

Searching for $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ subgroups in non-hyperbolic automatic groups

中川義行

龍谷大学*

YOSHIYUKI NAKAGAWA

RYUKOKU UNIVERSITY

田村 誠

大阪産業大学†

MAKOTO TAMURA

OSAKA SANGYO UNIVERSITY

山下 靖

奈良女子大学‡

YASUSHI YAMASHITA

NARA WOMEN'S UNIVERSITY

Abstract

Gersten は 1990 年代初頭に「 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を部分群に含まないオートマチック群は、すべて双曲群か」という問題を提出した [2]。これは 3 次元多様体の基本群に対する弱双曲化予想問題と対応する問題である。この問題に対して、オートマチック群にいくつか条件をつけることで、部分的な解決を得たのでこれを報告する。また、より一般的な条件の下でこの問題を考察するため、計算機による実験を行ったので、この方法についても述べる。

1 はじめに

1987 年、Gromov は、双曲群は $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を部分群にもたないことを示した。この逆が自然な問題として考えられるが、群を閉 3 次元多様体の基本群に制限したときが、いわゆる弱双曲化予想である。群をオートマチック群に制限した場合に対応して、Gersten は 1989 年に次の問題を提出した [2]。

問題 1

$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を部分群に含まないオートマチック群は、すべて双曲群か。

閉 3 次元多様体の基本群は、Thurston の幾何化予想の下では、いくつかの例外を除いてオートマチック構造を持つことが知られている。したがって、弱双曲化予想の組合せ群論的解釈が Gersten の問題であると言えよう。本稿ではこの問題に対して、オートマチック群にいくつか条件をつけることで、部分的な解決を得たのでこれを報告する。以下、第 2 節で用語の定義を行い、第 3 節で我々の主結果を述べる。第 4 節でこの主結果の証明の概略について述べ、最後に第 5 節で計算機実験について報告する。

2 用語の定義

オートマチック群 (automatic group) に関する一般的な用語は、[1] を参照されたい。

G を、逆元をとる操作に関して閉じた有限生成系 A をもつ群 $G = \langle A | R \rangle$ ($|A| < \infty, x \in A \Rightarrow x^{-1} \in A$) とする。 G の A に関するケイリーグラフ (Cayley graph) $\Gamma(G, A)$ とは、

1. 頂点集合 (vertex set) $V(\Gamma(G, A))$ は G である。

*nakagawa@econ.ryukoku.ac.jp

†mtamura@las.osaka-sandai.ac.jp

‡yamasita@ics.nara-wu.ac.jp

2. $x, y \in V(\Gamma(G, A))$ に対して, $xa = y$ を満たす $a \in A$ が存在すれば, \vec{xy} が辺集合 (edge set) $E(\Gamma(G, A))$ に含まれる。

となるグラフをいう。例えば, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ のケイリーグラフは次のような図になる。ここで ε は G の単位元とし, $A_i = a_i^{-1}$ とした。 a_i で向き付けられた辺は A_i で逆向きに向き付けられるが, 誤解のおそれがなければとくに両方を明示することはしない。

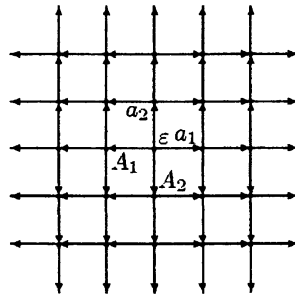


図 1: $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ のケイリーグラフ $\Gamma(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \{a_1, A_1, a_2, A_2\})$

A 上の語 w に対して, それに対応する G の元を \bar{w} と表す。 $x, y \in G$ に対して, G の語距離 (word metric) $d(x, y)$ を, $\Gamma(G, A)$ 上で x と y を結ぶ経路の最小辺数と定める。 G が双曲群 (word hyperbolic group) であるとは, 定数 $\delta > 0$ が存在して, $\Gamma(G, A)$ 上の任意の測地三角形 (geodesic triangle) がすべて δ 薄となるをいう。ここで測地三角形 $\triangle xyz$ が δ 薄 (δ -thin) であるとは, 弧 \bar{xy} 上の各点 u から, 弧 \bar{yz} , \bar{zx} までの語距離がともに δ 以下であることをいう。

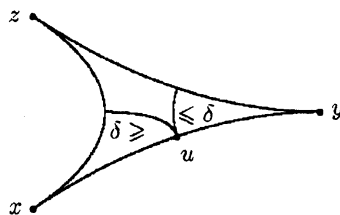


図 2: δ 薄測地三角形

語 w に対して, 最初の t 文字を長さ t の接頭辞 (prefix) といい, $w(t)$ と表す。測地二辺形 (geodesic bigon) $\bigcirc xy$ が M 厚 (M -thick) であるとは, その2辺 b_0 と b_1 の距離があるレベル t で M 以上, すなわち $d(b_0(t), b_1(t)) \geq M$ となることをいう。

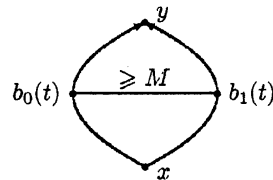


図 3: M 厚測地二辺形

有限状態オートマトン (finite state automaton) W とは,

1. (有限) 状態集合 (state set) S
2. アルファベット A
3. 遷移写像 $\mu: S \times A \rightarrow S$
4. 受理状態 (accept state) $Y \subset S$
5. 初期状態 $s_0 \in S$

の5つを組にしたもの $W = (S, A, \mu, Y, s_0)$ をいう。初期状態 s_0 から始めて、入力語に応じて遷移写像によって状態を変化させる、例えて言えば、双六のようなものである。双六の「あたり」に相当するのが受理状態 Y である。すなわち、ある語を与えたら、それが「受理される (accept)」か「拒否される (reject)」かを判定するシステムと言える。有限状態オートマトン W は頂点集合を S として、 μ にしたがって A で辺彩色された有向グラフ (状態遷移図) として表される。特に Y の頂点に至る見込みのないパスは、グラフの辺に含めないのが慣習である。例えば、アルファベットを $A = \{a, b\}$ として、“ ab ” を含む語を受理するオートマトンの状態遷移図は次のようになる。初期状態は矢印で示し、受理状態は二重丸で示した。

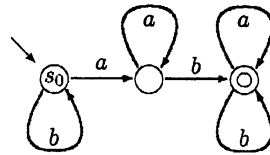


図 4: 状態遷移図の例

有限状態オートマトン W に対してその言語 (language) $L(W)$ とは、 W で受理される語全体の集合とする。

有限生成群 $G = \langle A | R \rangle$ がオートマチック群 (automatic group) であるとは、以下のようなオートマチック構造 $X = (A = \{a_1, \dots, a_n\}; W; M_\varepsilon, M_{a_1}, M_{a_2}, \dots, M_{a_n})$ をもつときをいう。

1. A 上の有限状態オートマトン W で、自然な射影 $p: L(W) \rightarrow G$ が全射であるものが存在する。
2. $A^\$ \times A^\$$ 上の有限状態オートマトン $M_\varepsilon, M_{a_1}, M_{a_2}, \dots, M_{a_n}$ ($A = \{a_i\}$) で次を満たすものが存在する。

(w_1, w_2) が M_x ($x \in A$) で受理されるのは、 w_1, w_2 が $L(W)$ の元であって、 G の元として $w_1x = w_2$ である。

ここで、 $A^\$ = A \cup \{\$\}$ で、 $\$$ は語長をそろえるために語尾に付ける詰め物 (padding) である。

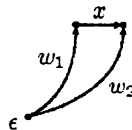


図 5: M_x で受理される様子

一般にオートマチック構造が与えられたとき、定数 k が存在して以下の条件をみたす。2つの語の組 (w_1, w_2) がある M_x で受理されるならば、任意の t に対して $d(w_1(t), w_2(t)) < k$ である。この定数を同伴者定数という。

オートマチック構造 M が弱測地的オートマチック (weakly geodesically automatic) であるとは、 $L(W)$

が $\Gamma(G, A)$ の測地線の集合の部分集合であるときをいう。オートマチック構造 M が単射性 (uniqueness property) をもつとは、写像 $p: L(W) \rightarrow G$ が単射である、すなわち全単射であるときをいう。オートマチック群 G が接頭辞に関して閉じている (prefix closed) というのは、 $L(W)$ の元の任意の接頭辞が $L(W)$ の元であるときをいう。

我々は、 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ 部分群を探すため次の用語を定義した。

定義 1

$\Gamma(G, A)$ の部分グラフ $T = \{t_1, \dots, t_N\}$ が以下をみたすとき、これを長さ N の N トラック (N track of length N) という。

1. 各 t_i はある $w_i, w'_i \in L(W)$ の部分弧 (subarc) になっている。これを $w_i = s_i t_i u_i, w'_i = s_i t_i u'_i$ とする。
2. 各 s_i の長さは一致する。
3. 各 t_i の長さは一致して N に等しい。
4. $\Gamma(G, A)$ 上 $\{t_i\}$ は N 本の交わりのない弧、すなわち $t_i \cap t_j = \emptyset$ (for $i \neq j$)
5. 各 i に対して $d(\overline{w'_i}, \overline{w_{i+1}}) = 1$, すなわち $(w'_i, w_{i+1}) \in L(M_{x_i})$ ($\exists x_i \in A$)

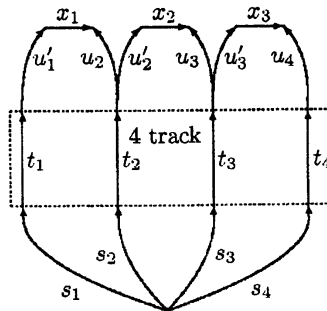


図 6: 4 トラック $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ とその周辺

オートマトン W が、単星的 (simply starred) であるとは、状態遷移図において、どの状態もそれ自身に戻る道 (path) があればそれは一意的である¹⁾ときをいう。

定義 2

オートマトン W が、 n 星的 (n -starred) であるとは、状態遷移図において、どの状態もそれ自身に戻る道があればそれら全体でできる部分グラフが高々 n ブーケとなっている²⁾ときをいう。

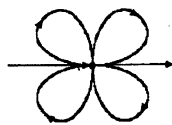


図 7: 4 星的オートマトンに現れる 4 ブーケ

¹⁾プログラミングでしばしば利用される正規表現でいえば、 $(a)^*$ と書くことができる。ただし a は A 上の語。

²⁾正規表現でいえば $(\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_n)^*$ と書くことができる。

3 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ 部分群を探す

以下、オートマチック群に対して、次の5条件

- 弱測地的オートマチックである。
- 単射性をもつ。
- 接頭辞に関して閉じている。
- 群にねじれがない (torsion free)。
- 双曲的でない。

をまとめて条件 χ と呼ぶ。初めの3つを仮定することは自然と言えよう。なぜならば、任意の $x \in G$ に対してただ1つの測地線 $w \in L(W)$ が与えられ、さらに w 上の任意の点 $\overline{w(t)}$ に対しても w の接頭辞 $w(t)$ が $L(W)$ の元になっているからである。我々は、条件 χ の下で G が $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を部分群に持つかどうか考え、次の命題を得た。

命題 3 (N-T-Y)

オートマチック群 G が条件 χ を満たせば、任意の正数 N に対して、 $\Gamma(G, A)$ 上に長さ N の N トラック T が存在する。

この T を用いて、次の2つの命題を組合せ的に導くことができた。

命題 4 (N-T-Y)

オートマチック群 G が条件 χ を満たし、 G のオートマチック構造の W が単星的であれば、 G は $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を部分群に持つ。

ここで、 G が単星的オートマチック構造を持てば、群の増大度 (growth) は多項式で上から評価される。このことから命題4は一般論を用いても示すことができるが、我々はこれを T 上に可換な語を見つけない方針で組合せ的に示した。

命題 5 (N-T-Y)

オートマチック群 G が条件 χ を満たし、 G のオートマチック構造にある全てのオートマトンが2星的であれば、 G は $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を部分群に持つ。

4 長さ N の N 本トラックの存在

以下では、命題3の証明の概略を述べる。詳細は [3], [4] を参照されたい。

まず、次の Papasoglu の定理を用いる [5]。

定理 6 (Papasoglu)

G が双曲的でないとき、任意の正数 M に対して、 $\Gamma(G, A)$ 上に M 厚二辺形が存在する。

G が双曲的でないので、Papasoglu の定理から、任意の正数 M に対して、 $\Gamma(G, A)$ 上に M 厚二辺形が存在する。簡単な議論により、 M 厚二辺形の片方の頂点は単位元であり、また、片方の辺を $b_0 \in L(W)$ とできる。もう1つの頂点を v とおく。他方の辺 b_1 上の各点 $b_1(i)$ に対し、 $w_i \in L(W)$ を $\overline{w_i} = \overline{b_1(i)}$ なる語とする。 $\varphi(t)$ を $\{w_i\}$ のレベル t において異なる点の数、すなわち $\varphi(t) = \#\{\overline{w_i(t)} \mid i \geq t\}$ とする。また、 M 厚を与えるレベルを τ とすると、 $d(b_0(\tau), b_1(\tau)) > M$ である。

ここで k を同伴者定数とし、 $M = kN^2$ とすると、 $\varphi(\tau) \geq N^2$ である。 $\{w_i\}$ は二辺形上に端点を持つ語の集合なので、 $\varphi(d(\varepsilon, v)) = 1$ である。したがって、 $\varphi(t) > \varphi(t+N)$ となるような t が存在するが、そのような $t \geq \tau$ の中で最小のものをあらためて t と取り直す。

単射性と接頭辞に関して閉じていることより、 $\{w_i\}$ はレベルの増加に対して合流はなく、分岐のみである。このことより、レベル t からレベル $t+N$ の間に $\{w_i\}$ の分岐は N 未満であることがわかる。したがって、 $\{w_i\}$ の i が連続する N 語の部分集合で、レベル t からレベル $t+N$ の間に分岐のないものが存在する。これが求める長さ N の N トラックである。

5 コンピュータを用いた実験 — より一般的な解決に向けて

次に考察すべき問題は以下になるろう。

問題 2

オートマチック群 G が条件 χ を満たし、 G のオートマチック構造にある全てのオートマトンが n 星的 ($n \geq 3$) であれば、 G は $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を部分群に持つか。

この問題に関して、長さ N の N 本トラックの構造を計算機により生成させ、それぞれのトラック上に $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ を見出せるかを観察した。簡単のために、 G のオートマチック構造にある全てのオートマトンの、ブーケの長さがすべて等しいという条件を加えた。この条件は、一般の n 星的で解決できたならば、少しの工夫で外せると見込まれる条件である。

トラック上の隣り合う道の組 t_i, t_{i+1} に対し、それぞれを含む $L(W)$ の語を w_i, w_{i+1} とする。 (w_i, w_{i+1}) を受理する n 星的オートマトン M_{x_i} 内のブーケを構成する各ループに $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ のようにラベルをつける。ここで各ループ α がトラック上では 2 本の弧に挟まれたバンドに対応することに注意されたい。とくにバンドの上下端は M_{x_i} の同じ状態に対応している。ループの長さを等しいと仮定したことにより、トラックの局所的な構造は、例えば次の図のようになる。この N トラックの局所的な構造を調べるため、ルー

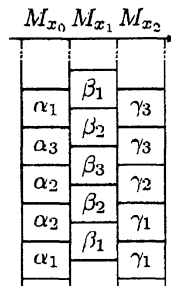


図 8: N トラックの局所的な構造の例

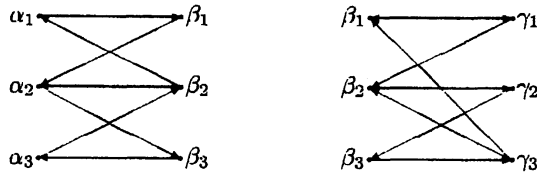
プのラベルの隣接状況を示すグラフを考える。まず、図のように隣接している二つのオートマトン M_{x_i} と $M_{x_{i+1}}$ に対して、 N トラック上に現れる $M_{x_i}, M_{x_{i+1}}$ のブーケをそれぞれ 1 つ固定しておく。

定義 7

以下で定義される有向 2 部グラフを千鳥足グラフ (Meander Traveler's graph), 略して MT グラフと言う。

- $M_{x_i}, M_{x_{i+1}}$ のブーケを構成するループを表すラベルの集合を V_i, V_{i+1} とし、頂点集合を $V_i \cup V_{i+1}$ とする。
- 2つのループ $\alpha \in V_i, \beta \in V_{i+1}$ について、 N トラックにおいて α からレベルが増えながら β が隣接しているとき有向辺 $\overrightarrow{\alpha\beta}$ を与える。また有向辺 $\overrightarrow{\beta\alpha}$ についても同様に与え、これらの集合を辺集合とする。

例えば、上の図から生成される MT グラフは次の図のようになる。



この MT グラフをコンピュータで自動生成するために、隣接行列 M_i^{i+1}, M_{i+1}^i を考える。隣接行列 M_i^{i+1} の (j, k) 成分は、 V_i の元 α_j から V_{i+1} の元 β_k へ、有向辺 $\overrightarrow{\alpha_j\beta_k}$ が存在すれば 1 を、存在しなければ 0 を与える。同様に隣接行列 M_{i+1}^i の (j, k) 成分は、 V_{i+1} の元 β_j から V_i の元 α_k へ、有向辺 $\overrightarrow{\beta_j\alpha_k}$ が存在すれば 1 を、存在しなければ 0 を与える。上の例の左の MT グラフであれば、

$$M_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

この隣接行列をコンピュータで自動生成させるとき、以下の条件で絞り込むことができる。

1. M_i^{i+1} と ${}^tM_{i+1}^i$ の同じ 2 つの行ベクトル (または同じ 2 つの列ベクトル) を同時に交換して得られるものは同一視する。
これは単なる頂点の名前の付け替えと考えることができる。頂点の名前の付け替えは、MT グラフの定義から同一の局所的構造を与えていると考えられる。
2. 各隣接行列のどの行ベクトルも列ベクトルも 0 ベクトルではない。
MT グラフの頂点は、定義から各ブーケを表すアルファベット列である。つまり、どの頂点もある有向辺の始点であり、別の有向辺の終点でもある。したがって、どの行ベクトルも列ベクトルも、少なくとも成分に 1 が一つ以上存在する。
3. 行列の積 $M_i^{i+1} M_{i+1}^i$ および $M_{i+1}^i M_i^{i+1}$ は、成分に 2 以上のものを持たない。
MT グラフに次の左の図のような部分グラフがあれば、ケイリーグラフ上では同じく右の図のような構造がどこかに見出される。

