないことと, 上式でウェーブレットを $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ で置き換えた作用素が非有界であることとの関係を思い出して下さい.) これを示すには Calderon-Zygmund 作用素の L^p 有界性の証明をなぞればよいのです. つまり mather wevelet に対する評価 (2.1) から作用素 T_β の積分核 $K_\beta(x,y)$ の評価を導いて, それから T_β の弱 L^1- 有界性が従う. 後は L^2 有界性との補間と duality argument を用いて $1 < p < \infty$ に対する L^p- 有界性がでます. (この方針は [6] によるもので, [9] では若干やり方が違います.)

一方ウェーブレットの局所性が弱いとこの様な積分核の評価によって証明を行うことはできません. なぜなら ψ_{jk} をいったんその絶対値で評価してしまうと, 積分核 $k_\beta(x, y+h) - k_\beta(x,y)$ を $|x-y|^{-1-\epsilon}$ の定数倍でおさえこむことができなくなるからです. そこで別の方法で T_β の L^p 有界性を示すこと

を考えなければいけませんが，ここでは $f \in L^p$ であることをそのウェーブレット係数の性質で置き換えることを考えます（参考文献 [2], [3], [4] を参照）．

いま Ψ が強い局所性などの良い性質をもつ mather wavelet とすると，$1 < p < \infty$ なる p に対し $f \in L^p(\mathbb{R})$ であることは

$$W_\Psi f(x) = \left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\langle f, \Psi_{jk}\rangle|^2 2^j \chi_{[k2^{-j},\,(k+1)2^{-j}]}(x) \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R})$$

となることと同値であることが知られています．Frazier and Jawerth [2] の記号を用いると，上の条件は $\{\langle f, \Psi_{jk}\rangle\} \in \dot{f}_p^{0,2}$ と表されます．つまり

$$f \in L^p \Leftrightarrow \{\langle f, \Psi_{jk}\rangle\} \in \dot{f}_p^{0,2}$$

です．

ここで

$$(a_{jk\ell m}) = (\langle \Psi_{\ell m}, \psi_{jk}\rangle) \tag{3.1}$$

と，その行列に対応するウェーブレット係数の変換

$$\{s_{jk}\} = A(\{t_{\ell m}\}),$$
$$\left(s_{jk} = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} a_{jk\ell m}\, t_{\ell m} \right)$$

について考えます．この変換及び行列はウェーブレットの基底の変換とその行列といえるもので，線形代数学における直交変換及び直交行列に相当するものです．　また

$$\{s_{jk}\} \mapsto \{\beta_{jk}\, s_{jk}\}$$

と対応させる変換は線形代数学の対角行列に相当するものですが，全ての $j, k \in \mathbb{Z}$ に対し $|\beta_{jk}| \le 1$ なら

$$\{s_{jk}\} \in \dot{f}_p^{0,2} \Rightarrow \{\beta_{jk}\, s_{jk}\} \in \dot{f}_p^{0,2}$$

で，その作用素ノルムは 1 でおさえられることは明らかです．よって後は

$$\{s_{jk}\} \in \dot{f}_p^{0,2} \Leftrightarrow \{t_{\ell m}\} \in \dot{f}_p^{0,2} \tag{3.2}$$

であることを示せば定理の証明ができたことになります．つまり以下の図式で表される過程を経て，$\{T_\beta\}$ の L^p- 有界性を示すことができるのです．

$$\begin{aligned} f \in L^p &\Leftrightarrow \{t_{\ell m}\} = \{\langle f, \Psi_{\ell m}\rangle\} \in \dot{f}_p^{0,2} \\ &\Leftrightarrow \{s_{jk}\} = \{\langle f, \psi_{jk}\rangle\} \in \dot{f}_p^{0,2} \\ &\Rightarrow \{\beta_{jk}\langle f, \psi_{jk}\rangle\} \in \dot{f}_p^{0,2} \\ &\Rightarrow A^{-1}\{\beta_{jk}\langle f, \psi_{jk}\rangle\} \in \dot{f}_p^{0,2} \\ &\Leftrightarrow \{\langle T_\beta f, \Psi_{\ell m}\rangle\} \in \dot{f}_p^{0,2} \\ &\Leftrightarrow T_\beta f \in L^p. \end{aligned}$$

ここで A の逆変換 A^{-1} に対応する行列は

$$(\langle \psi_{jk},\, \Psi_{\ell m}\rangle) = {}^t\overline{(a_{jk\ell m})},$$

つまり行列 (3.1) の共役であることに注意して下さい.

参考文献 [4] では, ψ と Ψ がともに性質の良い mather wavelet であるとき, 行列 (3.1) がほとんど対角的（この用語については [2] 及び [3] を参照）, つまり

$$|\langle \Psi_{\ell m},\, \psi_{jk}\rangle| \le C \frac{2^{-\frac{3}{2}|j-\ell|}}{\left(1+\frac{|k2^{-j}-m2^{-\ell}|}{\max(2^{-j},2^{-\ell})}\right)^2} \tag{3.3}$$

となるので, これから (3.2) が導かれています. ここで(3.3) の右辺の分子の 2 の巾において $\frac{3}{2}$ は $\frac{1}{2}$ より大きくウェーブレットの dilation parameter j および ℓ の差が大きいとよりはやく左辺が小さくなること, また右辺分母における 2 乗の箇所よりウェーブレットの中心座標 $k2^{-j}$ と $m2^{-\ell}$ が離れると可積分の order で減衰することが重要です.

短期共同研究の講演の際にも述べましたように, 私は当初 unimodular wavelet ψ に対しても強い局所性をもつ mather wavelet Ψ をうまくとれば (3.3) の評価が成立するのではないかと予想しておりました. ところが計算を行ってみると, そうではないことがわかり証明の方針の変更が必要になりました. 結果的には評価式 (3.3) は成立しないが, 行列 (3.1) において最も性質の悪い部分が Hilbert 変換の離散版のようなものになり, そのため (3.2) が成立するということです. ここのところを説明するため Ψ を Schwartz class の mather wavelet （例えば Lemarié-Meyer のウェーブレット）であることを想定して $\langle \Psi_{\ell m},\, \psi_{jk}\rangle$ の計算を行いましょう.

まず $\hat{\psi} = \chi_K$ （K は有界閉区間の有限和）とすると,

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{\ell m},\, \psi_{jk}\rangle &= (2\pi)^{-1}\cdot 2^{-\ell/2}\cdot 2^{-j/2}\int \hat{\Psi}(2^{-\ell}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)}e^{im2^{-\ell}\xi}\cdot e^{-ik2^{-j}\xi}\,d\xi \\ &= (2\pi)^{-1}\cdot 2^{-(\ell-j)/2}\int_K \hat{\Psi}(2^{-(\ell-j)}\xi)\, e^{-i(k-m2^{-(\ell-j)})\xi}\,d\xi\end{aligned}$$

です. よってウェーブレットの中心座標が一致するとき, つまり $k2^{-j} = m2^{-\ell}$ となるときは Ψ がある程度の滑らかさをもち

$$|\hat{\Psi}(\xi)| \le C\min\left(|\xi|,\, |\xi|^{-2}\right)$$

であれば, K が有界閉集合で原点を含まないことから

$$|\langle \Psi_{\ell m},\, \psi_{jk}\rangle| \le C\cdot 2^{-\frac{3}{2}|j-\ell|}$$

とほとんど対角的な評価が得られます.

また mather wavelet Ψ が $|x|\to\infty$ のとき急減少であれば, $\hat{\Psi}$ は滑らかで上の積分において部分積分が可能になり, このことからウェーブレットの中心座標の差が大きくなると行列の成分が小さくなることが導けます. つまり

$$\begin{aligned}2\pi\langle \Psi_{\ell m},\, \psi_{jk}\rangle =& 2^{-(\ell-j)/2}\left[\hat{\Psi}(2^{-(\ell-j)}\eta)\cdot\frac{e^{-i(k-m2^{-(\ell-j)})\eta}}{-i(k-m2^{-(\ell-j)})}\right]_{\eta\in\partial K} \\ &- i\,\frac{2^{-\frac{3}{2}(\ell-j)}}{k-m2^{-(\ell-j)}}\int_K (\hat{\Psi})'(2^{-(\ell-j)}\xi)\, e^{-i(k-m2^{-(\ell-j)})\xi}\,d\xi\end{aligned}$$

です. ただしここで

$$K=\bigcup_{j=1}^{N}[a_j,\,b_j],\quad (a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_N<b_N)$$

のとき

$$[f(\eta)]_{\eta\in\partial K}=\sum_{j=1}^{N}\{f(b_j)-f(a_j)\}$$

とします. 更に部分積分をもう一度行うと

(3.4)
$$\begin{aligned}&2\pi\langle\Psi_{\ell m},\,\psi_{jk}\rangle\\&=i\,2^{-(\ell-j)/2}\left[\hat{\Psi}(2^{-(\ell-j)}\eta)\cdot\frac{e^{-i(k-m\,2^{-(\ell-j)})\eta}}{k-m\,2^{-(\ell-j)}}\right]_{\eta\in\partial K}\\&+2^{-\frac{3}{2}(\ell-j)}\left[(\hat{\Psi})'(2^{-(\ell-j)}\eta)\cdot\frac{e^{-i(k-m\,2^{-(\ell-j)})\eta}}{(k-m\,2^{-(\ell-j)})^2}\right]_{\eta\in\partial K}\\&-2^{-\frac{5}{2}(\ell-j)}\int_K(\hat{\Psi})''(2^{-(\ell-j)}\xi)\cdot\frac{e^{-i(k-m2^{-(\ell-j)})\xi}}{(k-m\,2^{-(\ell-j)})^2}\,d\xi\end{aligned}$$

となります.

ここで

$$\frac{2^{-(\ell-j)/2}}{k-m\,2^{-(\ell-j)}}=2^{-|\ell-j|/2}\cdot\frac{\max(2^{-j},2^{-\ell})}{k\,2^{-j}-m\,2^{-\ell}}$$

であることに注意すれば, (3.4) の右辺の第 2 項および第 3 項は

$$\max\left(|(\hat{\Psi})'(\xi)|,\,|(\hat{\Psi})''(\xi)|\right)\le C\min\left(1,\,|\xi|^{-2}\right)$$

であれば, ほとんど対角的な評価が得られ（ $(k-m\,2^{-(\ell-j)})^2$ において 2 乗となっていることに注目）, このことからこの部分の $\dot{f}_p^{0,2}-$ 有界性が導けます.

以上より残りの (3.4) の右辺第 1 項の部分が $\dot{f}_p^{0,2}-$ 有界性をもつかどうかが最も重要な部分ですが, modulation $e^{-i(k-m2^{-(\ell-j)})\eta}$ の部分は絶対値が 1 であって, $\dot{f}_p^{0,2}-$ ノルムの定義

$$\|\{s_{jk}\}\|_{\dot{f}_p^{0,2}}=\|(\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|s_{jk}|^2 2^j\chi_{[k2^{-j},\,(k+1)2^{-j}]})^{1/2}\|_{L^p}$$

では, 絶対値 $|s_{jk}|$ をとるので最終的には証明のさまたげにはなりません. そして残りの

$$\frac{1}{k-m\,2^{-(\ell-j)}}$$

の部分は Hilbert 変換の離散版（の核）といえるもので, 空間方向の変数（k および m ）について ℓ^p- 有界性をもっていて, そのことから (3.4) の右辺第 1 項の部分の $\dot{f}_p^{0,2}-$ 有界性を導くことができます. 本稿は紙面の都合でここで終わりますが, 証明の途中でシャープ最大値関数（の離散版）を用いることを述べておきます (Stein の本 [8] の p157 Proposition 2 を参照）. 詳細は準備中の論文 [5] が出来上がるのをお待ち下さい.

参考文献

[1] R. Ashino and T. Mandai, *Wavelet bases for microlocal filtering and the sampling theorem*, Applicable Analysis, **82**(2003), 1–24

[2] M. Frazier and B. Jawerth, *A discrete transform and decompositions of distribution spaces*, Journal of Functional Analysis **93** (1990), 34–170.

[3] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss, *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function spaces*, American Mathematical Society, Providence RI, 1991

[4] E. Hernandez and G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, 1995（和訳：ウェーブレットの基礎, 科学技術出版, 芦野他訳)

[5] T. Hoshiro, *On convergence of unimodular wavelet expansions* （仮題）, In preparation

[6] J.P. Kahne and P.G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Analysis and Wavelets*, Gordon and Breach, 1995

[7] S.G. Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis*, The Mathematical Association of America, 1999

[8] E.M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Oscillatory Integrals*, Princeton University Press 1995

[9] P. Wojtaszczyk, *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge University Press, 1997

[10] A. Zygumund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 1958