

# 局所有限トポス上の離散数学の 構築を目指して — Burnside 環

Toward Discrete Mathematics on a locally finite topos

— Burnside rings

吉田知行 (YOSHIDA, Tomoyuki)

(北海道大学理学部 Hokkaiido University)

## 1 トポス

トポスとは何か? Johnstone の "Sketches of an elephant" によると 13 もの見方があるという. たとえば次のようなものである:

- (1) サイト上の層のカテゴリー.
- (2) 有限極限とベキ対象を持つカテゴリー.
- (3) 直観主義高階論理の具体化.

局所有限トポス (Hom-set が有限なトポス) に対する見方は次である:

局所有限トポス = 離散数学を構築するための土台

トポス理論で「有限な対象」をどう定義するかは重要な問題であり, いくつかの定義が知られている. 意外なことに, カテゴリー論において局所有限トポスはあまり注目されていないようだ. もしかしたら, 我々の理論も, 局所有限トポスのかわりに, 一般のトポスにおける「有限な対象のなす部分カテゴリー」を使うべきかもしれない.

それはさておきトポスの定義と例をいくつかあげておこう.

**定義.** 次の条件を満たすカテゴリー  $\mathcal{E}$  をトポスという:

- (T1) 有限極限 (終対象  $\mathbf{1}$ , 直積  $X \times Y$ , ファイバー積など) を持つ.  
 (T1') 有限余極限 (始対象  $\emptyset$ , 直和  $X + Y$ , 余等化など) を持つ.  
 (T2) 各直積関手  $A \times (-) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  は右随伴関手  $(-)^A$  を持つ:

$$A \times (-) \dashv (-)^A, \quad \therefore \text{Hom}(A \times X, Y) \cong \text{Hom}(X, Y^A).$$

- (T3) 部分対象分類子 (subobject classifier)  $t : \mathbf{1} \rightarrow \Omega$  を持つ:

$$\text{Sub}(X) \cong \text{Hom}(X, \Omega); A(\subseteq X) \mapsto \chi_A.$$

各  $f : X \rightarrow \Omega$  には,  $f$  と  $t$  のファイバー積によって  $A \subseteq X$  が定まる.

トポスの例.

(1) **Set** : 集合と写像のカテゴリ. この場合  $Y^X := \text{Map}(X, Y)$  ( $X$  から  $Y$  への写像全体の集合) であり, 部分対象分類子は  $\Omega := \mathbf{2} := \{0, 1\}$  である.  $t : \mathbf{1} = \{1\} \rightarrow \mathbf{2}$  は包含写像である. 実際  $X$  の部分集合と写像  $X \rightarrow \mathbf{2}$  の対応はよく知られている:  $\text{Sub}(X) \cong 2^X$ .

(2)  $\hat{\mathcal{C}} := \text{Set}^{\text{cop}}$  : 小さなカテゴリ  $\mathcal{C}$  上の集合の前層 (すなわち  $\mathcal{C}$  から **Set** への反変関手) のカテゴリ. 各  $c \in \mathcal{C}$  に対し, 反変 Hom-functor を  $H_c := \text{Hom}(-, c)$  とするとき,  $Y^X$  や  $\Omega$  は Yoneda's lemma を使って構成できる:

$$Y^X(c) = \text{Hom}(H_c \times X, Y), \quad \Omega(c) = \text{Sub}(H_c).$$

(3) 群  $G$  に対し,  $G$ -集合と  $G$ -写像のなすカテゴリ.  $Y^X$  と  $\Omega$  は **Set** と同じく,  $\text{Map}(X, Y)$  と  $\mathbf{2}$  である.

(4)  $\text{Shv}(X)$  : 位相空間  $X$  上の集合の層のカテゴリ.

局所有限トポスの例.

(1)  $\text{Set}_f$  : 有限集合と写像のカテゴリ.

(2)  $\text{Set}_f^G$  : 有限  $G$ -集合と  $G$ -写像のカテゴリ. ここで  $G$  は有限または無限群.  $Y^X = \text{Map}(X, Y)$  で, 作用は  ${}^g f : x \rightarrow gf(g^{-1}x)$ .  $\Omega = \mathbf{2} = \{0, 1\}$  で, 作用は自明なもの.

(3)  $\text{Set}_f^S$  : 有限  $S$ -集合と  $S$ -写像のカテゴリ ( $S$  は単位的有限半群).

$$Y^X := \text{Map}_S(S \times X, Y) := \{\lambda : S \times X \rightarrow Y \mid \lambda(us, ux) = u\lambda(s, x)\}$$

$${}^u \lambda : (s, x) \mapsto u\lambda(su, x).$$

$$\Omega := \{J \subseteq S \mid JS = J\} \quad (\text{左イデアルの集合}).$$

(4) **Map, Surj** : 有限集合同士の写像  $X \rightarrow X'$  を対象とし, 射  $(X \rightarrow X') \rightarrow (Y \rightarrow Y')$  を可換図式で定義して得られるカテゴリー **Map**. 同様に有限集合同士の全射を対象とするカテゴリー **Surj**. ベキ等写像付きの有限集合  $\epsilon : X \rightarrow X$ ,  $\epsilon^2 = \epsilon$  のカテゴリーは, **Macp** に同値である.

(5) **RForest** $_{\leq h}$  : 高さが  $h$  以下の根付き森のカテゴリー.

(6)  $\hat{\mathcal{C}} := \mathbf{Set}_f^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$  : 有限カテゴリー  $\mathcal{C}$  上の有限前層 (すなわち  $\mathcal{C}$  から  $\mathbf{Set}_f$  への反変関手) のカテゴリー.

(7)  $\text{Shv}(\hat{\mathcal{C}}, J)$  : 有限カテゴリー  $\mathcal{C}$  上の Grothendieck topology  $J$  に関する層のカテゴリー. 生成素の有限集合を持つ局所有限トポスは必ずカテゴリーに同値である (Giraud の定理の局所有限トポス版).

(8) 体  $k$  の有限次分離的可換代数とその多元環準同型のなすカテゴリーの双対カテゴリー. ガロア理論により, このカテゴリーは,  $k$  の分離閉包のガロア群  $G$  に対する有限  $G$ -集合のカテゴリーに同値である.

(局所有限) トポス  $\mathcal{E}$  の基本的性質 :

- 分配法則, 指数法則

$$\begin{aligned} X \times (Y + Z) &\cong X \times Y + X \times Z, \quad X \times \emptyset \cong \emptyset, \\ (Y \times Z)^X &\cong Y^X \times Z^X, \quad 1^X \cong 1, \\ Z^{X+Y} &\cong Z^X \times Z^Y, \quad Z^\emptyset \cong 1. \end{aligned}$$

これらは,  $X \times (-)$  が  $(-)^X$  の左随伴であることによる.

• コンマカテゴリー  $\mathcal{E}/X$  とは,  $X$  への射を対象とし, 可換三角形によって  $f : (A \rightarrow X) \rightarrow (B \rightarrow X)$  を定義するものである. トポスのコンマカテゴリーはトポスである. 集合のカテゴリーの場合,  $X$  上のコンマカテゴリーの対象は,  $X$  で番号付けられた集合  $(A_x)_{x \in X}$  と同一視できる.

• 各  $f : X \rightarrow Y$  に対し, 関手  $\sigma_f, \Pi_f : \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$ ,  $f^* : \mathcal{E}/Y \rightarrow \mathcal{E}/X$  が存在して,  $\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f$  で,

$$\begin{aligned} \Sigma_f &: (A \rightarrow X) \mapsto (A \rightarrow X \rightarrow Y), \\ f^* &: (B \rightarrow Y) \mapsto (A \times_Y X \rightarrow X). \end{aligned}$$

集合のカテゴリーの場合, これらは,

$$\begin{aligned} \Sigma_f &: (A \xrightarrow{\alpha} X) \mapsto (A \longrightarrow X \longrightarrow Y), \\ f^* &: (B \xrightarrow{\beta} Y) \mapsto (B \times_Y X \xrightarrow{\text{pr}} X), \\ \Pi_f &: (A \xrightarrow{\alpha} X) \mapsto \{(y, \sigma) \mid y \in Y, \sigma : f^{-1}(y) \rightarrow A, \alpha\sigma = \text{id}\}. \end{aligned}$$

によって与えられる. コンマカテゴリーの対象を indexed object と満たすなら, これらのファンクターは,

$$\begin{aligned}\Sigma_f &: (A_x)_{x \in X} \mapsto \left( \prod_{x \in f^{-1}(y)} A_x \right)_{y \in Y}, \\ f^* &: (B_y)_{y \in Y} \mapsto (B_{f(x)})_{x \in X}, \\ \Pi_f &: (A_x)_{x \in X} \mapsto \left( \prod_{x \in f^{-1}(y)} A_x \right)_{y \in Y}.\end{aligned}$$

で与えられる.

- $f: X \rightarrow Y$  は一意的に全単射分解される:  $f = i \circ e: X \rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow Y$ .
- 部分対象分類子  $\Omega$  は内部的 Heyting 代数である. すなわち

$$\vee, \wedge: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \neg: \Omega \rightarrow \Omega$$

が存在して Heyting 代数の公理を満たす. ここで Heyting 代数とは,

$$y^x := \sup\{a \mid a \vee x \leq y\}$$

がつねに存在する半順序集合である.

これより, 部分対象の集合  $\mathbf{Sub}(X) \cong \text{Hom}(X, \Omega)$  は Heyting 代数である: すなわち分配束で,  $\neg A = \max\{A' \subset X \mid A \wedge A' = \emptyset\}$  がつねに存在する. とくに, 局所有限トポスの場合は, 単に分配束であることを意味する. 集合のカテゴリーの場合,  $A \subset X$  に対し,  $\neg A = A^c$  (補集合) である.

•  $f: X \rightarrow Y$  に対し,  $\exists f, \forall f: \mathbf{Sub}(X) \rightarrow \mathbf{Sub}(Y)$  と  $f^{(-1)}: \mathbf{Sub}(Y) \rightarrow \mathbf{Sub}(X)$  が存在して,  $\exists f \dashv f^{(-1)} \dashv \forall f$ . ここで束  $\mathbf{Sub}(X)$  をカテゴリーと見なしている. 有限集合のカテゴリーの場合,

$$\exists f: A \mapsto f(A), \quad f^{(-1)}: B \mapsto f^{-1}(B), \quad \forall f(A) = f(A^c)^c$$

となっている.

• 局所有限トポス  $\mathcal{E}$  は狭義 Krull-Schmidt カテゴリーである. すなわち,  $\text{Con}(\mathcal{E})$  を連結 (つまり直既約) な対象のなす部分カテゴリーとすれば, 任意の対象  $X$  は  $X = I_1 + \cdots + I_r$  ( $I_j \in \text{Con}(\mathcal{E})$ ) と部分対象の disjoint union として一意的に分解される. とくに,  $n_I := \#\{I_j \cong I\}$  は,  $X$  の直和分解によらない.

トポスは集合のカテゴリーによく似ているが違いもある. 部分対象のなす順序集合  $\mathbf{Sub}(X)$  は, Heyting 代数だが一般には Boole 代数でない. すなわち補集合の補集合が一般にはもとに戻らない:  $\neg\neg A \neq A$ . 終対象の  $\mathbf{Sub}(1)$  も Boole 代数とは限らない.

## 2 トポスの Burnside 環

以下局所有限トポス  $\mathcal{E}$  はつねに小さな骨格を持つ, すなわち同型類のクラス  $\mathcal{E}/\cong$  が集合をなすと仮定する. また  $\mathcal{I} := \text{Con}(\mathcal{E})$  とする. この場合,  $B^+(\mathcal{E}) := \mathcal{E}/\cong$  は直和と直積に関して可換半環をなすので, その Grothendieck 環  $B(\mathcal{E})$  を考えることができる. これを **Burnside 環** と呼んでも良いであろう.

$I$  が連結な対象の場合,

$$\text{Hom}(I, X + Y) \cong \text{Hom}(I, X) + \text{Hom}(I, Y), \quad \text{Hom}(I, \emptyset) = \emptyset$$

なので, 環準同型写像

$$\varphi_I : B(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{Z}; [X] \longmapsto |\text{Hom}(I, X)|$$

を得る. したがって **Burnside 準同型**

$$\varphi := (\varphi_I) : B(\mathcal{E}) \longrightarrow \tilde{B}(\mathcal{E}) := \prod_{I \in \mathcal{I}/\cong} \mathbb{Z}$$

を得る. ここで  $\mathcal{I} := \text{Con}(\mathcal{E})$  とおいた. **Obstruction の群**  $\text{Obs}(\mathcal{E})$  と Cauchy-Frobenius map  $\psi = (\psi_I)$  を

$$\text{Obs}(\mathcal{E}) := \prod_{I \in \mathcal{I}/\cong} (\mathbb{Z}/|\text{Aut}(I)|\mathbb{Z}),$$

$$\psi_I : \tilde{B}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{Z}/|\text{Aut}(I)|\mathbb{Z}; \chi \mapsto \sum_{\alpha \in \text{Aut}(I)} \chi(I/\alpha) \bmod |\text{Aut}(I)|.$$

ここで  $I/\alpha$  は  $1, \alpha : I \rightarrow I$  の余等化 (coequalizer).

**基本定理.**

$$0 \longrightarrow B(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi} \tilde{B}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\psi} \text{Obs}(\mathcal{E}) \quad (\text{exact}),$$

系. 局所有限トポスにおいて

$$X \in Y \iff |\text{Hom}(I, X)| = |\text{Hom}(I, Y)| \quad \forall I \in \text{Con}(\mathcal{E})$$

米田のレンマによると,  $\text{Hom}(-, X) \cong \text{Hom}(-, Y) \iff X \cong Y$  である. したがって, この系は米田よりもっと強い結果を与えている.

局所有限トポスの Burnside 環で困るのが、加法群として無限生成なこと、すなわち  $|\text{Con}(\mathcal{E})/\cong| = \infty$  となることである。  $B(\mathcal{E})$  が有限生成な局所有限トポスは、ある有限群 ( $\mathcal{E}$  の基本群)  $G$  に対する  $\text{Set}_f^G$  と同値なことが知られている。対策はふたつある。

- (i) 射有限群の Burnside 環の場合でやった完備化  $\hat{B}(\mathcal{E})$  を考える方法。
- (ii) 有限個の連結成分の集合  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}/\cong$  に関する相対 Burnside 環  $B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  を考える方法。

ここでは一般性の高い後者の方法について説明する。有限集合  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}/\cong$  を取り、

$$\begin{aligned} B(\mathcal{E}, \mathcal{J}) &:= \mathbb{Z}\mathcal{J}, \quad \tilde{B}(\mathcal{E}, \mathcal{J}) := \mathbb{Z}^{\mathcal{J}}, \\ \text{Obs}(\mathcal{E}, \mathcal{J}) &:= \prod_{J \in \mathcal{J}} (\mathbb{Z}/|\text{Aut}(J)|\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

と置く。

**定理.**  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}/\cong$  を、商対象 (余等化でよい) に関して閉じた有限集合とする。このとき次が成り立つ。

- (1) 次は完全系列である ( $\varphi, \psi$  の定義は上と同じ) :

$$0 \longrightarrow B(\mathcal{E}, \mathcal{J}) \xrightarrow{\varphi} \tilde{B}(\mathcal{E}, \mathcal{J}) \xrightarrow{\psi} \text{Obs}(\mathcal{E}, \mathcal{J}) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}),$$

- (2)  $B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  は  $\varphi$  を環準同型にするような環構造をただひとつ持つ。

この定理の (2) の環  $B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  を  $\mathcal{J}$  に関する相対 Burnside 環という。この環は、 $\mathcal{E}$  にも依存するように書いたが、実際は部分カテゴリー  $\mathcal{J}$  だけで構造が決まる。

**系.** 全射環準同型  $B(\mathcal{E}) \longrightarrow B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  が存在する。

**注.** この系から、とくに単射環準同型写像

$$B(\mathcal{E}) \hookrightarrow \hat{B}(\mathcal{E}) := \varprojlim_{\mathcal{I}} B(\mathcal{E}, \mathcal{I})$$

の存在が言える。この写像は一般には全射でない。右辺の  $\hat{B}(\mathcal{E})$  が完備 Burnside 環で、位相環  $\tilde{B}(\mathcal{E}) = \mathbb{Z}^{\mathcal{I}/\cong}$  (ここで  $\mathcal{I} := \text{Con}(\mathcal{E})$ ) における  $\varphi$  の像の閉包に同型である。

例.  $G_0(\mathcal{E})$  を, 同型類の集合  $\mathcal{E}/\cong$  で生成され, 次の定義関係式を持つアーベル群とする:

$$[\emptyset] = 0, [X \cup Y] + [X \cap Y] = [X] + [Y].$$

$G_0(\mathcal{E})$  も直積によって環になっている.

$\mathcal{E}$  の対象  $X$  が既約とは,  $X = A \cup B \Rightarrow A = X$  または  $B = X$  をいう.  $\mathcal{J}$  として, 既約な対象の同型類  $\text{Irr}(\mathcal{E})$  を取ると, 環同型  $B(\mathcal{E}, \mathcal{J}) \cong G_0(\mathcal{E})$  がある.

### 3 ベキ等元公式

$\mathcal{E}$  を局所有限トポス,  $\mathcal{J}$  を  $\text{Con}(\mathcal{E})/\cong$  の有限部分集合で, 商対象に関して閉じているとする ( $\mathcal{J}$  の間の射の像  $\text{Im}(f)$  と, 自己同型と恒等射との余等化  $J/\alpha$  に関して閉じていけばよい). 以下では,  $\mathcal{J}$  を  $\mathcal{E}$  の充満部分カテゴリーと見なす.  $I \cong J \Rightarrow I = J$  である.

まず有理数係数相対 Burnside 環  $\mathbb{Q}B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  (以下, テンソル積の記号  $\otimes_{\mathbb{Z}}$  は省略) の原始ベキ等元の公式を求めよう.  $\varphi: \mathbb{Q}B(\mathcal{E}, \mathcal{J}) \cong \mathbb{Q}^{\mathcal{J}}$  なので,  $\mathbb{Q}B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  は各  $J \in \mathcal{J}$ ; に対応した原始ベキ等  $e_J$  を持つ:

$$\varphi_K(e_J) = \delta_{J,K} \quad (I, J \in \mathcal{J}).$$

$\mathcal{J} \times \mathcal{J}$  型の正方行列  $H := (|\text{Hom}(I, J)|)$  の逆行列を  $H' = (h'_{I,J})$  とすれば

$$e_J = \sum_I h'_{I,J} [I]$$

であることは容易に確かめられる. したがって,  $\mathbb{Q}B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  の原始ベキ等元を求めるには Hom-set 行列  $H := (|\text{Hom}(I, J)|)$  の逆行列を求めればよい. 逆行列を求めるには,  $H$  の三角行列の積に分解し, それぞれの三角行列の逆行列を求めればよい. 有限群の Burnside 環の場合と同様, メビウス関数を使った公式が得られるが, やや複雑なので, 詳しいことは別の機会にしたい.

次の記号を使う:

$$\begin{aligned} \text{Mon}(I, J) &:= (I \text{ から } J \text{ への単射の集合}), \\ \text{Epi}(I, J) &:= (I \text{ から } J \text{ への全射の集合}), \\ \text{Sub}(I, J) &:= (I \text{ に同型な } J \text{ の部分対象の集合}), \\ \text{Quot}(I, J) &:= (J \text{ に同型な } I \text{ の商対象の集合}). \end{aligned}$$

単射と全射の定義から

$$\begin{aligned} |\text{Sub}(I, J)| &= |\text{Mon}II, J|/|\text{Aut}(I)|, \\ |\text{Quot}(I, J)| &= |\text{Epi}II, J|/|\text{Aut}(J)|. \end{aligned}$$

次のような  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$  型行列を考える：

$$L := (|\text{Quot}(I, J)|), \quad D := (|\text{Aut}(I, J)|\delta_{IJ}), \quad U := (|\text{Sub}(I, J)|).$$

このとき次が成り立つ：

- $H = LDU$
- ある置換行列  $P$  があって、 $P^{-1}LP$  は上三角ベキ単行列、 $P^{-1}UP$  は下三角ベキ単行列になる。
- したがって  $H = LDU$  は行列  $H$  のいわゆる LDU-分解である。
- とくに  $H$  は正則行列で、 $H^{-1} = U^{-1}D^{-1}L^{-1}$ 。

$L$  と  $U$  の逆行列を求めるために、部分群束に相当する順序集合を作る必要がある。  $S$  を、 $\mathcal{J}$  のどの対象も部分対象として含むような  $\mathcal{E}$  の対象とする： $\mathcal{I} \subseteq \text{Sub}(S)$ 。このとき集合

$$\tilde{\mathcal{J}} := \{(I, \alpha) \mid I \in \mathcal{J}, \alpha \in \text{Mon}(I, S)\}$$

は、 $(I, \alpha) \leq (J, \beta)$  であることを、 $\lambda: I \rightarrow J$  が存在して  $\beta \circ \lambda = \alpha$  であるとして定義する。これによって  $\tilde{\mathcal{J}}$  は有限順序集合になる。  $M$  と  $F$  を次のような行列とする：

$$M_{(I,\alpha),(J,\beta)} := \begin{cases} 1 & ((I, \alpha) \leq (J, \beta)) \\ 0 & (\text{else}), \end{cases} \quad F_{I,(J,\beta)} := \begin{cases} 1 & (I = J) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

$M$  は順序集合  $\tilde{\mathcal{J}}_m$  の結合行列であり、その逆行列はメビウス関数  $\mu_m$  で表される： $M^{-1} = (\mu_m((I, \alpha), (J, \beta)))$ 。

$$FZ = DUF$$

ところで、各  $I \in \mathcal{J}$  に単射  $\lambda_I: I \rightarrow S$  をひとつ定めておき、

$$F'_{(I,\alpha),J} = \begin{cases} 1 & (I = J, \alpha = \lambda_I) \\ 0 & (\text{else}). \end{cases}$$



とする. このとき  $FF' = I$  (単位行列) である. したがって,

$$U^{-1} = FZ^{-1}F'D$$

である. これより

$$U_{I,J}^{-1} = \sum_{\alpha: I \rightarrow J} \mu_m((I, \alpha), (J, \mu_J)) \cdot |\text{Aut}(J)|.$$

## 4 今後の課題

今後の指針となる様な Burnside 環周辺の問題をいくつかあげておく.

### 1. 有限群以外の群への拡張

- (a) 射有限群の完備 Burnside 環. 指数有限の正規開部分群  $M \leq N \leq G$  があれば, 自然な環準同型  $B(G/M) \rightarrow B(G/N)$  があり, 射影的極限  $\widehat{B}(G) := \varprojlim B(G/N)$  が考えられる. これについては有限群の場合とほぼ並行した議論が可能である (Dress-Siebeneicher 1988).
- (b) 無限巡回群  $C_\infty$  とその完備化  $\widehat{C}_\infty$ . 完備 Burnside 環  $\widehat{B}(\widehat{C}_\infty)$  は, Witt ベクトルの環  $W(\mathbb{Z})$ , Rota のネックレス環  $\text{Nr}(\mathbb{Z})$ , 普遍ラムダ環  $\Lambda$  などに同型である (Dress-Siebeneicher 1986. ). 当然群の Burnside 環の見地から, Witt ベクトルに関係した体論, ネックレス環に関係した数え上げの組合せ論, 普遍ラムダ環に関係した代数的位相幾何や可換環論を見直すことができるかもしれない.
- (c) コンパクトリー群.  $B(G) := \{\text{コンパクト } G\text{-集合}\} / \sim$  によってコンパクトリー群の Burnside 環を定義する (tom Dieck 1979). ここで

$$X \sim Y \iff \chi(X^H) = \chi(Y^H) \quad \forall H \leq G.$$

オイラー標数  $-1$  のコンパクト空間が存在するので, Grothendieck 群を取る必要はない.

2. 高次 Burnside 加群. 加法的カテゴリー (いわゆる exact category) の代数的 K-理論はかなりの程度完成していると言える. Burnside 環の理論は, 非加法的カテゴリー (有限  $G$ -集合のカテゴリー, カテゴリーとしての有限順序集合, 局所有限トポス, さらには一意的全単射分解のできるカテゴリー) に対する代数的 K-理論にまで拡張できる可能性を示唆している.

(a) 有限群の  $B_1(G)$ . この群は, exact category の  $K_1$  と同様に定義できる. すなわち,  $G$ -集合  $X$  とその自己同型  $\sigma$  との対の集合  $\{[X, \sigma] \mid X \in \mathbf{Set}_f^G, \sigma \in \text{Aut}(X)\}$  を生成系とし, 次の関係式を満たす加法群とすれば良い:

$$(i) \exists \lambda : X \cong Y \text{ s.t. } \tau \circ \lambda = \lambda \circ \sigma \implies [X, \sigma] = [Y, \tau],$$

$$(ii) [X, \sigma] + [X, \tau] = [X, \sigma \circ \tau],$$

$$(iii) [X, \sigma] + [Y, \tau] = [X + Y, \sigma + \tau].$$

容易に分かるように

$$B_1(G) \cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes B(G)) \oplus \bigoplus_{(H) \in C(G)} (WH)_{\text{ab}}$$

である. ここで  $WH := N_G(H)/H$  で,  $X_{\text{ab}}$  は群  $X$  のアーベル化.  $B_1$  についても, やはり基本基本定理がある.

(b) 局所有限トポスの  $B_1(\mathcal{E})$ . 相対  $B_1$  加群  $B_1(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  が  $B(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  の場合と同様に定義され,

$$B_1(\mathcal{E}, \mathcal{J}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes B(\mathcal{E}, \mathcal{J}) \oplus \bigoplus_{I \in \mathcal{J}} (\text{Aut}(I))_{\text{ab}}$$

となる. 完備 Burnside 加群  $\widehat{B}_1(\mathcal{E})$  の定義もできる. 実用的には,  $G_1(\mathcal{E}) \cong B_1(\mathcal{E}, \text{Irr}(\mathcal{E})) / \cong$  の方が使いやすそう.

(c) 高次 Burnside 加群  $B_n(G), B_n(\mathcal{E})$ . 高次 Burnside 加群  $B_n(\mathcal{E})$  や  $B_n(\mathcal{E}, \mathcal{J})$  のうまい定義があるかどうかは分からない. Quillen による高次  $K$ -群の定義が, 一意的 epi-mono 分解カテゴリーに拡張できるかが問題である (可能と思う).

3. Burnside 環は「整数環」の資格を持つか? 定義からは確かにそうだが, 当然持ってほしいいくつかの性質が成り立たない. うまい解釈をすれば成り立つのかもしれない.

(a) 単項イデアル整域でない. 自明な場合を除けば, 単項イデアル性も駄目だし整域にもならない. 要するに初等整数論ができない. 剰余環が Tambara functor になるようなイデアル (Mackey functor としての) の単項性も一般には駄目である.

何らかの意味で「単項イデアル環」もどきになるなら, その「表現」は制御できるはずである. しかし, 可換環としての普通の表現や, Mackey functor を「表現」としても直既約表現が多すぎる.

(b) なぜラムダ環にならないのか？整数環  $\mathbb{Z}$  は

$$\lambda_k(x) := \binom{x}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

によっていわゆる  $\lambda$ -ring になる. しかし非巡回群の Burnside 環は  $\lambda$ -ring にならない. ただし,  $\lambda_k([X])$  として  $G$ -集合  $X$  の  $k$  点部分集合のなす  $G$ -集合を取れば, pre  $\lambda$ -ring にはなる.

無限巡回群の完備 Burnside 環  $\widehat{B}(C_\infty)$  は普遍  $\lambda$ -ring に同型であり, Witt ベクトルの環にも同型になる. いくつかあるシローの定理の証明のうち, Wielandt による置換表現を使ったものや Brauer による指標理論を使ったものを読み直すと, その背景には巡回群の Burnside 環が  $\lambda$ -ring になるという性質が潜んでいる.. さらに深く追求することによって, 「奇妙な環準同型写像」

$$\omega : B(C_{|G|}) \longrightarrow B(G)$$

の存在が示され, それから逆にシローの定理やフロベニウスの定理の簡単な証明が得られる. Dress-Siebeneicher-Yoshida 1993 参照. このような巡回群の際だった性質は, (無限) 巡回群が群のカテゴリの生成素であることの反映であると思われる.

(c)  $kG$ -加群の「同変次元」を定義できないか?  $B^+(G) := \mathbf{Set}_f^G / \cong$  は, 自然数の集合  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  の同変版であると述べた. それなら,  $CG$ -加群  $M$  に対し, その「次元」 $\text{Dim}M$  は  $B^+(G)$  に属すべきでなかろうか. つまり指標環からの環準同型写像  $\text{Dim} : R(G) \longrightarrow B(G)$  があるのではないか. たとえば置換加群の次元は  $\text{Dim}CX := X$  とするのである. きわめて残念なことに,  $CX \cong CY \implies X \cong Y$  は一般には成り立たないので, 置換加群に限っても上のような「次元」を定義することはできない. それでも対策はいくつか考えられるので, その中に何かうまい定義があるかもしれない.

4. 具体的な局所有限トポスの Burnside 環無限巡回群の完備 Burnside 環は, ネックレス環や不変ラムダ環といったものに同型である. 有限集合間の全射のなすカテゴリの Burnside 環は, Dirichlet 多項式  $\sum_{n \geq 1} a_n n^s$  の環に同型である. このように他の分野で現れる環が, 何かの局所有限トポスの Burnside 環になることはないのだろうか. たとえば Bouc が指摘しているように, 有限  $p$ -群の endo-permutation module のなす Dade 群  $D(P)$  は Burnside 環に似た基本定理を持つ.

重要な問題として、トポスの Burnside 環はいつラムダ環になるのだろうか。ラムダ作用素のうまい定義は難しい。有限群の Burnside 環に関する奇妙な環準同型  $\omega: \mathbf{B}(C_{|G|}) \rightarrow \mathbf{B}(G)$  に相当する環準同型写像はトポスの場合に存在するのだろうか。もし存在するなら、局所有限トポスに関するシローの定理が得られるだろう。

5. Mackey functor としての Burnside 環.  $H \leq K \leq G$  のとき, induction と restriction がある:

$$\text{ind} : \mathbf{B}(H) \rightarrow \mathbf{B}(K), \quad \text{res} : \mathbf{B}(K) \rightarrow \mathbf{B}(H).$$

したがって  $H \mapsto \mathbf{B}(H)$  はいわゆる  $G$ -functor (= Mackey functor) になる. これを Burnside functor という.  $\mathbf{B}$  は Tambara functor でもある. 乗法的 induction  $\text{jnd} : \mathbf{B}(H) \rightarrow \mathbf{B}(K)$  は,  $H$ -集合  $X$  に対しては,  $\text{jnd}([X]) = \text{Map}_H(K, X)$  ( $K$  は左からの積で  $H$ -集合と見る) で定義すればよい. この写像は多項式写像なので,  $\mathbf{B}(H)$  に一意的に拡張できる.

- (a) Burnside functor の Mackey functor への作用. 標準的作用  $[G/H] \cdot \chi := \chi \uparrow_H^G$  によって Mackey functor の  $G$ -成分  $M(G)$  は  $\mathbf{B}(G)$ -加群になる. これによって Burnside 環の性質から, たとえば Brauer の induction 定理の一步手前の hyper-elementary induction theorem が得られる. ベキ等元公式を使えば induction theorem の explicit form も得られる. これは Burnside 環のもっとも役立つ応用である.
- (b) 単数群の作用. Burnside 環の単数群  $\mathbf{B}(G)^\times$  は, たとえば指標環のなす Mackey functor  $R : H \mapsto R(H)$  の自己同型として作用する. 自己同型群  $\text{Aut}(R)$  のどの程度が  $\mathbf{B}(G)^\times$  から来ているのだろうか. そもそも指標群からできる Mackey functor  $R$  の自己同型群  $\text{Aut}(R)$  がよく分からない.

6. ベキ等元公式の周辺

- (a)  $p$ -ブロック  $e_Q^{(p)}(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathbf{B}(G))$ .  $\mathbb{Z}_{(p)}\mathbf{B}(G)$  のブロック.

原始ベキ等元  $e(p)_Q$  ( $Q$  は  $p$ -完全部分群) に対応するブロック  $e_Q^{(p)}\mathbb{Z}_{(p)}\mathbf{B}(G)$  は環としては局所環である. この局所環の構造と  $G$  の部分群束の構造との関連を知りたい. transfer 定理によると,  $e_Q^{(p)}\mathbb{Z}_{(p)}\mathbf{B}(G) \cong e_1^{(p)}\mathbb{Z}_{(p)}\mathbf{B}(N_G(Q)/Q)$  なので, 単位部分群に対応するブロック  $e_1^{(p)}\mathbb{Z}_{(p)}\mathbf{B}(G)$  を考えるだけでよい.

- (b)  $\mathbf{B}(G)$  のブロック  $e_Q^{(1)}\mathbf{B}(G)$ .  $e_Q\mathbf{B}(G) \cong e_1\mathbf{B}(N_G(Q)/Q)$  ( $Q$  は完全部分群) の構造と  $G$  の部分群束の構造との関係もまだ未解明の

ところが多い. とくに  $Q = 1$  のとき,  $e_1 B(G)$  のアーベル群としての階数は,  $G$  の可解部分群の共役類の個数に等しい.

- (c) 有限単純群の部分群束に関する可補予想 (ごく最近解決): 有限単純群  $G$  とその任意の  $H \leq G$  に対して, ある  $K \leq G$  が存在して  $H \cap K = 1, \langle H, K \rangle = G$ .

Burnside 環のベキ等元公式に関連して, メビウス関数  $\mu(D, G)$ , とくに  $\mu(1, G)$  の値に興味がある. 一般に  $\mu(D, G) \neq 0$  なら, 部分束  $\{H \leq G \mid D \leq H\}$  はやはり可補である. すなわち, 任意の  $D \leq H \leq G$  なら, ある  $K \leq G$  があって,  $H \cap K = D, \langle H, K \rangle = G$  となる. したがってそのような群  $G$  が正規部分群  $N$  を持てば,  $G$  は半直積  $G = HN$  に分解される.  $\mu(1, G) \neq 0$  となる群は珍しいようにも思える (たとえばアーベル  $p$ -群の場合は基本アーベル  $p$ -群の場合だけ). したがってすべての有限単純群  $G$  に対して  $\mu(1, G) \neq 0$  かどうかにも興味がある. 可補予想の場合と同様に, 有限単純群の分類定理

## 7. Burnside 環の一般化

- (a) 一般 Burnside 環. まず,  $\mathfrak{X}$  を有限群  $G$  の部分群の族で, 共役に関して閉じているとする. さらに

$$H \in \mathfrak{X}, g \in N_G(H) \implies \bigcap \{K \in \mathfrak{X} \mid \langle g \rangle H \leq K\} \in \mathfrak{X}$$

とする. このとき  $\{[G/H] \mid H \in \mathfrak{X}\}$  で生成される  $B(G)$  の部分群  $B(G, \mathfrak{X})$  は環構造を持つ. これを一般 Burnside 環という. 奇妙なことに, この環は必ずしも Burnside 環の部分環ではない.  $G = S_n$  を対称群,  $\mathfrak{Y}$  をヤング部分群の族とすれば,  $B(S_n, \mathfrak{Y})$  は  $S_n$  の指標環に同型である.

- (b) crossed Burnside 環.  $S$  を有限群  $G$  が作用するような単位的半群とする. 斜  $G$ -集合  $X$  とは, 重み写像という  $G$ -写像

$$\|\cdot\|: X \longrightarrow S; x \longmapsto \|x\|$$

を持つ有限  $G$ -集合  $X$  のことである. 斜  $G$ -集合のカテゴリーは, 有限直和を持ち, さらにテンソル積  $X \otimes Y$  によってモノイダルカテゴリーになる. ただし  $\|x \otimes y\| := \|x\| \cdot \|y\|$  とする. このモノイダルカテゴリーの Grothendieck 環が crossed Burnside 環である. これについても基本定理などが成り立つ.

## 8. Burnside 環に関係した環

- (a) 指標環  $R(G)$ . 指標環は Burnside 環によく似ている. 実際, 置換指標を対応させることにより, 指標環への自然な環準同型写像  $\pi: B(G) \rightarrow R(G)$  があるし, 指標環にも素イデアルやベキ等元公式がある. また  $p'$  元  $t$  に対応するブロック  $e_t^{(p)}(\mathcal{O} \otimes R(G))$  ( $\mathcal{O}$  は完備  $p$  進整数環) は局所環であり, その構造はやはり群  $G$  の構造と深い関係がある. 当然ながら, 指標環にも Burnside 環の理論と平行した理論があると期待するのは当然だろう. しかし指標環における基本定理は, やっかいである. 対称群などでは, ghost ring として類関数の環を取れるが, 一般にはそうはいかない. これについては別のところで話したい. 通常の指標環の他に, Brauer 指標の環も考えられる.
- (b) 単項表現の環. 部分群  $H \leq G$  とその 1 次の指標  $\lambda: H \rightarrow \mathbb{C}^*$  の対  $[H, \lambda]$  を生成系とし, 関係式

$$[H, \lambda] = [H^g, \lambda^g] \quad (g \in G)$$

で定義されたアーベル群  $A(G)$  を単項表現の環という (Dress 1971). 積は

$$[H, \lambda][K, \mu] := \sum_{HgK \in H \backslash G / K} [H^g \cap K, \lambda^g|_{H^g \cap K} \mu|_{H^g \cap K}]$$

で定義する. これも Burnside 環とよく似た性質を持つ.

より一般に, Boltje は restriction functor  $A$  (本質的には  $\mathbf{Set}_f^G$  から環のカテゴリーへの反変関手) に対しても似た環  $A_+(G)$  を構成している. 彼はこの環を generalized Burnside ring と呼んでいる. カテゴリー論的には,  $\mathbf{Set}_f^G$  から集合のカテゴリーへの反変関手  $F$  から, 「元のカテゴリー」  $\mathbf{Elem}(G, F)$  を作る. このカテゴリーの Grothendieck 環が Boltje の一般 Burnside 環である. 上のような理由で, 一般 monomial ring と呼びたい.  $F(G/H) = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$  の場合に古典的な単項表現の環が得られる.

単項表現の環は自然に指標環への環準同型を持つ:

$$[H, \lambda] \mapsto \text{Ind}_H^G(\lambda).$$

これに類似した環として, trivial source module の Grothendieck 環もある. trivial source module のカテゴリーは, Hecke カテゴリー (置換加群のカテゴリー) に森田同値だが, 両者の Grothendieck 環は一般には同型でない.

- (c) コホモロジー環. 有限群のコホモロジー環  $H^{**}(G, A)$  ( $A$  は環) も Burnside 環や指標環に似たところがある. induction(transfer), restriction を持ち, Mackey functor になる. さらに乗法的 transfer も持っている. 群  $G$  に関連したさまざまな加群 ( $H^*(G, M)$  など, ここで  $M$  は  $AG$ -加群) に作用している. コホモロジー環に Burnside 環のような基本完全系列があるかどうか分からない. そもそも有限群のコホモロジー群の間の transfer 写像がうまく定義できる訳は, カテゴリー論的には  $H$ -加群のカテゴリー  $\mathbf{Mod}^H$  ( $H \leq G$ ) から  $\mathbf{Mod}^G$  への induction functor が restriction functor に対する左右の adjoint functor になっていることにある. そのため半群のコホモロジーについてはうまい transfer 写像は定義できない. 一般のトポスでもコホモロジーが考えられるが, やはり transfer を持たない.
- (d) 行列環, 多項式環. 同変理論における整数環が Burnside 環なら, 行列環に相当する概念はなんだろう.

9. 応用. Burnside 環の応用についてはこれまでの述べてきた (induction theorem, 部分群束のメビウス関数, シローの定理など). いくつか追加しておく.

- (a) 合同式. 有限群の Burnside 環を使って, Frobenius の定理, シローの定理, Brown のホモロジー論的シローの定理が得られる. それらの拡張も同時に得られる (Wagner, Gluck, Yoshida など). Burnside 環の新しい研究によれば, このような合同式は, ベキ等元公式と, 奇妙な準同型写像  $\omega : B(\mathbb{C}_{|G|}) \rightarrow B(G)$  の存在から容易に得られる.

また, 有限カテゴリーや局所有限トポスの Burnside 環からも, いくつかの合同式が得られる. 残念なことに, 一般のカテゴリーでは, 奇妙な準同型写像  $\omega$  の存在が言えないため, 有限群論の3つの合同式に対応する十分な結果は得られていない. とくに,  $\omega$  の存在がこの問題を考える上で重要と思われるが, すでに述べたように一般の局所有限トポスでは未解決である.

- (b)  $|\mathrm{Hom}(A, G)|$  の問題. フロベニウスの定理:

$$\#\{x \in G \mid x^n = 1\} \equiv 0 \pmod{\mathrm{gcd}(n, |G|)}$$

は Burnside 環を使って証明できる. 指標理論を使っても証明できる. それならフロベニウスの定理の拡張である次の定理 (Yoshida

1993)はどうだろう：  $A$  を有限アーベル群，  $G$  が有限群のとき

$$|\mathrm{Hom}(A, G)| \equiv 0 \pmod{\mathrm{gcd}(|A|, |G|)}.$$

$A$  が巡回群  $C_n$  のときがフロベニウスの定理である。この合同式の証明には有限群論独特のテクニックの他に、一般 Burnside 環の理論から得られる部分群束の性質がごく一部で使われている。証明から Burnside 環関係の部分を取除きたいと長く考えてきた。しかし逆に、Burnside 環の理論や指標理論を使ってこの合同式のエレガントな証明を与えることは可能だろうか。フロベニウスの定理の場合、群指標は  $G$  のすべての元での値で決まり、各元は巡回群を生成することが証明の根本にある。上の合同式の表現論的証明のために、「多変数の群指標」  $\chi(g_1, \dots, g_n)$  ( $g_1, \dots, g_n$  は互いに可換) の理論を考えたことがある。このような多変数の群指標の理論も大昔にはあった。たぶん、多変数の指標理論よりは、何らかの Burnside 環を使った別証明の方に見込みがあると思う。

## 参 考 文 献

- S.Bouc, Burnside Rings, "Handbook of Algebra 2" (ed Hazewinkel), 739–804, North Holland, 2000.
- S.Bouc,  $p$ -blocks of the Mackey algebra, Algebra and Representation Theory, 6 (2003), 515–543.
- S.Bouc, "Green functors and  $G$ -sets", Lecture Notes in Math. vol.1671, Springer, 1997.
- P.Webb, A Guide to Mackey Functors, 805–836, id.
- T.tom Dieck, "Transformation groups and Representaion Theory", Lecture Notes in Math., Vol.766. Springer, 1979.
- T.Y., The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido M.J., 19 (1990), 509–574.
- P.J.Johnstone "Sketches of an Elephant" Vol.1,2,3, 2002–.
- P.J.Johnstone "Topos Theory", Academic Press, 1977.
- S.Mac Lane–l.Moerdijk, "Sheaves in Geometry and Logic", Springer, 1992.
- S.Mac Lane, "Categories for Working Mathematician", Springer, 1997.