数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 246-249

あとがき

1637 年に出版された René Descartes の「方法叙説」には三つの付録が付けられている。その最後である “La Géométrie” は次のように書き出されている。

“Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de Division: Ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, ...”

もともとは古風なフランス語で書かれており、綴りも現在のものとは違う。ここでは現代風に改めた。これには David Eugene Smith と M. L. Lantham による英訳[1]、河野伊三郎による和訳[2]及び原亨吉による和訳[3]があるが、どれもよく意味がとれないところがあるので、新たに訳してみよう。

「どのような幾何学の問題も、適切に表現すれば、問題の作図に必要ないくつかの線分の長さを知ることに帰着できることは容易にわかる。

そして、どの算術[= 代数]も四つまたは五つの演算、即ち、加法、減法、乗法、除法、及び、一種の除法と云えなくもない、開法[= 根の抽出]のみで組み立てられるように、幾何学でも、求める線分について、それらを既知としてゆく過程でわれわれがすることは同じである。一つの線分に他の線分を付け加える、取り去る、あるいは、数と同じく、単位と名付ける線分を何か一つ定めた後では、他に二つの線分が与えられたとき第四の線分を、この線分対与えられた線分の一つが他の線分対単位線分となるように定めれば、これは乗法と同じである。また、第四の線分を、この線分対一方の線分が単位線分対他方の線分となるように見付ければ、これは除法と同じである。さらに、単位線分と何か他の線分の間に一つ、二つ、あるいはより多くの比例中項を見出すことは平方根、立方根等を求めることと同じである。それ故、話を分かりやすくするために、われわれは恐れることなく、これら算術の用語を幾何学に持ち込むことにする。」

この後、積、商や平方根が実際に定規とコンパスを用いて作図できることが示されている。3 次以上は後で論ずるという一方、実際に紙の上に図を画いて根を求めることは必要でなく、根を表す線分に文字を割り当てるだけでよいという。以後、加減乗除冪及び冪根について、今日われわれが数式に使う記号が導入されている。ただし、等号は = でなく $\propto$ を左右逆さまにしたものを使っている。ここで、線分 a の自乗を a^2 と書き、a の平方と呼ぶが、平面図形ではなくこれも線分の長さを表している。通常の意味で次元の違う量を加えるときには暗黙のうちに単位の冪乗を掛けるまたは割って同一の次元の量として加えることを注意している。

このようにして幾何の問題を解こうとするなら、まず、問題が既に解けたとみなして、既知であろうと未知であろうと作図に必要と思われる線分全てに別々の名前を付ける。次に既知、未知の区別なく、それらがどのように相互に関係しているかを最も自然に示す順序に従って食違いを調べ挙げ、同一の量を二通りに表す方法を発見するように努める。こうして二つの表現が得られればこれらを等しいと置いた方程式が得られる。そして、未知とされる線分の数と同じ数の方程式を見付

[1] The Geometry of René Descartes, Open Court Publ., 1925; Dover, 1954.
[2] デカルトの幾何学, 白林社, 1949.
[3] デカルト著作集, 1, 白水社, 1973; 増補版, 2001.

けるべきであるという。どのようにしてもそれだけの数の方程式が得られないときは、問題が完全に決定的ではないことを意味し、方程式では決定されないいくつかの未知とされる線分を既知として扱う。

「こうした後にもなおいくつかの方程式が残る場合には、これらの方程式を順序よく使って、ある場合には一つづつ、ある場合には他のものと比較しながら、これら未知線分のおのおのを分離して、それ一つに止まって、何か既知とされるものに等しいか、あるいはその平方または立方または平方の平方または超立体または立方の平方等々が、一つは既知で他は単位とこの平方または立方または平方の平方等々の間の比例中項に他の既知の線分を乗じた量から加法または減法によって作られるものに等しくする。これを次のように書く。

$$
\begin{aligned}
z &= b,\\
z^2 &= -az + bb,\\
z^3 &= az^2 + bbz - c^3,\\
z^4 &= az^3 - c^3z + d^4, \ \ etc.
\end{aligned}
$$

すなわち、未知の量にとった z は b に等しいか、z の平方が b の平方引く a 掛ける z に等しいか、z の立方が a 掛ける z の平方足す b の平方掛ける z 引く c の立方に等しい等々。」

このようにしてデカルトは幾何学に代数の表現を持ち込み、ヨーロッパの数学に新局面を拓いたのであるが、中国や日本の数学を学んだ者にとっては逆に東アジアの数学の見方との類似に驚かされる。秦九韶の『数書九章』(1247)、楊輝の『楊輝算法』(1275)、朱世傑の『算学啓蒙』(1299)と『四元玉鑑』(1303) に代表される宋元代の数学、約３００年後にこれを引き継いだ関孝和、建部賢弘などの和算は明確にこの代数パラダイムの下に彼らの数学を展開している。

連立１次方程式は四則のみで解ける。しかし、これを統一的な形で解くためには、負の数や零も数として扱わなければならない。漢代に成立した『九章算術』は既にそのことを明確に述べている。他方、デカルトの線分の長さ、あるいはある線分と単位線分の比は常に正である。

デカルトが上で主張していることは、高次の連立代数方程式も、方程式に対する四則のみで個々の未知数に関する単独代数方程式に帰着できる。特に、未知数の数と同じ数の方程式からなる場合は数係数の単独方程式となり、四則に開法を加えた五技によってすべての問題が解けるというものである。東アジアの数学者たちは同じ方法で具体的な問題を解いてきた。彼らは算木を用いる開方術によっていくらでも高い精度で根を計算することもできた。

ここで肝心なことは一つだけの未知数を残し、他の未知数をすべて方程式系から消去することであるが、デカルトはすぐ続いて次のように楽観的な見通しを述べる。

"Et on peut toujours réduire ainsi toutes les quantités inconnues à une seule, lorsque le Problème se peut construire par des cercles et des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale, qu'on puisse tirer de cette science. Aussi que je n'y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront un peu versés en la Géométrie commune, et en l'Algèbre, et qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver."

「そして、このようにすべての未知量を常にただ一つの未知量に還元することができる。ただし、問題は円と直線によって構成されているとする。あるいは、円錐曲線や更にそれより１、

2次高いより複雑な曲線によって構成されている場合でもそうである。しかし、私はここで立ち止まってこれについて詳しく説明することはしない。というのは、あなた方から自分自身で習得する悦びを奪い、私の考えではこれこそがこの科学から引きだせる最も重要なことであるにもかかわらず、ここで実習しながらあなた方の精神を開発するという実益を奪うことになってしまうからである。その上、普通の幾何と代数にある程度習熟し、この本にある全てに注意を払う人が発見できないほど困難なことを私は何一つここに認めない。」

これは無責任な放言である。連立代数方程式の未知数消去は決してそのように簡単にはできない。関孝和が生前に出版した唯一の著書『発微算法』(1674) はまさしくこの消去を実行した結果が書いてある本であるが、そこで解かれている問題をデカルト自身が全て解くことができたかどうかはなはだ疑わしい。デカルトは方程式の次数が4以下であるという制限を設けているが、未知数の数が3以上の場合はこの制限も無意味になる。消去の途中に現れる方程式の次数は簡単にこの制限を越えてしまうからである。『発微算法』で扱われている問題は全てこの制限を満たしているが、消去して得られる単独方程式の次数は1458次にもなるものがある。

デカルト以前のほとんど全ての数学的問題が代数的に定式化でき、その解法を代数的に解釈すれば、1未知数の開法に帰着できていることはデカルトの言う通りであろう。しかし、このことは、あらゆる連立代数方程式が常に1未知数の代数方程式に帰着でき、従って、開法によって解けることを意味しない。1未知数の代数方程式が常に根号のみを用いて解くことができるか、あるいは有限自由度の力学系が常に1自由度の力学系に帰着できるかなど類似の問題を考えれば明らかである。

連立代数方程式については、いわば奇跡がおきて、デカルトの言う通りになった。これをデカルトの天才に帰す人もいようが、私はその考えに与しない。これはその３５０年以上前の宋元数学者の共通理解であったし、題名通り四つまでの未知数を含む連立代数方程式の未知数消去を扱った書物『四元玉鑑』(1303) が今日まで伝えられているのである。モンゴル時代および大航海時代の東西交流、特に、東方布教に力を注いでいたジェスイット派とデカルトの関係[4]を考えれば東から西への影響がなかったと考えることは却って不自然である。

しかし、それと未知数消去が常に可能であることを証明することはまた別である。これには、類い稀な強靱な精神と、少なくとも、二つの方程式の未知数を消去した結果である終結式を、方程式の次数が高い場合にも表すことのできる数学的表現が必要である。後藤武史と私は、これを世界最初に与えたのは関孝和の『解伏題之法』(重訂1683) であり、ヨーロッパでは E. Bézout が1764年にアカデミーに提出した論文であると考証した。行列式は東西共にこのとき終結式を簡潔に表現するために導入されたのであり、連立1次方程式を解くためではなかった。

これは代数パラダイムの完成を告げる数学史上最大級の業績である。ヨーロッパ数学史では、ニュートン、オイラー、クラメルたちの先行研究を認めながらもベズーが完成者であることを否定する人はいない。しかし、関孝和についてはそれが疑われている。『解伏題之法』の中の5次の行列式の「斜乗」の図の「右斜乗」の符号が間違っているからである。もしこれが、和算史家の定説がいうように、行列式の定義に関わるものならば、関は行列式が何であるかを理解していなかったことになり、問題となるだろう。しかし、三上義夫の博士論文中の訂正[5]にあるように、行列式の定義はそれ以前に済んでいる。そして、事実、関も著者の一人である『大成算経』第17巻(1710以前) にも、井関知辰『算法発揮』(1690) にも正しい5次行列式の展開が与えられている。松永良弼 (1715) の間違った交式の「訂正」、菅野元健(1798) および石黒信由(1798) の「右斜乗」の符号の正しい訂正とそれに伴う複雑な交式の訂正のはるか以前のことである。もし、行列式の展開の符号を間違えた論文が無意味ならば、佐藤賢一の論文「関孝和の行列式の再検討[6]」

[4]佐々木力、デカルトの数学思想, 東京大学出版会, 2003, 第1章第4節.
[5]東洋学報、第20巻(1932年), 第566頁.
[6]科学史・科学哲学, 第11号(1993), 第3–13頁.

も無意味である。これには関も間違えなかった4次の行列式の展開に符号の間違いがある。

われわれの論文は、300年以上前の関孝和の論文を対象にしているとはいうものの、その中の正しい命題はこれこれであり、現代に通用する証明が書いていない場合にはこのようにすれば補える。誤った命題はこれこれだが、それは關の早とちりであって、このようにすれば正しいものに改めることができるという、数学の論文である。そして、関の理論はその80年後に発表され、現代も使われているベズーの理論とほぼ同一であることを立証した。

残念ながら関やベズーの時代の数学には当てはまらないが、ギリシャの数学、あるいは19世紀四分の三を過ぎてからの西洋数学の形式にのっとった命題は、誰が何時述べたものであろうと正しいものは正しく、間違ったものは間違っている。従って、関の数学を現代の数学で解釈する仕方が正当かどうかという問題を除けば、何人もわれわれの論文の正しさを否定することはできない。事実誰からも否定されたことはない。われわれ以前にわれわれと同じ主張をしたことを明示した人もいなかった。私の見るところ佐藤論文も同じことを試みているが、朱書の通りすべてが中途半端である。しかも、江戸時代の数学者も気づいていて、そのために混迷が起きた関の「斜乗」の誤りを誤りとしない決定的な誤りを犯している。

日本科学史学会伊東俊太郎会長は「共同研究集会「数学史の研究」に講師を派遣しませんでしたが、これは日本科学史学会が、科学史研究者個人を会員しており、その科学史観や数学史観は研究者個人によって違っており、また異なっていてもよいと考えます。それで学会を代表して数学観を述べることは何ぴとにもできず、この点はご賢察いただきたく存じます。」という[7]。これは真理が、人により時代によって異なり、また異なってよいという思想である。日本科学史学会の「科学史」はそういうものかもしれないが、「ギリシャの数学」と「現代の数学」には当てはまらない。プラトンがアカデメイアを開いたのは、まず第一に、あるときは A を主張し、あるときには非A を主張して恥じることのないソフィスト達とは異なり、恒久的な善をめざす政治家を養成する学校としてであった。そして、そこで行われた数学研究は、あらゆる批判に耐え、個人によっても、時代によっても異なることのない真理の体系が実在することを実証するためであったという「ギリシャの数学」の起源がよく理解されていないのはまことに残念である。

ギリシャ数学史家伊東俊太郎氏は次のように書いておられる[8]。

「最後に、それではこうした公理的論証数学が何故ギリシャにおいてのみ成立したかという問題をとり上げて結びとしよう。しかし実のところ、この問題は今までに述べて来たことのなかで、すでに殆んど答えられているのである。すなわち公理的論証数学が、「弁証論」にその起源を持つという事実のなかにこそ、この問題をとく核心が存在する。「ディアレクティク」とは個人の間の「対話」(ディアロゴス)であり、ポリスにおいて平等な資格をもつ市民の間でのロゴスの交換である。ここにおいては真理は決して上から絶対的な権威によって与えられるものではなく、対等な資格をもつ個人間の、理性に基づく問答を通じ、**何ぴともがその根拠を問いえ、何ぴともがそれを示さねばならない** という、ポリス社会のもつ独特のエートスこそ、公理的論証数学を生み出す基盤となったのである。ヴェルナンがその近著において論じたギリシャ社会の「イソノミア」(法における平等)の構造こそ、この問題に最も重要な関係をもつものと、筆者には思われる。」

ご自身の行動はここに書かれたことに反しているのではないだろうか。

2004年8月29日

研究代表者　小松彦三郎

[7]2003年10月5日付小松彦三郎宛書簡。原文のママ

[8]伊東俊太郎他「数学史」筑摩書房, 1975, 第113–114頁; 伊東俊太郎編「アルキメデス」朝日出版社, 1981, 第115頁. ただし、ボールド体は小松による。