数理解析研究所講究録 1390 巻 2004 年 54-56

Shift Function について

東海大学理学部情報数理学科 若井 健太郎 (Kentaro Wakai)
Department of Mathematical Sciences,
Tokai University

$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合とする. $x, y \in \mathbb{Q}^\omega$ に和 $+$ と 1 変数関数 σ を次のように定義する.

$$(x+y)(i) = x(i) + y(i)$$

$$\sigma(x)(i) = x(i+1)$$

つまり, 和は各成分の和, σ は成分を 1 つずらす関数である. この σ を shift function と呼ぶことにする. $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ の性質について考える.

1 Quantifier Elimination

$(\mathbb{Q}^\omega, +)$ が divisible であることと, σ が $+$ を保存することから, パラメータ $\bar{a} \in \mathbb{Q}^\omega$ を持つ positive atomic formula は次の形をしていると考えてよい

$$\sum_{i=0}^{n} q_i \sigma^i(x) = t(\bar{a})$$

ただし $q_i \in \mathbb{Q}$ で, t は term である. これを n 次の多項式

$$f = \sum_{i=0}^{n} q_i \sigma^i \in \mathbb{Q}[\sigma]$$

を使って

$$f(x) = t(\bar{a})$$

とも書くことにする. $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$ を任意に取り, 漸化式

$$\sum_{i=0}^{n} q_{m+i} b_{m+i} = t(\bar{a})_m$$

を満たすように $b_n, b_{n+1}, \ldots$ をとれば, $(b_0, b_1, \ldots)$ は $f(x) = t(\bar{a})$ の解になる. すなわち

Proposition 1 任意の *positive atomic formula* は高々可算個の解を持つ.

f が n 次なら, b の最初の n 項を自由に取ることができる. このとき解の自由度は n であるということにする.

2 個の positive atomic formula の共通解については次のことがわかる.

Proposition 2 $f, g \in \mathbb{Q}[\sigma]$, $a, b \in \mathbb{Q}^\omega$ とする. h を f と g の最大公約数, $f = f_0 h$, $g = g_0 h$, $f_0 p + g_0 q = 1$ $(p, q \in \mathbb{Q}[\sigma])$ とする. このとき次は同値である.

- $f(x) = a$ と $g(x) = b$ は共通解を持つ
- $f_0 b = g_0 a$

また, 共通解は $h(x) = pa + qb$ の解になっている.

これを繰り返せば任意有限個の positive atomic formula の共通解は 1 つの positive atomic formula で表せる.

これと解の自由度を考えると次もわかる.

Proposition 3 $f, g_i \in \mathbb{Q}[\sigma]$, $a, b_i \in \mathbb{Q}^\omega$ とする.

$$f(x) = a \wedge g_0(x) \neq b_0 \wedge \cdots \wedge g_n(x) \neq b_n$$

は

- $f(x) = a$ と $g_i(x) = b_i$ の共通解の次数が f の次数と同じ i があれば解なし
- そうでなければ高々可算個の解をもつ

これらのことより次がわかる.

Theorem 4 *$Th(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ で quantifier を消去することができる.*

Corollary 5 *$(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ は quasi-minimal, ω-stable である. ただし quasi-minimal とは任意の definable set が countable または co-countable になることである.*

また, type について次のことがわかる.

Proposition 6 *$(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ の complete type は次の 2 つのどちらかと同値である. $f, g_i \in \mathbb{Q}[\sigma]$, $a, b_i \in \mathbb{Q}^\omega$ とする.*

- *$\{f(x) = a\} \cup \{q_i(x) = b_i : i \in I\}$ (positive atomic formula 1 つとあとは negative atomic formula, b_i は a をパラメータとする positive atomic formula の解)*
- *$\{q_i(x) = b_i : i \in I\}$ (全部 negative atomic formula)*

2 Saturation

type $p = \{\sigma(x) = x\} \cup \{x \neq q(1,1,\ldots) : q \in \mathbb{Q}\}$ は $\mathbb{Q}^\omega$ で解を持たない. パラメータは $(1,1,\ldots)$ だけだから

Proposition 7 $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ は *ω-saturated* でない.

$(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ と同様に $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ も $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ のモデルになる. $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ たちの間に自然な埋め込みを考えると, p は $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$ で解を持つが, $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$ 上 $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$ で解を持たない type を作ることができる. 同様に,

Proposition 8
- $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ は *ω-saturated* でない.
- $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ 上の *type* は $((\mathbb{Q}^{n+1})^\omega, +, \sigma)$ で解を持つ.

これより

Theorem 9 $\cup_{i<\omega}((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ は *Th*$(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ の *quasi-minimal ω-saturated extension.*

である. また, type の形が限定されていることより

Theorem 10 同じ非可算濃度の *Th*$((\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ の *quasi-minimal ω-saturated model* は同型である.

がわかる.

参考文献

[IW1] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *On quasi-minimal structures*, Kokyuroku of the Research Institute of Mathematical Sciences in Kyoto, vol. 1213 (2001), pp. 50-54

[IW2] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *Quasi-minimal structures and uncountable categoricity*, Proc. Sch. of Sci, Tokai Univ., Vol. 37(2002), pp. 1-8

[IW3] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *ω-saturated quasi-minimal models of* $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$, preprint

[ITW] Masanori ITAI, Akito TSUBOI, and Kentaro WAKAI, *Construction of saturated quasi-minimal structure*, to appear in JSL

[MR] David Marker, **Model Theory**, Graduate Texts in Mathematics vol. 217, Springer, 2002