数理解析研究所講究録 1393 巻 2004 年 44-47

Small Coverの同変手術

大阪市立大学・数学研究所　COE 研究所員　西村 保三（Yasuzo Nishimura）
Advanced Mathematical Institute,
Osaka City University

Small Coverは，Davis-Januszkiewicz [1] で定義された擬トーリック多様体の実部分に相当する概念で，そのトポロジーはトーリック多様体と同様，凸多面体や彩色理論など組合せ論と深く結びついている。本稿では，特に3次元向き付け可能 Small Coverについて，同変手術による変形を組合せ論的に考察する。

1.1　定義と基本概念

Definition 1.1 群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ が作用する実 n 次元多様体 M が n 次元単純凸多面体 P 上の Small Coverとは，軌道空間が（角付き多様体として）P と同相で，群作用が局所的に表現であるものをいう。2つの Small Coverは，ある自己同型 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$ による θ-同変同相写像が存在するとき同型とみなす。

Example 1.2 標準的な $(\mathbb{Z}_2)^n$ 作用で，実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ はn-単体 Δ^n 上の，トーラス T^n は n 次元立方体 I^n 上の Small Cover である。

単純凸多面体 P の余次元1の面の集合を $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P)$ で表す。P 上の Small Cover M において，余次元1の面 $F \in \mathcal{F}$ に対し，Int$F$ の逆像の点の固定部分群（点の取り方によらず決まる）は，ランク1の部分群で，その生成元を $\lambda(F)$ と決めて，表現写像 $\lambda : \mathcal{F} \to (\mathbb{Z}_2)^n$ を定義する。表現写像は，次の条件を満たし，P の高々 $2^n - 1$ 色による特殊な面彩色である。

(*) $F_1 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset \Longrightarrow \lambda(F_1), \cdots, \lambda(F_n)$ は一次独立

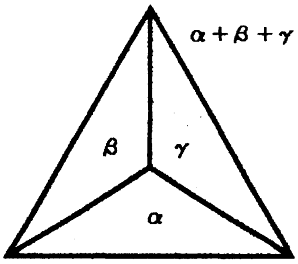
なお2つの表現写像 $\lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{F} \to (\mathbb{Z}_2)^n$ は，ある自己同型 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$ が存在して $\lambda_2 = \theta\lambda_1$ を満たすとき同じものとみなす。

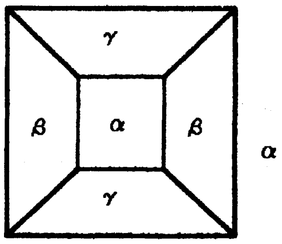
Theorem 1.3 ([1]) 単純凸多面体 P 上の Small Coverは，P 上の表現写像で分類される。

凸多面体と表現写像の組 (P, λ) に対応する Small Cover $M(P, \lambda)$ は次のように構成できる。

$$M(P,\lambda) := P \times (\mathbb{Z}_2)^n / \sim,\quad (x,g) \sim (y,h) \Leftrightarrow x = y,\ g \equiv h \bmod \lambda(F),\ (x \in F)$$

Example 1.4 実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ とトーラス T^3 に対応する多面体とその上の表現写像はそれぞれ下図で表される。ここで α, β, γ は $\mathbb{Z}_2^3$ の基底である。





Small Cover の向き付け可能性は，次の定理で判定できる。

Theorem 1.5 **([4])** $(\mathbb{Z}_2)^n$ の基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対し，$\epsilon(e_i) = 1$ によって準同型写像 $\epsilon : (\mathbb{Z}_2)^n \to \mathbb{Z}_2$ を決める。Small Cover $M(P, \lambda)$ が向き付け可能である必要十分条件は，$\epsilon\lambda \equiv 1$ となる基底が存在することである。

$n = 3$ の時，Small Cover が向き付け可能であるのは，表現写像の像がある基底 $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset (\mathbb{Z}_2)^n$ を固定したとき $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$ に入ることである。これは P の高々 4 色による彩色に他ならず，有名な四色定理より次の系を得る。

Corollary 1.6 任意の 3 次元単純凸多面体上に向き付け可能 Small Cover が存在する。

n 次元 Small Cover で表現写像の像が $(\mathbb{Z}_2)^n$ の基底となるもの，すなわち表現写像が n 彩色に対応するものは，“線形モデル”と呼ばれる特別なクラスを成す。Izmestiev は [3] で 3 次元線形モデルについて詳しく考察し，それが $\mathbb{R}^4$ へ同変に埋め込めることを示し，さらに次節で紹介する同変手術と連結和による特徴づけを行った。なお 3 次元単純凸多面体が線形モデルを持つ，すなわち 3 彩色可能である必要十分条件はよく知られており，全ての面が偶数角形の多面体であることである。

1.2 連結和と同変手術

2 つの Small Cover $M_i \to P_i$ $(i = 1, 2)$ からそれぞれの固定点 $v_i \in M_i$ の近傍球を取り除き，その境界同士を同変同相写像によって張り合わせることで，同変連結和 $M_1 \#_{v_1, v_2}^{\phi} M_2$ が定義される。ここで，$\phi : \mathcal{F}_{v_1} \to \mathcal{F}_{v_2}$ は，固定点の近傍の間の同変同相写像によって決まる多面

体の頂点 $v_i = \pi_i(v_i) \in P_i$ を含む余次元 1 の面の集合 $\mathcal{F}_{v_i} = \{F \in \mathcal{F}(P_i) \mid v_i \in F\}$ の間の全単射である。逆に，任意の全単射 $\phi : \mathcal{F}_{v_1} \to \mathcal{F}_{v_2}$ に対し，必要なら多面体 P_2 を向きを逆にした同型な多面体で取替えることで ϕ を v_i の近傍間の同相写像に拡張して，さらに M_2 の表現写像 $\lambda_2 : \mathcal{F}(P_2) \to \mathbb{Z}_2^n$ を適当な基底変換によって，$\lambda_2\phi = \lambda_1$ と仮定して，彩色多面体の連結和 $(P_1, \lambda_1)\#^{\phi}_{v_1,v_2}(P_2, \lambda_2)$ が定義できる。なお任意の 2 つの凸多面体の連結和が組合せ的に凸多面体となる事実は，一般の次元で Buchstaber-Ray によって証明されており，連結和はいつでも可能である（3 次元では多面体の Steinitz の定理から自明）。このとき，明らかに

$$M(P_1, \lambda_1)\#^{\phi}_{v_1,v_2}M(P_2, \lambda_2) = M((P_1, \lambda_1)\#^{\phi}_{v_1,v_2}(P_2, \lambda_2))$$

が成立する。

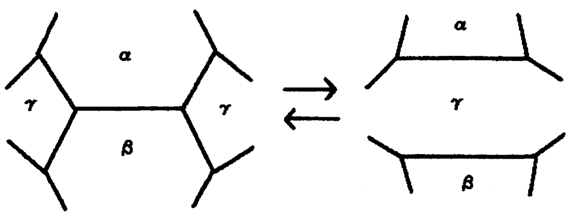
Definition 1.7 Small Cover が素（prime）とは，2 つの Small Cover の連結和の形で表せないときをいう。

単純多面体 P は次の条件を満たすときに，旗状（flag）と呼ばれる。
(*) 余次元 1 の面の集合 $F_1, \cdots, F_l$ がどの 2 つも互いに交わるならば，$F_1 \cap \cdots \cap F_l \neq \emptyset$

Davis-Januszkiewicz-Scott [2] によって，Small Cover $M \to P$ が非球面的であることと，P が旗状であることの同値性が証明されている。単純凸多面体 P が旗状のとき，P 上の任意の Small Cover $M \to P$ は素であるが，逆は一般には成立しない。

Lemma 1.8 3 次元向き付け可能 Small Cover $M \to P$ について，M が素であることと P が旗状であることは同値である。

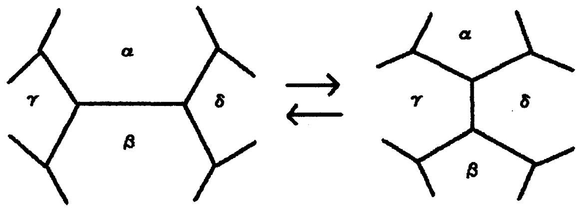
多面体において周りが 3 色で彩色されている辺の逆像（$\approx S^1$）の近傍ソリッド・トーラスに関する手術は同変で，多面体では下図で表される変換に対応する。この変換と逆変換を手術 I と呼ぶことにする。



Izmestiev は 3 次元線形モデルについて，連結和と手術による特徴づけを行った。

Theorem 1.9 ([3]) 任意の３次元線形モデルは，有限回のトーラス T^3 の連結和と手術Ｉによって構成できる。

この定理を，３次元向き付け可能Small Coverに拡張する。向き付け可能３次元Small Coverは，４彩色単純凸多面体に対応する。多面体において周りが４色で彩色されている辺の近傍を下図のように変形する変換（bisteller-1 変換）はSmall Coverにおいて有理数２で表される同変Dehn手術が対応し，これを手術IIと呼ぶことにする。



Theorem 1.10 任意の向き付け可能３次元 Small Cover は，有限回の実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ とトーラス T^3 の連結和と手術Ｉ IIによって構成できる。

略証. ４彩色多面体は，周りが３色の面を持つ。この面が３角形なら対応する Small Cover は $\mathbb{R}P^3$ が連結和分解し，４角形以上なら手術IIを施すと面の角数が１つ減る。ここで手術IIは，多面体が旗状ならSmall Coverの圏で可能であり，そうでなければ Lemma 1.8 より Small Cover は連結和分解するので，帰納的に３彩色多面体に帰着して，Theorem 1.9 より定理を得る。

参考文献

[1] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417-451.

[2] M. Davis, T. Januszkiewicz and R. Scott, *Nonpositive curvature of blow-ups*, Sel. Math. new ser. **4** (1998), 491-547.

[3] I. V. Izmestiev, *Three-dimensional manifolds defined by coloring a simple polytope*, Math. Notes **69** (2001), 340-346.

[4] H. Nakayama and Y. Nishimura, *The orientability of small covers and coloring simple polytopes*, to appear in Osaka J. Math.